



## Άσκηση 2<sup>η</sup>

### Κβάντιση και Συστήματα PCM

Μια στατική τυχαία διαδικασία έχει συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_x(\tau) = 0.5 A^2 \exp(-|\tau|) \cos(2\pi f_0 \tau)$ , όπου  $A = 6$ , ενώ επίσης είναι γνωστό ότι οι τιμές των δειγμάτων της βρίσκονται μεταξύ  $-6$  και  $6$ .

- i. Πόσες στάθμες κβάντισης απαιτούνται για να εξασφαλισθεί ότι το SQNR θα είναι τουλάχιστον 60 dB;
- ii. Για τον αριθμό των σταθμών κβάντισης του προηγούμενου ερωτήματος και θεωρώντας ότι το σήμα που απαιτείται να μεταδοθεί έχει εύρος ζώνης  $B_w = 5$  kHz, ποιο είναι το απαιτούμενο εύρος ζώνης του καναλιού για ένα σήμα PCM; Να μη ληφθούν υπ' όψιν τα φίλτρα εκπομπής και λήψης.

#### Λύση

- i. Ο λόγος της μέσης ισχύος του τυχαίου σήματος,  $P_x$ , προς τη μέση ισχύ του θορύβου κβάντισης,  $P_n$ , δίδεται ως  $SQNR = P_x / P_n$  και άρα πρέπει να υπολογιστούν ξεχωριστά τα  $P_x$  και  $P_n$ . Ως γνωστόν, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για  $\tau = 0$ , δίνει τη μέση ισχύ του σήματος, δηλαδή  $P_x = R_x(\tau = 0) = 0.5 A^2 = 18$ .

Θεωρώντας μόνο κοκκώδη θόρυβο κβάντισης, η ισχύς του θα δίδεται από τη σχέση  $P_n = \Delta^2 / 12$ , ενώ το βήμα κβάντισης δίδεται από τη σχέση  $\Delta = R / L$  με  $R$  την περιοχή του κβαντιστή και  $L$  το πλήθος των σταθμών κβάντισης. Δεδομένου ότι το τυχαίο σήμα μεταβάλλεται μεταξύ  $-6$  και  $+6$ , η περιοχή του κβαντιστή είναι  $R = 12$  και αν με  $b$  συμβολίσουμε το πλήθος των bit με τα οποία αναπαριστάται κάθε στάθμη κβάντισης προκύπτει ότι  $P_n = (R / L)^2 / 12 = 3 / 4^{b-1}$ .

Συνεπώς, το SQNR μπορεί να υπολογιστεί ως

$$SQNR = \frac{P_x}{P_n} = \frac{18}{3/4^{b-1}} = 3 \cdot 2^{2b-1} \Leftrightarrow [SQNR] = 10 \log_{10}(3) + 10 \log_{10}(2)(2b-1) \text{ dB}$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι τιμές του SQNR σε συνάρτηση του αριθμού των bit του κβαντιστή.

$b$	6	7	8	9	10
[SQNR]	37.88 dB	43.91 dB	49.93 dB	55.95 dB	61.97 dB

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα για  $b = 10$  bit και άρα  $L = 2^b = 1024$  στάθμες κβάντισης εξασφαλίζεται ότι το SQNR είναι τουλάχιστον 60 dB.

- ii. Για να ικανοποιείται η συνθήκη του Nyquist το σήμα πρέπει να δειγματοληπτηθεί τουλάχιστον με ρυθμό  $R_s = 2 B_w$  και δεδομένου ότι κάθε δείγμα αναπαριστάται από  $b = 10$  bit, το απαιτούμενο εύρος ζώνης καναλιού για τη μετάδοση του σήματος PCM είναι  $BW = b R_s = 2 b B_w = 100$  kHz.