ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥ Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΙΔΗ

ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2003

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο τη μελέτη μαθηματικών υποδειγμάτων (προτύπων ή μοντέλων), γνωστών ως *στοχαστικών υποδειγμάτων*, τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των *στοχαστικών (ή τυχαίων) πειραμάτων (ή φαινομένων)*. Βασικό χαρακτηριστικό των πειραμάτων αυτών είναι ότι οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιούνται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Στην αδυναμία προκαθορισμού του αποτελέσματος έγκειται το στοιχείο της τυχαιότητας. Έτσι η ρίψη ενός νομίσματος ή ενός κύβου και η παρατήρηση του αποτελέσματος, όπως και η παρατήρηση του φύλου νεογέννητου σε μία σειρά γεννήσεων αποτελούν στοχαστικά (τυχαία) πειράματα (ή φαινόμενα).

Όταν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται ένα πείραμα ή εμφανίζεται ένα φαινόμενο καθορίζουν το αποτέλεσμα, το πείραμα ή το φαινόμενο είναι γνωστό ως *αιτιοκρατικό (ή προσδιοριστικό)*. Για την περιγραφή τούτων αρκούν τα *αιτιοκρατικά (ή προσδιοριστικά) μαθηματικά υποδείγματα (πρότυπα ή μοντέλα)* τα οποία αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης άλλων κλάδων της επιστήμης. Οι νόμοι της βαρύτητας που περιγράφουν την πτώση ενός σώματος αποτελούν ένα τέτοιο μαθηματικό υπόδειγμα (μοντέλο).

2. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Ας θεωρήσουμε ένα στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα (ή φαινόμενο). Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, στην εισαγωγή, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμά του αλλά μόνο το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του. Σχετικά σημειώνουμε ότι:

Σύνολο καλείται μία καλώς ορισμένη συλλογή διακεκριμένων στοιχείων. Τα σύνολα συμβολίζουμε με τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου με δείκτες ή χωρίς δείκτες και τα στοιχεία που τα αποτελούν με τα μικρά (πεζά) γράματα. Το γεγονός ότι το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο A σημειώνουμε με $\alpha \in A$, ενώ το γεγονός ότι το στοιχείο α δεν ανήκει στο σύνολο A σημειώνουμε με $\alpha \notin A$. Ένα σύνολο A καλείται *υποσύνολο* ενός συνόλου B αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται με $A \subseteq B$. Αν $A \subseteq B$ και υπάρχει στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A καλείται γνήσιο υποσύνολο του B. Για την περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $A \subset B$. Το $A \subseteq B$ δεν αποκλείει και το $B \subseteq A$. Στην περίπτωση που ισχύουν και οι δύο αυτές σχέσεις τα σύνολα A

και B αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία και καλούνται *ίσα* και τούτο συμβολίζεται με $A = B$.

Μετά την εισαγωγή των εννοιών αυτών θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1. *Δειγματικός χώρος Ω ενός στοχαστικού (ή τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του. Ένα στοιχείο ω του δειγματικού χώρου Ω καλείται δειγματικό σημείο.*

Ας σημειωθεί ότι σε ένα στοχαστικό πείραμα είναι δυνατό, ανάλογα με τον καθορισμό των δυνατών αποτελεσμάτων, να ορισθούν περισσότερα από ένα σύνολα δυνατών αποτελεσμάτων. Στην περίπτωση αυτή ανάλογα με τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος λαμβάνεται το καταλληλότερο απ' αυτά ως δειγματικός χώρος. Πολλά παράδοξα έχουν προκύψει από τη μη κατάλληλη επιλογή δειγματικού χώρου. Το σημείο αυτό διευκρινίζεται περισσότερο στα παραδείγματα. Σημειώνουμε ακόμη ότι ο δειγματικός χώρος Ω ενός στοχαστικού πειράματος είναι είτε *πεπερασμένος*: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ είτε *αριθμησίμως άπειρος*: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ είτε *μη αριθμήσιμος*. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο δειγματικός χώρος Ω καλείται γενικά *διακριτός* (ή *απαριθμητός*) και στην τρίτη περίπτωση *συνεχής*.

Ορισμός 2.2. *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού πειράματος. Ένα υποσύνολο A του Ω καλείται ενδεχόμενο (ως προς το δειγματικό χώρο Ω). Ειδικά ο δειγματικός χώρος Ω καλείται βέβαιο ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ καλείται αδύνατο ενδεχόμενο.*

Ένα ενδεχόμενο $A = \{\omega\}$, που περιέχει ένα μόνο στοιχείο ω του δειγματικού χώρου Ω, καλείται *απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο* ενώ ένα ενδεχόμενο που περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του δειγματικού χώρου καλείται *σύνθετο ενδεχόμενο*.

Σε μία εκτέλεση ενός στοχαστικού πειράματος με δειγματικό χώρο Ω *ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται* αν και μόνο αν το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του πειράματος αυτού είναι στοιχείο ω που ανήκει στο A.

Ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών, παρουσιάζουν ενδεχόμενα τα οποία προκύπτουν μετά από συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ ενδεχομένων. Τα βασικότερα από τα ενδεχόμενα αυτά είναι τα ακόλουθα.

Η *ένωση* δύο ενδεχομένων (συνόλων) A και B (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ή } \omega \in B\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ενδεχόμενα A και B. Γενικότερα, η ένωση των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για έναν τουλάχιστο δείκτη } j = 1, 2, ..., \nu\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ν ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_\nu$. Περαιτέρω, η ένωση των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu \cup \cdots = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για έναν τουλάχιστο δείκτη } j = 1, 2, ...\},$$

της πραγματοποίησης ενός τουλάχιστο από τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$.

Η *τομή* δύο ενδεχομένων (συνόλων) A και B (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A \cap B = AB \equiv \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ και } \omega \in B\},$$

της πραγματοποίησης και των δύο ενδεχομένων A και B. Γενικότερα, η τομή των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu \equiv A_1 A_2 \cdots A_\nu$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για όλους τους δείκτες } j = 1, 2, ..., \nu\},$$

της πραγματοποίησης και των ν ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu$. Περαιτέρω, η τομή των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$ είναι το ενδεχόμενο

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu \cap \cdots \equiv A_1 A_2 \cdots A_\nu \cdots$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_j \text{ για όλους τους δείκτες } j = 1, 2, ...\},$$

της πραγματοποίησης όλων των ενδεχομένων $A_1, A_2, ..., A_\nu, ...$.

Αν η τομή των ενδεχομένων A και B είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, $A \cap B = \varnothing$, τότε τα A και B καλούνται *ξένα* ή *αμοιβαίως αποκλειόμενα (ή ασυμβίβαστα)* ενδεχόμενα. Στην περίπτωση αυτή η πράξη της ένωσης παριστάνεται με το σύμβολο $+$ ή $\sum$ αντί του συμβόλου $\bigcup$.

Το *συμπλήρωμα* ενός ενδεχομένου A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A' = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\},$$

της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου A. Το ενδεχόμενο A' καλείται *αντίθετο* του ενδεχομένου A.

Η *διαφορά* του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A (ως προς ένα δειγματικό χώρο Ω) είναι το ενδεχόμενο

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ και } \omega \notin B\},$$

της πραγματοποίησης του ενδεχομένου A και της μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου B. Σημειώνουμε ότι $A - B = A \cap B'$.

Σχηματικά διαγράμματα είναι συχνά χρήσιμα για την εποπτική παράσταση σχέσεων μεταξύ συνόλων (ενδεχομένων). Τέτοια διαγράμματα είναι τα γνωστά ως διαγράμματα του Venn στα οποία το καθολικό σύνολο (δειγματικός χώρος) Ω ορίζεται από μία περιοχή του επιπέδου που περικλείει τα στοιχεία του, τα οποία ορίζονται από γεωμετρικά σημεία του επιπέδου αυτού. Τα υποσύνολα του Ω ορίζονται από υποπεριοχές του. Στα διαγράμματα Venn των Σχημάτων 2.1-2.4 δίδονται σκιασμένα τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A' = \Omega - A$ και $A - B$ αντίστοιχα.

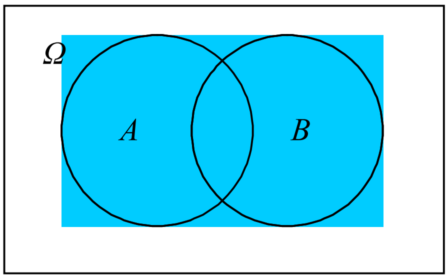
Το καρτεσιανό γινόμενο αποτελεί μία συνολοθεωρητική κατασκευή χρήσιμη τόσο στην έκφραση του δειγματικού χώρου συνθέτου τυχαίου πειράματος, το οποίο συντίθεται από ακολουθίες απλών τυχαίων πειραμάτων ή δοκιμών απλού τυχαίου πειράματος, όσο και ενδεχομένων ως προς αυτόν. Έστω Ω_1 και Ω_2 δύο σύνολα. Το *καρτεσιανό γινόμενο* των Ω_1 και Ω_2, συμβολιζόμενο με $\Omega_1 \times \Omega_2$, είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών στα οποία η πρώτη συνιστώσα είναι στοιχείο του Ω_1 και η δεύτερη συνιστώσα είναι στοιχείο του Ω_2, δηλαδή

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \ \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

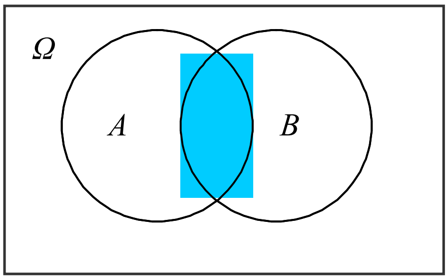
Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται και για ν σύνολα $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_\nu$ ως εξής:

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_\nu = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2, ..., \omega_\nu \in \Omega_\nu\}.$$

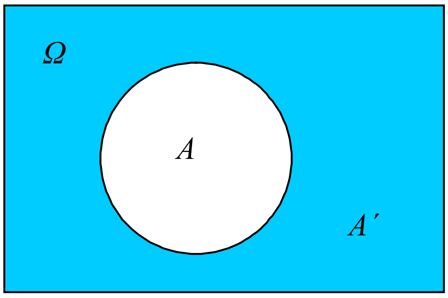
Ειδικά αν $\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_\nu \equiv \Omega$ το καρτεσιανό γινόμενο συμβολίζεται με Ω^ν.



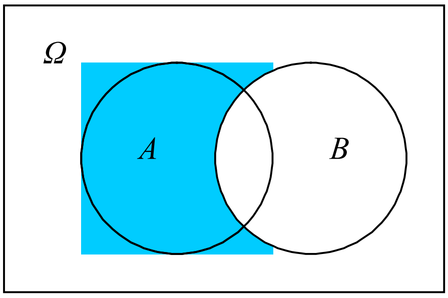
Σχήμα 2.1: $A \cup B$



Σχήμα 2.2: $A \cap B$



Σχήμα 2.3: A'



Σχήμα 2.4: $A - B$

Παράδειγμα 2.1. (α) Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος. Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{\gamma, \kappa\},$$

όπου σημειώνεται με γ η όψη γράμματα και με κ η όψη κεφαλή (ή κορώνα). Τα υποσύνολα του Ω

$$A = \{\gamma\} \text{ και } B = \{\kappa\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα εμφάνισης της όψης γράμματα και κεφαλή αντίστοιχα.

(β) Ας θεωρήσουμε τώρα το στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα μιας ακολουθίας 2 ρίψεων ενός νομίσματος. Τούτο είναι ένα σύνθετο στοχαστικό πείραμα συντιθέμενο από 2 δοκιμές του απλού στοχαστικού πειράματος της ρίψης ενός νομίσματος. Το οποιοδήποτε αποτέλεσμα των 2 ρίψεων δύναται να παρασταθεί από ένα διατεταγμένο ζεύγος του οποίου το πρώτο στοιχείο είναι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης και το δεύτερο στοιχείο το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης. Έτσι ο δειγματικός χώρος του σύνθετου στοχαστικού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega_2 = \{(\gamma,\gamma), (\gamma,\kappa), (\kappa,\gamma), (\kappa,\kappa)\}.$$

Σημειώνουμε ότι το Ω_2 είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\gamma, \kappa\}$ με τον εαυτό του. Τα υποσύνολα του Ω_2,

$$A_0 = \{(\gamma,\gamma)\},\ A_1 = \{(\gamma,\kappa), (\kappa,\gamma)\} \text{ και } A_2 = \{(\kappa,\kappa)\}$$

είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης 0, 1 και 2 φορές της όψης κεφαλή, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Τα σύνολα

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3\},\ A_4 = \{4\},\ A_5 = \{5\} \text{ και } A_6 = \{6\}$$

είναι τα στοιχειώδη ενδεχόμενα της εμφάνισης του αριθμού 1, 2, 3, 4, 5 και 6 αντίστοιχα, ενώ τα σύνολα

$$B_1 = \{1\},\ B_2 = \{1,2\},\ B_3 = \{1,2,3\},\ B_4 = \{1,2,3,4\},$$

$$B_5 = \{1,2,3,4,5\} \text{ και } B_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

είναι τα ενδεχόμενα εμφάνισης αριθμού μικροτέρου ή ίσου του $1,2,3,4,5$ και 6 αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_1 + A_2,\ B_3 = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$B_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,\ B_5 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,\ B_6 = \Omega.$$

Παράδειγμα 2.3. Ας θεωρήσουμε μία σειρά 3 γεννήσεων σ’ ένα μαιευτήριο των Αθηνών. Καταγράφοντας κατά σειρά γέννησης το φύλο των νεογέννητων ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\kappa,\kappa,\kappa),(\alpha,\kappa,\kappa),(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha),(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,\alpha)\},$$

όπου σημειώνεται με α η γέννηση αγοριού και με κ η γέννηση κοριτσιού. Τα ενδεχόμενα A_0, A_1, A_2 και A_3 της γέννησης 0, 1, 2 και 3 αγοριών, αντίστοιχα, περιλαμβάνουν τα εξής δειγματικά σημεία:

$$A_0 = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\},\ A_1 = \{(\alpha,\kappa,\kappa),(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha)\}$$

$$A_2 = \{(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha)\},\ A_3 = \{(\alpha,\alpha,\alpha)\},$$

ενώ το ενδεχόμενο B της γέννησης ενός τουλάχιστο αγοριού περιλαμβάνει τα εξής δειγματικά σημεία

$$B = \{(\alpha,\kappa,\kappa),(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha),(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,\alpha)\}$$

και είναι

$$B = A_1 + A_2 + A_3.$$

Το συμπληρωματικό (αντίθετο) του ενδεχομένου B είναι το ενδεχόμενο B' της γέννησης 3 κοριτσιών και περιλαμβάνει ένα μόνο σημείο

$$B' = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\}.$$

Παράδειγμα 2.4. Μέτρο του φόρτου εργασίας σε ένα τηλεφωνικό κέντρο παροχής πληροφοριών αποτελεί τόσο ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φθάνουν σ’ αυτό στη διάρκεια ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, όσο και ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων.

(α) Καταγράφοντας τον αριθμό των τηλεφωνικών κλήσεων, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων, το οποίο αποτελεί το δειγματικό χώρο, είναι το

$$\Omega_1 = \{0,1,...,N\}.$$

Το ενδεχόμενο μιας τουλάχιστο τηλεφωνικής κλήσης είναι το υποσύνολο A του Ω_1 με

$$A = \{1,2,...,N\}.$$

Το συμπληρωματικό (αντίθετο) του ενδεχομένου A είναι το ενδεχόμενο A', καμμιάς τηλεφωνικής κλήσης, το οποίο περιλαμβάνει ένα μόνο σημείο:

$$A' = \{0\}.$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που ο μέγιστος αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων N είναι πρακτικά πολύ μεγάλος λαμβάνεται θεωρητικά ίσος με ∞ και έτσι ο δειγματικός χώρος γίνεται

$$\Omega_2 = \{0,1,...,\infty\}.$$

(β) Καταγράφοντας το χρόνο μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων, το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων, το οποίο αποτελεί το δειγματικό χώρο είναι το διάστημα

$$\Omega_3 = \{t \in R : 0 < t < \theta\},$$

όπου ο μέγιστος χρόνος θ είναι ένας θετικός αριθμός. Το ενδεχόμενο A ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνικών κλήσεων να ξεπεράσει τα α δευτερόλεπτα είναι το

$$A = \{t \in R : \alpha < t < \theta\}.$$

Σημειώνουμε ότι το δειγματικός χώρος Ω_1 είναι πεπερασμένος ενώ δειγματικός χώρος Ω_2 αριθμησίμως άπειρος. Ο δειγματικός χώρος Ω_3 είναι υπεραριθμήσιμος και ειδικότερα συνεχής.

3. ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας διατυπώθηκε αρχικά από τον De Moivre (1711) ως εξής:

Η πιθανότητα της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο με αριθμητή τον αριθμό των περιπτώσεων ευνοϊκών για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου τούτου και παρονομαστή το συνολικό αριθμό των περιπτώσεων με την προϋπόθεση ότι όλες οι περιπτώσεις είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες).

Η συνθήκη του ισοπιθάνου των περιπτώσεων είναι αναγκαία γιατί διαφορετικά θεωρώντας τις περιπτώσεις της πραγματοποίησης και της μη πραγματοποίησης ενδεχομένου θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου είναι ίση με 1/2. Το συμπέρασμα τούτο δεν ισχύει γενικά επειδή οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν είναι πάντοτε εξίσου πιθανές. Η έννοια των εξίσου πιθανών (ισοπιθάνων) περιπτώσεων είναι απαραίτητο να ορισθεί ανεξάρτητα από την έννοια της πιθανότητας γιατί διαφορετικά ο κλασικός αυτός ορισμός θα οδηγούσε σε φαύλο κύκλο. Τούτο επιτυγχάνεται με επίκληση της *αρχής της έλλειψης επαρκούς λόγου*. Έτσι αν σύμφωνα με τα δεδομένα δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες τότε όλες θεωρούνται εξίσου πιθανές. Για παράδειγμα κατά την ρίψη ενός κύβου υπάρχουν τόσα δυνατά αποτελέσματα (περιπτώσεις) όσες είναι και οι έδρες του. Με την προϋπόθεση ότι οι έδρες είναι ίσες και το βάρος του κύβου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο δεν υπάρχει λόγος να θεωρηθεί κάποια από τις περιπτώσεις περισσότερο ή λιγότερο πιθανή από τις άλλες, οπότε όλες οι περιπτώσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Σημειώνουμε ότι ο κλασικός αυτός ορισμός της πιθανότητας αφορά αναγκαστικά πεπερασμένους δειγματικούς χώρους.

Η θεμελίωση του Λογισμού των Πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας αποδίδεται στον Laplace (1812). Αξίζει να παρουσιάσουμε τις σημαντικότερες ιδιότητες της κλασικής πιθανότητας, οι οποίες και ενέπνευσαν την κατάλληλη επέκταση της τόσο σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με μη ισοπίθανα δειγματικά σημεία (περιπτώσεις) όσο και γενικότερα σε αριθμήσιμους ή μη αριθμήσιμους δειγματικούς χώρους.

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία, περιπτώσεις), σύμφωνα με την αρχή της έλλειψης επαρκούς λόγου, είναι εξίσου πιθανά (ισοπίθανα) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A (ως προς το δειγματικό χώρο Ω). Η *πιθανότητα* του A, συμβολιζομένη με $P(A)$, δίδεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \tag{3.1}$$

όπου $N(A)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A και $N \equiv N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω. Η συνάρτηση $P(A)$ η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A (στον Ω) αντιστοιχεί τον αριθμό (3.1) είναι

(α) *μη αρνητική* : $P(A) \geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμένη* : $P(\Omega) = 1$,

(γ) *προσθετική* : $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα* A *και* $B \subseteq \Omega$.

Οι ιδιότητες αυτές προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό (3.1) και τις αντίστοιχες ιδιότητες: $N(A) \geq 0$ για κάθε σύνολο A και $N(A+B) = N(A) + N(B)$ για ξένα μεταξύ τους σύνολα A και B, του αριθμού των στοιχείων πεπερασμένου συνόλου. Σημειώνουμε ότι από την προσθετική ιδιότητα συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu) \tag{3.2}$$

για κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα, ασυμβίβαστα) ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu \subseteq \Omega$. Άμεσα συνάγονται από τον ορισμό (3.1) η σχέση

$$P(A) \leq 1 \text{ για κάθε ενδεχόμενο } A \subseteq \Omega .$$

όπως και η σχέση

$$P(\varnothing) = 0 .$$

Επίσης, έστω $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_\nu$ δειγματικός χώρος συνθέτου στοχαστικού πειράματος, όπου Ω_i είναι πεπερασμένος δειγματικός χώρος με N_i ισοπίθανα δειγματικά σημεία, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Αν ισχύει

$$P(\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu)\}) = P_1(\{\omega_1\}) P_2(\{\omega_2\}) \cdots P_\nu(\{\omega_\nu\}) \tag{3.3}$$

για οποιαδήποτε δειγματικά σημεία $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε ο δειγματικός χώρος Ω έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

Επέκταση της κλασικής πιθανότητας στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής (μη αριθμήσιμος) αποτελεί η *γεωμετρική πιθανότητα* που ορίζεται ως εξής: Ας θεωρήσουμε ένα μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο Ω οριζόμενο από μία περιοχή του (μονοδιαστάτου ή διδιαστάτου ή τριδιαστάτου) χώρου στην οποία οποιεσδήποτε στοιχειώδεις περιοχές είναι εξίσου πιθανές (ισοπίθανες) και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο A οριζόμενο από μία περιοχή του δειγματικού χώρου Ω. Η πιθανότητα του A δίδεται από τη σχέση

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{3.4}$$

όπου $\mu(A)$ και $\mu(\Omega)$ είναι το μέτρο (μήκος ή εμβαδό ή όγκος) των περιοχών A και Ω αντίστοιχα. Η πιθανότητα (3.4), όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, έχει αντίστοιχες με την πιθανότητα (3.1) ιδιότητες.

Παράδειγμα 3.1. Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία δύο ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος και το ενδεχόμενο A_j της εμφάνισης σ' αυτή j φορές της όψης κεφαλή, $j = 0,1,2$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A_j)$, $j = 0,1,2$.

Παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος του απλού τυχαίου πειράματος της ρίψης ενός συνήθους (συμμετρικού) νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{\gamma, \kappa\}.$$

Τα δειγματικά σημεία, λόγω της συμμετρίας του νομίσματος, είναι ισοπίθανα:

$$P_i(\{\gamma\}) = P_i(\{\kappa\}) = \frac{1}{2},\ i = 1,2.$$

Περαιτέρω, ο δειγματικός χώρος του συνθέτου τυχαίου πειράματος μιας ακολουθίας 2 ρίψεων ενός νομίσματος είναι το σύνολο

$$\Omega_2 = \{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\},$$

το οποίο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\gamma, \kappa\}$ με τον εαυτό του. Στο τυχαίο αυτό πείραμα ισχύει η (3.3) και έτσι τα 4 δειγματικά σημεία του Ω_2 είναι ισοπίθανα:

$$P(\{(\gamma,\gamma)\}) = P_1(\{\gamma\})P_2(\{\gamma\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(\{(\gamma,\kappa)\}) = P_1(\{\gamma\})P_2(\{\kappa\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(\{(\kappa,\gamma)\}) = P_1(\{\kappa\})P_2(\{\gamma\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(\{(\kappa,\kappa)\}) = P_1(\{\kappa\})P_2(\{\kappa\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας (3.1) και επειδή

$$A_0 = \{(\gamma,\gamma)\},\ A_1 = \{(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)\},\ A_2 = \{(\kappa,\kappa)\},$$

συνάγουμε τις πιθανότητες

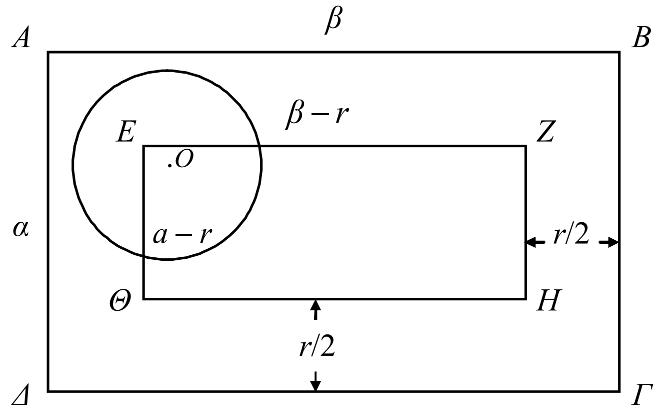
$$P(A_0) = \frac{1}{4},\ P(A_1) = \frac{1}{2},\ P(A_2) = \frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 3.2. Έστω ότι ένα νόμισμα διαμέτρου r τοποθετείται τυχαία πάνω σε ορθογώνιο τραπέζι το οποίο είναι χωρισμένο σε N ορθογώνια με πλευρές α και β, όπου $\alpha \le \beta$ και $r < \alpha$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το νόμισμα τοποθετηθεί στο εσωτερικό ορθογωνίου.

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το ορθογώνιο τραπέζι με εμβαδό

$$\mu(\Omega) = N\alpha\beta .$$

Για τον καθορισμό της περιοχής του τραπεζιού η οποία ορίζεται από το ενδεχόμενο A, όπως το νόμισμα τοποθετηθεί στο εσωτερικό ορθογωνίου, ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με πλευρές α και β, όπου $\alpha \leq \beta$ και ένα δεύτερο ορθογώνιο $ΕΖΗΘ$ κείμενο στο εσωτερικό του πρώτου ορθογωνίου με πλευρές παράλληλες στις πλευρές αυτού και σε απόσταση $r/2$ απ' αυτές (βλ. Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1

Ένα νόμισμα διαμέτρου r κείται στο εσωτερικό του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ αν και μόνο αν το κέντρο O του νομίσματος κείται στο εσωτερικό του ορθογωνίου $ΕΖΗΘ$. Το εμβαδό του ορθογωνίου $ΕΖΗΘ$ είναι $(\alpha - r)(\beta - r)$. Η περιοχή του τραπεζιού η οποία ορίζεται από το ενδεχόμενο A είναι η ένωση N τέτοιων ορθογωνίων και έτσι

$$\mu(A) = N(\alpha - r)(\beta - r) .$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της γεωμετρικής πιθανότητας (3.4),

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(\alpha - r)(\beta - r)}{\alpha\beta} .$$

Σημειώνουμε ότι στη μερική περίπτωση τετραγώνων, $\beta = \alpha$, η πιθανότητα αυτή γίνεται

$$P(A) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^2 .$$

4. ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ, ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω του οποίου τα στοιχεία (δειγματικά σημεία, περιπτώσεις) είναι ισοπίθανα ανάγεται, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, $P(A) = N(A)/N$, στον υπολογισμό του αριθμού $N(A)$ των στοιχείων του A και του αριθμού $N \equiv N(\Omega)$ των στοιχείων του Ω. Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε μερικά βασικά στοιχεία της Συνδυαστικής τα οποία διευκολύνουν την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων απαρίθμησης. Η αρχή του αθροίσματος και η αρχή του γινομένου (ή πολλαπλασιαστική αρχή), οι οποίες αποτελούν τις δύο βασικές αρχές απαρίθμησης, μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Αρχή του αθροίσματος. Αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι πεπερασμένα και κατά ζεύγη ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε

$$N(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_\nu)$$

Η αρχή αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) α_i μπορεί να εκλεγεί κατά κ_i τρόπους, $i = 1, 2, ..., \nu$ και η εκλογή του α_i αποκλείει την ταυτόχρονη εκλογή του α_j, $i, j = 1, 2, ..., \nu$, $i \neq j$ τότε το στοιχείο α_1 ή α_2, ..., ή α_ν μπορεί να εκλεγεί κατά $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu$ τρόπους.

Αρχή γινομένου (ή πολλαπλασιαστική αρχή). Αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu) = N(A_1) N(A_2) \cdots N(A_\nu).$$

Η αρχή αυτή μπορεί γενικότερα να διατυπωθεί ως εξής: Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο) α_1 μπορεί να εκλεγεί κατά κ_1 τρόπους και για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους ένα άλλο στοιχείο α_2 μπορεί να εκλεγεί κατά κ_2 τρόπους, ..., και για κάθε ένα από όλους αυτούς τους τρόπους ένα άλλο στοιχείο α_ν μπορεί να εκλεγεί κατά κ_ν τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία α_1 και α_2,...,και α_ν μπορούν να εκλεγούν (διαδοχικά) κατά $\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_\nu$ τρόπους.

Ας θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο σύνολο ν στοιχείων $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$. *Διάταξη* των ν ανά κ καλείται μία διατεταγμένη κ-αδα $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa)$ με $\alpha_r \in \Omega$ $r = 1, 2, ..., \kappa$. *Συνδυασμός* των ν ανά κ καλείται μία (μη διατεταγμένη) συλλογή κ στοιχείων $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ με $\alpha_r \in \Omega$, $r = 1, 2, ..., \kappa$. Τα στοιχεία μιας διάταξης ή ενός συνδυασμού είναι είτε διαφορετικά είτε όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά στοιχεία του Ω. Για την πρώτη περίπτωση διατηρούμε την ονομασία διάταξη ή συνδυασμός των ν ανά κ ενώ στη δεύτερη περίπτωση όπου τα στοιχεία του Ω επιτρέπεται να επαναλαμβάνονται, χρησιμοποιούμε την ονομασία *διάταξη ή συνδυασμός των ν ανά κ με επανάληψη*. Η ειδική περίπτωση διάταξης των ν ανά ν (όλων των θεωρουμένων στοιχείων) καλείται ειδικότερα *μετάθεση* ν στοιχείων.

Σχετικά με το πλήθος των διατάξεων και των συνδυασμών αποδεικνύουμε τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 4.1. (α) *Ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά κ, συμβολιζόμενος με* $(\nu)_\kappa$, *δίδεται από τη σχέση*

$$(\nu)_\kappa = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\kappa+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}, \tag{4.1}$$

όπου το γινόμενο όλων των ακεραίων από το 1 *μέχρι το ν καλείται ν παραγοντικό και συμβολίζεται με* $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-1)\nu$.

(β) *Ο αριθμός των συνδυασμών των ν ανά κ συμβολιζόμενος με* $\binom{\nu}{\kappa}$, *δίδεται από τη σχέση*

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{(\nu)_\kappa}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}, \tag{4.2}$$

Απόδειξη. (α) Σε μια οποιαδήποτε διάταξη $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa)$ των ν στοιχείων του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ανά κ, το πρώτο στοιχείο α_1 μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των ν στοιχείων, ενώ μετά την εκλογή του πρώτου στοιχείου, το δεύτερο στοιχείο α_2, επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από το α_1, μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υπολοίπων $\nu-1$ στοιχείων. Τελικά μετά την εκλογή των $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{\kappa-1}$ στοι-χείων, το τελευταίο στοιχείο α_κ, επειδή πρέπει να είναι διαφορετικό από τα $\kappa-1$ προηγούμενα στοιχεία, μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των υπολοίπων $\nu-(\kappa-1)=\nu-\kappa+1$ στοιχείων. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγεται η (4.1).

(β) Σε κάθε συνδυασμό $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}$ των ν στοιχείων του Ω ανά κ αντιστοιχούν $\kappa!$ διατάξεις των ν ανά κ, οι οποίες προκύπτουν με μετάθεση των κ στοιχείων του κατά όλους τους $\kappa!$ το πλήθος δυνατούς τρόπους. Επομένως ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά κ είναι ίσος με $\kappa!$ φορές τον αριθμό των συνδυασμών των ν ανά κ και έτσι χρησιμοποιώντας την (4.1) συνάγουμε την (4.2).

Θεώρημα 4.2. *Ο αριθμός των διατάξεων των ν ανά κ με επανάληψη, συμβολιζόμενος με $U(\nu,\kappa)$, είναι ίσος με*

$$U(\nu,\kappa)=\nu^\kappa. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι σε μία οποιαδήποτε διάταξη $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa)$ των ν στοιχείων του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ανά κ με επανάληψη οποιοδήποτε στοιχείο α_i μπορεί να εκλεγεί από το σύνολο των ν στοιχείων. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγεται η (4.3).

Θεώρημα 4.3. *Ο αριθμός των συνδυασμών των ν ανά κ με επανάληψη είναι ίσος με*

$$\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}=\frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+\kappa-1)}{\kappa!}=\frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa!(\nu-1)!}. \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ένα συνδυασμό $\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_\kappa}\}$ των ν στοιχείων του $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ανά κ με επανάληψη και ας υποθέσουμε ότι οι κ δείκτες $i_1,i_2,...,i_\kappa$ είναι αριθμημένοι από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο. Η υπόθεση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα εφόσον η οποιαδήποτε σειρά αναγραφής των στοιχείων ενός συνδυασμού δεν παίζει κανένα ρόλο. Τότε $1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_\kappa\le\nu$ και αν στο συνδυασμό $\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_\kappa}\}$ αντιστοιχήσουμε το συνδυασμό $\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},...,\omega_{j_\kappa}\}$ με

$$j_1=i_1,\ j_2=i_2+1,...,\ j_\kappa=i_\kappa+(\kappa-1),$$

θα είναι $1\le j_1<j_2<\cdots<j_\kappa\le\nu+\kappa-1$, δηλαδή τα στοιχεία του δευτέρου συνδυασμού θα είναι διαφορετικά είτε είναι είτε δεν είναι διαφορετικά τα στοιχεία του πρώτου συνδυασμού και επιπλέον ο συνδυασμός $\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},...,\omega_{j_\kappa}\}$ είναι ένας συνδυασμός των $\nu+\kappa-1$ στοιχείων του συνόλου $W=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_{\nu+\kappa-1}\}$ ανά κ (χωρίς επανάληψη). Η αντιστοιχία αυτή συνεπάγεται ότι ο αριθμός των συνδυασμών των ν ανά κ με επανάληψη είναι ίσος με τον αριθμό των συνδυασμών των $\nu+\kappa-1$ ανά κ (χωρίς επανάληψη).

Παράδειγμα 4.1. (α) *Κατανομή διακεκριμένων σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά.* Ας θεωρήσουμε κ διακεκριμένα σφαιρίδια $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_\kappa\}$ τα οποία τοποθετούνται μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά $\{c_1, c_2, ..., c_\nu\}$. Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των κ διακεκριμένων σφαιριδίων μέσα στα ν διακεκριμένα κελιά, είναι ίσος με

$$\nu^\kappa,$$

τον αριθμό των διατάξεων των ν ανά κ με επανάληψη, επειδή το κάθε σφαιρίδιο μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε από τα ν κελιά.

Ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των κ διακεκριμένων σφαιριδίων μέσα στα ν διακεκριμένα κελιά έτσι ώστε το j κελί να περιέχει κ_j σφαιρίδια για όλα τα $j = 1, 2, ..., \nu$ με $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\nu = \kappa$, είναι ίσος με

$$\frac{\kappa!}{\kappa_1! \kappa_2! \cdots \kappa_\nu!},$$

επειδή τα κ_1 σφαιρίδια του πρώτου κελιού μπορούν να επιλεγούν από τα κ σφαιρίδια κατά

$$\binom{\kappa}{\kappa_1}$$

τρόπους. Μετά την επιλογή αυτή τα κ_2 σφαιρίδια του δευτέρου κελιού μπορούν να επιλεγούν από τα υπόλοιπα $\kappa - \kappa_1$ σφαιρίδια κατά

$$\binom{\kappa - \kappa_1}{\kappa_2}$$

τρόπους. Συνεχίζοντας την ανάλυση αυτή, μετά την επιλογή των σφαιριδίων για τα $\nu - 1$ πρώτα κελιά, τα κ_ν σφαιρίδια του ν-οστού κελιού μπορούν να επιλεγούν από τα υπόλοιπα $\kappa - (\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_{\nu-1}) = \kappa_\nu$ σφαιρίδια κατά ένα μόνον τρόπο και έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, συνάγεται ο ζητούμενος αριθμός,

$$\binom{\kappa}{\kappa_1}\binom{\kappa - \kappa_1}{\kappa_2}\cdots\binom{\kappa - \kappa_1 - \cdots - \kappa_{\nu-1}}{\kappa_\nu}$$

$$= \frac{\kappa!}{\kappa_1!(\kappa - \kappa_1)!} \frac{(\kappa - \kappa_1)!}{\kappa_2!(\kappa - \kappa_1 - \kappa_2)!} \cdots \frac{(\kappa - \kappa_1 - \cdots - \kappa_{\nu-1})!}{\kappa_\nu!(\kappa - \kappa_1 - \cdots - \kappa_\nu)!}$$

μετά από απλοποιήσεις.

(β) *Κατανομή όμοιων σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά.* Ας θεωρήσουμε κ όμοια σφαιρίδια τα οποία τοποθετούνται μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά $\{c_1, c_2, ..., c_\nu\}$. Σε κάθε τοποθέτηση των κ όμοιων σφαιριδίων μέσα στα ν διακεκριμένα κελιά αντιστοιχεί μία επιλογή κ κελιών $\{c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_\kappa}\}$ ανεξάρτητα σειράς και αντίστροφα όπου η τοποθέτηση ενός σφαιριδίου μέσα σε ένα κελί αντιστοιχεί στην επιλογή του κελιού αυτού. Επομένως στην περίπτωση που κάθε κελί μπορεί να χωρέσει ένα μόνο σφαιρίδιο, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης κ όμοιων σφαιριδίων μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά είναι ίσος με

$$\binom{\nu}{\kappa},$$

τον αριθμό των συνδυασμών των ν ανά κ, ενώ στην περίπτωση που τα κελιά είναι απεριόριστης χωρητικότητας, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης κ όμοιων σφαιριδίων μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά είναι ίσος με

$$\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa},$$

τον αριθμό των συνδυασμών των ν ανά κ με επανάληψη.

5. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η προϋπόθεση του ισοπιθάνου των περιπτώσεων ή στοιχειωδών περιοχών που απαιτούν τόσο ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας όσο και η γεωμετρική επέκτασή του περιορίζει σημαντικά το πεδίο εφαρμογών της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Έτσι σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με πεπερασμένο δειγματικό χώρο στον οποίο τα δειγματικά σημεία δεν είναι ισοπίθανα ή με αριθμησίμως άπειρο δειγματικό χώρο, όπως για παράδειγμα η εκπομπή σωματιδίων από ραδιενεργό ουσία, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Επίσης σε στοχαστικά πειράματα (ή φαινόμενα) με μη αριθμήσιμο δειγματικό χώρο στον οποίο οι στοιχειώδεις περιοχές δεν είναι ισοπίθανες, όπως για παράδειγμα ο χρόνος ζωής μιας μηχανής, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο γεωμετρικός ορισμός της πιθανότητας.

Ο Von Mises στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει το πρόβλημα ορισμού πιθανότητας σε οποιουσδήποτε δειγματικούς χώρους διατύπωσε τον ακόλουθο *εμπειρικό ορισμό της πιθανότητας*.

Ας υποθέσουμε ότι ένα στοχαστικό πείραμα (ή φαινόμενο) με δειγματικό χώρο Ω μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών και ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Έστω ότι σε ν επαναλήψεις του στοχαστικού πειράματος (ή φαινομένου) το ενδεχόμενο A έχει πραγματοποιηθεί $n_\nu(A)$ φορές. Η σχετική συχνότητα του A δίδεται από το λόγο

$$\frac{n_\nu(A)}{\nu}.$$

Στην περίπτωση που υπάρχει το όριο της σχετικής συχνότητας όταν το ν τείνει στο άπειρο τούτο ορίζει, σύμφωνα με τον Von Mises, την πιθανότητα του A:

$$P(A) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu(A)}{\nu}. \tag{5.1}$$

Σημειώνουμε ότι, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, και η εμπειρική πιθανότητα είναι

(α) *μη αρνητική* : $P(A) \geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμένη* : $P(\Omega) = 1$,

(γ) *προσθετική* : $P(A+B) = P(A) + P(B)$ *για οποιαδήποτε ξένα ενδεχόμενα* A *και* $B \subseteq \Omega$.

Η υπόθεση ότι ένα στοχαστικό πείραμα μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες απεριόριστο αριθμό φορών αποτέλεσε το σημείο κριτικής του εμπειρικού ορισμού της πιθανότητας. Επίσης η σύγκλιση στην (5.1) δεν μπορεί να νοηθεί με την απόλυτη μαθηματική έννοια αλλά με πιθανότητα όπως θα δούμε στα θεωρήματα σύγκλισης.

6. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Επέκταση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας ενδεχομένου τόσο στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου με όχι κατ' ανάγκη ισοπίθανα δειγματικά σημεία όσο και στις περιπτώσεις αριθμησίμου ή μη αριθμησίμου δειγματικού χώρου επιτυγχάνεται με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. Ο ορισμός αυτός είναι αρκετά γενικός και ενσωματώνει ως ειδική περίπτωση την κλασική πιθανότητα και ως οριακό θεώρημα την εμπειρική πιθανότητα.

Ορισμός 6.1. *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου). Μια συνάρτηση η οποία σε κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ αντιστοιχεί (εκχωρεί) έναν πραγματικό αριθμό $P(A)$ καλείται πιθανότητα αν ικανοποιεί τα αξιώματα (συνθήκες):*

(α) *μη αρνητικότητας*: $P(A) \geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $A \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμού*: $P(\Omega) = 1$,

(γ) *αριθμήσιμης προσθετικότητας*:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu) + \cdots$$

για οποιαδήποτε ακολουθία κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$.

Παρατήρηση 6.1. Στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω αντί του αξιώματος της αριθμήσιμης προσθετικότητας αρκεί το ασθενέστερο αξίωμα

(γ΄) *προσθετικότητας :* $P(A + B) = P(A) + P(B)$ *για οποιαδήποτε ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα* $A, B \subseteq \Omega$,

από το οποίο συνάγεται επαγωγικά η σχέση

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu),$$

για οποιαδήποτε κατά ζεύγη ξένα ενδεχόμενα $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Σημειώνουμε ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας δεν καθορίζει κάποια έκφραση (τύπο) υπολογισμού της (συνάρτησης) πιθανότητας $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$. Απλώς περιορίζεται στον καθορισμό των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $P(A)$, $A \subseteq \Omega$ για να είναι πιθανότητα. Η ύπαρξη πρόσθετων στοιχείων σχετικών με το δειγματικό χώρο Ω και τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του δύναται να οδηγήσει στον προσδιορισμό μιας έκφρασης (τύπου) υπολογισμού της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου. Τέτοιες περιπτώσεις εξετάζουμε στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.1. *Πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι.* Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ με $N(\Omega) = N$ και έστω $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_\kappa}\} \subseteq \Omega$ ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο. Η πιθανότητα $P(A)$ δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω:

$$P(\{\omega_i\}) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το ότι $A = \{\omega_{i_1}\} + \{\omega_{i_2}\} + \cdots + \{\omega_{i_\kappa}\}$ συνάγουμε, σύμφωνα με το αξίωμα της προσθετικότητας, την έκφραση

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \cdots + P(\{\omega_{i_\kappa}\})$$

και έτσι

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_\kappa}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με το αξίωμα του νορμαλισμού και επειδή $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \cdots + p_N$, οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τη σχέση

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1.$$

Συμπερασματικά, στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου, η γνώση των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας οποιουδήποτε ενδεχομένου. Οι αρχικές αυτές πιθανότητες δύνανται να προκύψουν από την εξέταση και ανάλυση των συνθηκών και των οργάνων εκτέλεσης του συγκεκριμένου στοχαστικού πειράματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση ισοπιθάνων δειγματικών σημείων,

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N},\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

η ανωτέρω έκφραση της πιθανότητας $P(A)$ απλοποιείται λαμβάνοντας τη μορφή

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

η οποία συμφωνεί με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Παράδειγμα 6.2. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

με $N = N(\Omega) = 6$ δειγματικά σημεία.

(α) Στην περίπτωση συνήθους κύβου, ο οποίος είναι συμμετρικός και κατασκευασμένος από ομοιογενές υλικό, όλες οι έδρες έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης:

$$p_j = P(\{j\}) = \frac{1}{6},\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου A δίδεται τότε από τον τύπο

$$P(A) = \frac{N(A)}{6},$$

της κλασικής πιθανότητας. Έτσι, αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και $N(A) = 2$, οπότε

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

(β) Στην περίπτωση κύβου με ανομοιογενές υλικό κατασκευής, τέτοιο ώστε η πιθανότητα εμφάνισης οποιασδήποτε έδρας να είναι ανάλογη του αριθμού (των κουκκίδων) που φέρει, τότε

$$p_j = P(\{j\}) = cj,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

όπου c ο συντελεστής αναλογίας. Όμως $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, οπότε $c(1+2+3+4+5+6) = 1$ και έτσι $c = 1/21$. Επομένως η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου $A = \{j_1, j_2, ..., j_\kappa\} \subseteq \Omega$ δίδεται από τον τύπο

$$P(A) = \frac{j_1 + j_2 + \cdots + j_\kappa}{21}.$$

Έτσι αν A είναι το ενδεχόμενο εμφάνισης αριθμού μεγαλυτέρου ή ίσου του 5, τότε $A = \{5, 6\}$ και

$$P(A) = \frac{5+6}{21} = \frac{11}{21}.$$

Στηριζόμενοι στα αξιώματα (α), (β) και (γ) αποδεικνύουμε στα επόμενα θεωρήματα βασικές ιδιότητες της πιθανότητας.

Θεώρημα 6.1. (α) *Αν $\varnothing$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο, ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε*

$$P(\varnothing) = 0. \tag{6.1}$$

(β) *Αν $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, ..., \nu$ είναι κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) = P(A_1) + (A_2) + \cdots + P(A_\nu) \tag{6.2}$$

(γ) *Αν A' είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A, ως προς το δειγματικό χώρο Ω, τότε*

$$P(A') = 1 - P(A). \tag{6.3}$$

(δ) *Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \tag{6.4}$$

και αν $B \subseteq A$, τότε

$$P(A - B) = P(A) - P(B). \tag{6.5}$$

(ε) *Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{6.6}$$

και

$$P(A'B') = 1 - P(A) - P(B) + P(AB). \tag{6.7}$$

Απόδειξη. (α) Θέτοντας $A_i = \varnothing$, $i = 1, 2, ...$, έχουμε $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots = \varnothing$ και χρησιμοποιώντας το αξίωμα (γ) συνάγουμε τη σχέση

$$P(\varnothing) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu) + \cdots$$
$$= P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots.$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το αξίωμα (α) έχουμε

$$P(\varnothing) \geq 0.$$

Επομένως η σειρά μη αρνητικών όρων,

$$P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots = 0,$$

είναι μηδενική, οπότε $P(\varnothing)=0$.

(β) Ας θεωρήσουμε και τα ενδεχόμενα $A_i=\varnothing$, $i=\nu+1,\nu+2,\ldots$. Τότε χρησιμοποιώντας το αξίωμα (γ) και την (6.1) συμπεραίνουμε ότι

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_\nu)=P(A_1+A_2+\cdots+A_\nu+A_{\nu+1}+\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_\nu)+P(A_{\nu+1})+\cdots=P(A_1)+(A_2)+\cdots+P(A_\nu)$$

(γ) Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και A' είναι ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα), $A\cap A'=\varnothing$, και $A+A'=\Omega$. Επομένως χρησιμοποιώντας την (6.2) με $\nu=2$ και το αξίωμα (β) συνάγουμε τη σχέση

$$P(A)+P(A')=P(\Omega)=1$$

η οποία συνεπάγεται την (6.3).

(δ) Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $A-B=A\cap B'$ είναι ξένα μεταξύ τους:

$$(A\cap B')\cap(A\cap B)=A\cap(B'\cap B)=A\cap\varnothing=\varnothing$$

και επιπλέον

$$(A\cap B')+(A\cap B)=[(A\cap B')\cup A]\cap[(A\cap B')\cup B]$$
$$=A\cap[(A\cup B)\cap(B\cup B')]=A\cap(A\cup B)=A\,.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (6.2) με $\nu=2$, συνάγουμε την

$$P(A)=P[(A\cap B')+(A\cap B)]=P(A\cap B')+P(A\cap B)$$

και έτσι

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(AB)\,.$$

Στην περίπτωση που $B\subseteq A$ έχουμε $AB=B$ και επομένως

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\,.$$

(ε) Τα ενδεχόμενα $A-B=A\cap B'$ και B είναι ξένα, $(A\cap B')\cap B=\varnothing$, και $(A\cap B')+B=A\cup B$. Επομένως σύμφωνα με την (6.2),

$$P(A\cup B)=P[(A-B)+B]=P(A-B)+P(B)$$

και χρησιμοποιώντας την (6.5) συνάγουμε την (6.6). Επειδή $A'B'=(A\cup B)'$, εφαρμόζοντας την (6.3) συμπεραίνουμε την (6.7).

Η πιθανότητα της ένωσης τριών οποιωνδήποτε ενδεχομένων συνάγεται με τη χρησιμοποίηση της (6.6) στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 6.1. *Αν* $A,B,\Gamma\subseteq\Omega$ *είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα, τότε*

$$P(A\cup B\cup\Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(AB)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+P(AB\Gamma)\quad(6.8)$$

και

$$P(A'B'\Gamma')=1-P(A)-P(B)-P(\Gamma)+P(AB)+P(A\Gamma)+P(B\Gamma)-P(AB\Gamma)\,.\quad(6.9)$$

Απόδειξη. Η πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων $A\cup B$ και Γ, σύμφωνα με την (6.6) εκφράζεται ως εξής:

$$P[(A\cup B)\cup\Gamma]=P(A\cup B)+P(\Gamma)-P[(A\cup B)\Gamma]$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(\Gamma)-P[(A\Gamma)\cup(B\Gamma)]\,.$$

Επίσης, σύμφωνα και πάλιν με την (6.6),

$$P[(A\Gamma)\cup(B\Gamma)] = P(A\Gamma) + P(B\Gamma) - P(AB\Gamma)$$

και έτσι συνάγεται η έκφραση (6.8). Επειδή $A'B'\Gamma' = (A\cup B\cup \Gamma)'$, εφαρμόζοντας την (6.3) συμπεραίνουμε την (6.9).

Θεώρημα 6.2. *Η πιθανότητα* $P(A)$, $A\subseteq \Omega$, *λαμβάνει τιμές στο διάστημα* $[0,1]$:

$$0\le P(A)\le 1 \text{ για κάθε } A\subseteq\Omega \tag{6.10}$$

και είναι αύξουσα συνάρτηση:

$$P(A)\le P(B) \text{ για κάθε } A,B\subseteq\Omega \text{ με } A\subseteq B. \tag{6.11}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το αξίωμα (α) της μη αρνητικότητας, έχουμε

$$P(A)\ge 0,\ P(A')\ge 0 \text{ για κάθε } A\subseteq\Omega$$

οπότε χρησιμοποιώντας και την (6.3), $P(A') = 1 - P(A)$, συνάγουμε την (6.10). Επίσης, σύμφωνα με το αξίωμα (α) της μη αρνητικότητας, η πιθανότητα του ενδεχομένου $B - A\subseteq\Omega$ είναι μη αρνητική,

$$P(B-A)\ge 0,$$

και επειδή σύμφωνα με την (6.5),

$$P(B-A) = P(B) - P(A),$$

εφόσον $A\subseteq B$, συνάγουμε την (6.11).

Οι βασικές ιδιότητες της πιθανότητας που αποδείχθηκαν στο θεώρημα 6.1 και στο Πόρισμα 6.1 εκτός από το θεωρητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν, είναι και υπολογιστικά χρήσιμες όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.3. Ας θεωρήσουμε μία σειρά τριών γεννήσεων σ' ένα μαιευτήριο και το ενδεχόμενο B της γέννησης ενός τουλάχιστο αγοριού. Υποθέτοντας ότι η γέννηση αγοριού είναι εξίσου πιθανή με τη γέννηση κοριτσιού, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(B)$.

Παρατηρούμε ότι συμπληρωματικό του ενδεχομένου B είναι το ενδεχόμενο B' της γέννησης κοριτσιού και στις τρεις περιπτώσεις. Η πιθανότητα $P(B')$ υπολογίζεται πιο εύκολα από την $P(B)$. Συγκεκριμένα, ο δειγματικός χώρος περιλαμβάνει 8 ισοπίθανα δειγματικά σημεία (βλ. Παράδειγμα 2.3) από τα οποία μόνο ένα ανήκει στο B' και έτσι

$$P(B') = \frac{1}{8}$$

και σύμφωνα με την (6.3) παίρνουμε

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της πιθανότητας $P(B)$ είναι να θεωρήσουμε το ενδεχόμενο B ως ένωση των κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων A_1, A_2 και A_3 της γέννησης $1, 2$ και 3 αγοριών, αντίστοιχα. Τότε

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Παράδειγμα 6.4. *Το πρόβλημα των γενεθλίων*. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο κ ατόμων των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Σημειώνουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες εκτός και αν είναι δίσεκτο, οπότε έχει 366 ημέρες. Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των γεννήσεων δεν είναι σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια του έτους. Όμως, σε πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες οι οποίες είναι εξίσου πιθανές ως ημέρες γενεθλίων. Με την παραδοχή αυτή, να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως δύο τουλάχιστο από τα κ άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Παρατηρούμε ότι οι ημέρες των γενεθλίων του συνόλου των κ ατόμων μπορούν να παρασταθούν από μία διάταξη $(i_1, i_2, ..., i_\kappa)$ του συνόλου των 365 ημερών $\{1, 2, ..., 365\}$ ανά κ με επανάληψη, όπου i_r είναι η ημέρα γέννησης του r ατόμου, $r = 1, 2, ..., \kappa$. Ο δειγματικός χώρος Ω, ο οποίος περιλαμβάνει τις διατάξεις αυτές, έχει $N(\Omega) = 365^\kappa$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία. Έστω A το ενδεχόμενο όπως δύο τουλάχιστο από τα κ άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου A είναι το ενδεχόμενο A' όπως τα κ άτομα έχουν διαφορετικές ημέρες γενεθλίων. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $P(A')$ υπολογίζεται πιο εύκολα από την πιθανότητα $P(A)$. Συγκεκριμένα, το ενδεχόμενο A' περιλαμβάνει τις διατάξεις $(i_1, i_2, ..., i_\kappa)$ του συνόλου των 365 ημερών $\{1, 2, ..., 365\}$ ανά κ (χωρίς επανάληψη) και έτσι $N(A') = (365)_\kappa$. Εφαρμόζοντας την (6.1), συνάγουμε την πιθανότητα

$$P(A') = \frac{(365)_\kappa}{365^\kappa}$$

και σύμφωνα με την (6.5) συμπεραίνουμε τη ζητουμένη πιθανότητα:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(365)_\kappa}{365^\kappa}.$$

Σημειώνουμε ότι για $\kappa = 23$, έχουμε $P(A) > 1/2$.

Παράδειγμα 6.5. Έστω ότι από μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 10 σφαιρίδια αριθμημένα από το 0 μέχρι το 9 κληρώνεται κάθε εβδομάδα ένας αριθμός. Μετά από κάθε κλήρωση το εξαγόμενο σφαιρίδιο επανατοποθετείται στην κληρωτίδα. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα 3 (διαδοχικών) κληρώσεων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι το 5.

Το ενδεχόμενο όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι το 5 δύναται να παρασταθεί ως διαφορά $A - B$ του ενδεχομένου A όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι ένας από τους αριθμούς $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και του ενδεχομένου B όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι ένας από τους αριθμούς $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq A$ και σύμφωνα με την (6.5)

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω των 3 διαδοχικών κληρώσεων είναι ίσος με $N(\Omega) = 10^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 10 αριθμών $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ ανά 3 με επανάληψη, ενώ ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A είναι ίσος με $N(A) = 6^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 6 αριθμών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ανά 3 με επανάληψη. Ομοίως $N(B) = 5^3$ και έτσι

$$P(A-B)=\frac{6^3}{10^3}-\frac{5^3}{10^3}=0{,}091\,.$$

Παράδειγμα 6.6. (*Συνέχεια*). Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου να κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1 (από μία τουλάχιστο φορά ο καθένας).

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A και B να μη κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1, αντίστοιχα. Τότε $A'B'$ είναι το ενδεχόμενο να κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1 (από μία τουλάχιστο φορά ο καθένας) και σύμφωνα με την (6.7),

$$P(A'B')=1-P(A)-P(B)+P(AB)\,.$$

Ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A είναι ίσος με $N(A)=9^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 9 αριθμών $\{1,2,...,9\}$ ανά 3 με επανάληψη, ο αριθμός των στοιχείων του B είναι ίσος με $N(B)=9^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 9 αριθμών $\{0,2,3,...,9\}$ ανά 3 με επανάληψη και ο αριθμός των στοιχείων του AB είναι ίσος με $N(AB)=8^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 8 αριθμών $\{2,3,...,9\}$ ανά 3 με επανάληψη. Επομένως

$$P(A'B')=1-2\frac{9^3}{10^3}+\frac{8^3}{10^3}=0{,}054\,.$$

7. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας αναφύεται στις περιπτώσεις όπου μία μερική γνώση ως προς την έκβαση ενός τυχαίου (στοχαστικού) πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και πιθανότητα $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο εκτέλεσής του πραγματοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$. Τότε, όσον αφορά την τελική του έκβαση, ο δειγματικός χώρος συρρικνώνεται στο σύνολο A και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο B (ως προς το δειγματικό χώρο Ω) συρρικνώνεται στο ενδεχόμενο $\Gamma = AB$ το οποίο συμβολίζεται με $B\mid A$ και διαβάζεται: το ενδεχόμενο B δεδομένου του (ενδεχομένου) A. Η πιθανότητα του ενδεχομένου B δεδομένου του A, η οποία συμβολίζεται με $P(B\mid A)$, $B\subseteq\Omega$ και καλείται δεσμευμένη πιθανότητα (δεδομένου του A), συνδέεται, όπως είναι φυσικό, με τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(AB)$. Το επόμενο παράδειγμα χρησιμεύει στην καλύτερη κατανόηση του πλαισίου στο οποίο τοποθετείται η δεσμευμένη πιθανότητα.

Παράδειγμα 7.1. Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το 5. Τα σφαιρίδια 1 και 2 είναι άσπρα ενώ τα σφαιρίδια 3, 4 και 5 είναι μαύρα.

(α) Έστω ότι σε μία πρώτη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο A εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος περιλαμβάνει τα ισοπίθανα δειγματικά σημεία: $\Omega_1=\{1,2,3,4,5\}$ και το ενδεχόμενο της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου περιλαμβάνει τα σημεία: $A=\{1,2\}$. Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(A')=\frac{3}{5}.$$

(β) Έστω ότι, χωρίς επανάθεση στην κληρωτίδα του σφαιριδίου που εξάγεται στην πρώτη κλήρωση, σε μία δεύτερη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο B εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(B)$ απαιτεί τη γνώση της σύνθεσης των σφαιριδίων στην κληρωτίδα τη στιγμή της εξαγωγής του δευτέρου σφαιριδίου. Συγκεκριμένα, η γνώση της πραγματοποίησης ή μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου A κατά την πρώτη εξαγωγή επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(B)$, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας το οποίο εξετάζουμε πιο κάτω. Το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει την ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B \mid A)$, του ενδεχομένου B δεδομένου του A. Περαιτέρω, η σύνδεση της πιθανότητας $P(B \mid A)$ με τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(AB)$, η οποία συνάγεται από τη σύνθεση των δύο κληρώσεων στο ακόλουθο (σύνθετο) τυχαίο πείραμα, υποδεικνύει τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας μέσω της (μη δεσμευμένης) πιθανότητας.

(γ) Έστω ότι από την ανωτέρω κληρωτίδα εξάγονται τυχαία δύο σφαιρίδια, το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση. Ο δειγματικός χώρος Ω του σύνθετου αυτού τυχαίου πειράματος περιλαμβάνει τα εξής $N \equiv N(\Omega) = (5)_2 = 20$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),$$
$$(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}.$$

Το ενδεχόμενο A (ως προς το δειγματικό χώρο Ω), εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην πρώτη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα $N(A) = 8$ δειγματικά σημεία:

$$A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\},$$

ενώ το ενδεχόμενο B (ως προς το δειγματικό χώρο Ω), εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην δεύτερη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα $N(B) = 8$ δειγματικά σημεία:

$$B = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}.$$

Έτσι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα της περίπτωσης του τυχαίου πειράματος της μιας (πρώτης) κλήρωσης.

Ας υποθέσουμε ότι στην πρώτη κλήρωση του συνθέτου τυχαίου πειράματος πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο A, της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου. Η γνώση της πραγματοποίησης του A μειώνει την αβεβαιότητα ως προς την τελική έκβαση του συνθέτου τυχαίου πειράματος συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο Ω στο σύνολο A και το ενδεχόμενο B στο ενδεχόμενο

$$AB = \{(1,2),(2,1)\}$$

με $N(AB) = 2$. Επομένως η δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A είναι ίση με

$$P(B \mid A) = \frac{N(AB)}{N(A)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$P(AB)=\frac{N(AB)}{N},\ P(A)=\frac{N(A)}{N}$$

συνάγουμε για τη δεσμευμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, η (μη δεσμευμένη) πιθανότητα του B είναι ίση με

$$P(B)=\frac{N(B)}{N}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Η πιθανότητα αυτή, τόσο στην παρούσα περίπτωση του πεπερασμένου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα δειγματικά σημεία όσο και σε οποιαδήποτε γενικότερη περίπτωση, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, δύναται να υπολογισθεί με τη χρήση του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας (βλ. Παράδειγμα 7.3).

Ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας που ακολουθεί αξιοποιεί τα συμπεράσματα της προηγηθείσας ανάλυσης.

Ορισμός 7.1. *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A\subseteq\Omega$ ένα ενδεχόμενο με $P(A)>0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου του A, είναι μία συνάρτηση $P(B\mid A)$, $B\subseteq\Omega$, η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\ B\subseteq\Omega. \tag{7.1}$$

Όταν $P(A)=0$, η $P(B\mid A)$ δεν ορίζεται. Για συγκεκριμένο ενδεχόμενο $B\subseteq\Omega$ η $P(B\mid A)$ καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ικανοποιεί τα αξιώματα,

(α) *μη αρνητικότητας*: $P(B\mid A)\geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $B\subseteq\Omega$,

(β) *νορμαλισμού*: $P(\Omega\mid A)=1$,

(γ) *αριθμήσιμης προσθετικότητας*:

$$P(B_1+B_2+\cdots+B_\nu+\cdots\mid A)=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)+\cdots+P(B_\nu\mid A)+\cdots$$

για οποιαδήποτε ακολουθία κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων $B_i\subseteq\Omega,\ i=1,2,\ldots,\nu,\ldots$, και έτσι είναι μια γνήσια πιθανότητα. Σημειώνουμε ότι από την ιδιότητα (γ) συνάγεται ως μερική περίπτωση η σχέση

$$P(B_1+B_2+\cdots+B_\nu\mid A)=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)+\cdots+P(B_\nu\mid A)$$

για κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα $B_i\subseteq\Omega,\ i=1,2,\ldots,\nu$. Η δεσμευμένη πιθανότητα ως γνήσια πιθανότητα ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της πιθανότητας. Για παράδειγμα, αν B' είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου B, η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B'\mid A)=P(AB')/P(A)$, επειδή $P(AB')=P(A)-P(AB)$, εκφράζεται συναρτήσει της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B\mid A)=P(AB)/P(A)$ ως

$$P(B'\mid A)=1-P(B\mid A).$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έκφραση της πιθανότητας της τομής ενδεχομένων. Σχετικά αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 7.1. (*Πολλαπλασιαστικό θεώρημα*). *Έστω* $A_i \subseteq \Omega,\ i = 1, 2, ..., \nu$, *ενδεχόμενα με* $P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) > 0$. *Τότε*

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\nu) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_\nu \mid A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}). \qquad (7.2)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1} \subseteq A_1 A_2 \cdots A_{\nu-2} \subseteq \cdots \subseteq A_1 A_2 \subseteq A_1,$$

οπότε

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) \le P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-2}) \le \cdots \le P(A_1 A_2) \le P(A_1)$$

και επειδή $P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) > 0$, έπεται ότι

$$P(A_1) > 0,\ P(A_1 A_2) > 0, ..., P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) > 0..$$

Επομένως οι δεσμευμένες πιθανότητες στο δεξιό μέλος της (7.2) έχουν έννοια (ορίζονται). Σύμφωνα με τον ορισμό (7.1) έχουμε

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)},\ P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)}, \ldots,$$

$$P(A_\nu \mid A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) = \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1} A_\nu)}{P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1})}$$

και επομένως

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\nu) = P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \cdots \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_\nu)}{P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1})}$$

$$= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_\nu \mid A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}).$$

Παράδειγμα 7.3. Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει ν σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το ν και έστω ότι r από τα σφαιρίδια αυτά είναι άσπρα. Εξάγουμε τυχαία και χωρίς επανάθεση το ένα μετά το άλλο κ σφαιρίδια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως και τα κ εξαγόμενα σφαιρίδια είναι άσπρα.

Έστω A_j το ενδεχόμενο εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην j εξαγωγή $j = 1, 2, ..., \nu$. Τότε $A_1 A_2 \cdots A_\kappa$ είναι το ενδεχόμενο όπως και τα κ εξαγόμενα σφαιρίδια είναι άσπρα και η ζητουμένη πιθανότητα, σύμφωνα με την (7.2), είναι

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\kappa) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_\kappa \mid A_1 A_2 \cdots A_{\kappa-1})$$

$$= \frac{r}{\nu} \cdot \frac{r-1}{\nu-1} \cdots \frac{r-\kappa+1}{\nu-\kappa+1} = \frac{(r)_\kappa}{(\nu)_\kappa}.$$

Στην περίπτωση του Ελληνικού Lotto η κληρωτίδα περιέχει $\nu = 49$ σφαιρίδια και κληρώνονται $\kappa = 6$ αριθμοί. Τα r σφαιρίδια φέρουν τους αριθμούς στους οποίους στοιχηματίζει κάποιος. Έτσι αν στοιχηματίσει σε $r = 6$ αριθμούς, η πιθανότητα να πετύχει και τους 6 αριθμούς που κληρώνονται είναι

$$p = \frac{1}{13.998.816} \cong 0{,}00000007.$$

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα πιθανοτήτων με τη χρησιμοποίηση δεσμευμένων πιθανοτήτων του ενδεχομένου αυτού. Η ανάλυση αυτή απαιτεί την έννοια της διαμέρισης του δειγματικού χώρου Ω η οποία ορίζεται ως εξής:

Μία συλλογή $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ ν ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, ..., \nu$, τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, και η ένωσή τους είναι το Ω, $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = \Omega$, καλείται *διαμέριση* του Ω.

Θεώρημα 7.2. (*Θεώρημα ολικής πιθανότητας*). *Αν τα ενδεχόμενα* $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ *αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου* Ω *με* $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ *και* B *είναι ένα ενδεχόμενο στον* Ω, *τότε*

$$P(B) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa). \tag{7.3}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$B = \Omega B = (A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) B = A_1 B + A_2 B + \cdots + A_\nu B,$$

όπου τα ενδεχόμενα $\Gamma_\kappa = A_\kappa B$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ είναι κατά ζεύγη ξένα μεταξύ τους επειδή για $i \neq j$ $\Gamma_i \Gamma_j = (A_i A_j) B = \varnothing$. Επομένως, σύμφωνα με την προσθετική ιδιότητα της πιθανότητας, έχουμε

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \cdots + P(A_\nu B).$$

Επειδή $P(A_\kappa) > 0$, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έπεται ότι

$$P(A_\kappa B) = P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa), \ \kappa = 1, 2, ..., \nu,$$

οπότε

$$P(B) = P(A_1) P(B \mid A_1) + P(A_2) P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_\nu) P(B \mid A_\nu).$$

Παρατήρηση 7.1. Η δεσμευμένη πιθανότητα όπως έχουμε ήδη σημειώσει ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (απόλυτης) πιθανότητας. Ο τύπος της ολικής πιθανότητας διατυπώνεται συναρτήσει της δεσμευμένης πιθανότητας ως εξής:

Έστω A ένα ενδεχόμενο στο δειγματικό χώρο Ω με $P(A) > 0$. Αν τα ενδεχόμενα $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ αποτελούν μία διαμέριση του Ω με $P(A_\kappa \mid A) > 0$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ και B είναι ένα ενδεχόμενο στον Ω, τότε

$$P(B \mid A) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa \mid A) P(B \mid A A_\kappa). \tag{7.4}$$

Θεώρημα 7.3. (*Τύπος του Bayes*). *Αν τα ενδεχόμενα* $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ *αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου* Ω *με* $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ *και* B *είναι ένα ενδεχόμενο στον* Ω *με* $P(B) > 0$, *τότε*

$$P(A_r \mid B) = \frac{P(A_r) P(B \mid A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa)}, \ r = 1, 2, ..., \nu. \tag{7.5}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το θεώρημα της ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$P(A_r \mid B) = \frac{P(A_r B)}{P(B)} = \frac{P(A_r)P(B \mid A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa)P(B \mid A_\kappa)}, \; r = 1,2,\ldots,\nu .$$

Παρατήρηση 7.2. Οι πιθανότητες $P(A_\kappa)$, $\kappa = 1,2,\ldots,\nu$, που γνωρίζουμε πριν από την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος, καλούνται και "εκ των προτέρων" (a priori) πιθανότητες, ενώ οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(A_r \mid B)$, $r = 1,2,\ldots,\nu$, που υπολογίζουμε με δεδομένη την πραγματοποίηση του ενδεχομένου B και επομένως μετά την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος, καλούνται και "εκ των υστέρων" (a posteriori) πιθανότητες.

Παράδειγμα 7.3. Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 25 λαμπτήρων. Ας υποθέσουμε ότι από ένα χαρτοκιβώτιο που περιέχει 2 ελαττωματικούς λαμπτήρες εξάγονται χωρίς επανάθεση 2 λαμπτήρες. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα εξαγωγής ελαττωματικού λαμπήρα στη δεύτερη εξαγωγή και (β) η δεσμευμένη πιθανότητα να είχε εξαχθεί ελαττωματικός λαμπήρας στην πρώτη εξαγωγή δεδομένου ότι εξήχθει ελαττωματικός λαμπήρας στη δεύτερη εξαγωγή.

(α) Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A και B εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα στην πρώτη και δεύτερη εξαγωγή, αντίστοιχα. Τότε, η πιθανότητα του ενδεχομένου εξαγωγής ελαττωματικού λαμπήρα στη δεύτερη εξαγωγή υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας ως εξής:

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A') = \frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24} + \frac{22}{25}\cdot\frac{3}{24} = \frac{3}{25}.$$

(β) Η δεσμευμένη πιθανότητα να είχε εξαχθεί ελαττωματικός λαμπήρας στην πρώτη εξαγωγή δεδομένου ότι εξήχθει ελαττωματικός λαμπήρας στη δεύτερη εξαγωγή υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση του τύπου του Bayes ως εξής:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A')} = \frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24} \bigg/ \left(\frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24} + \frac{22}{25}\cdot\frac{3}{24}\right) = \frac{1}{12}.$$

Παράδειγμα 7.4. Ας θεωρήσουμε ένα τηλεπικοινωνικό σύστημα αποτελούμενο από έναν πομπό, έναν αναμεταδότη και ένα δέκτη. Ο πομπός στέλλει τα σήματα στο δυαδικό σύστημα, στο οποίο τα γράμματα του αλφαβήτου είναι ακολουθίες από 0 και 1. Ο αναμεταδότης και ο δέκτης, λόγω θορύβου, λαμβάνουν το σήμα 0 ως σήμα 1 με πιθανότητα 0,02 και το σήμα 1 ως σήμα 0 με πιθανότητα 0,03. Να υπολο-γισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες λήψης από το δέκτη (α) του σήματος 0 και (β) του σήματος 1 δεδομένης, σε αμφότερες τις περιπτώσεις, της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0.

(α) Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο A_0 αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, το ενδεχόμενο A_1 λήψης από τον αναμεταδότη του σήματος 0 και A_2 το ενδεχόμενο λήψης από το δέκτη του σήματος 0. Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_2 \mid A_0)$, λήψης από το δέκτη του σήματος 0 δεδομένης της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, σύμφωνα με τον τύπο της ολικής πιθανότητας (7.4), δίδεται απότην:

$$P(A_2 \mid A_0) = P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_0 A_1) + P(A_1' \mid A_0)P(A_2 \mid A_0 A_1')$$

και επειδή $P(A_2 \mid A_0 A_1) = P(A_2 \mid A_1)$, $P(A_2 \mid A_0 A_1') = P(A_2 \mid A_1')$,

$$P(A_2 \mid A_0) = P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_1) + P(A_1' \mid A_0)P(A_2 \mid A_1')$$
$$= 0{,}98 \cdot 0{,}98 + 0{,}02 \cdot 0{,}03 = 0{,}961 .$$

(β) Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_2' \mid A_0)$, λήψης από το δέκτη του σήματος 1 δεδομένης της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, δίδεται από την

$$P(A_2' \mid A_0) = 1 - P(A_2 \mid A_0) = 1 - 0{,}961 = 0{,}039 .$$

8. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας συνάγουμε ότι (α) αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ξένα μεταξύ τους, $AB = \varnothing$, τότε $P(B \mid A) = 0$, επειδή δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου A αποκλείεται η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B, ενώ (β) αν το ενδεχόμενο A είναι υποενδεχόμενο του ενδεχομένου B, $A \subseteq B$, τότε $P(B \mid A) = 1$, επειδή η πραγματοποίηση του ενδεχομένου A συνεπάγεται την πραγματοποίηση και του ενδεχομένου B. Αυτές είναι οι δύο ακραίες περιπτώσεις όπου η γνώση της πραγματοποίησης του ενδεχομένου A μας παρέχει μία πολύ θετική πληροφορία για την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου B. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες η γνώση της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου A δεν έχει καμμιά επίδραση στην πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου B, δηλαδή

$$P(B \mid A) = P(B) .$$

Στην περίπτωση αυτή το ενδεχόμενο B καλείται στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου A. Επειδή, σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστικό τύπο, ισχύει

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) ,$$

στην περίπτωση που το ενδεχόμενο B είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου A έπεται ότι

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = P(A) ,$$

δηλαδή και το ενδεχόμενο A είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου B και επιπλέον

$$P(AB) = P(A)P(B) .$$

Με τη χρησιμοποίηση της τελευταίας αυτής σχέσης εισάγεται η έννοια της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων. Συγκεκριμένα θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 8.1. *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A, B \subseteq \Omega$. Τα ενδεχόμενα A και B καλούνται στοχαστικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση*

$$P(AB) = P(A)P(B) . \tag{8.1}$$

Παρατήρηση 8.1. Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε και τα ενδεχόμενα A και B' είναι ανεξάρτητα. Τούτο συνάγεται από το συνδυασμό των εξής παρατηρήσεων: (α) Η ανεξαρτησία των ενδεχομένων A και B συνεπάγεται ότι η γνώση της πραγματοποίησης του A δεν επιδρά στην πραγματοποίηση ή μη του B και (β) η πραγματοποίηση του B αποκλείει την πραγματοποίηση του B'. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να διαπιστωθεί με τη χρησιμοποίηση των σχέσεων

$$P(AB') = P(A) - P(AB), \; P(B') = 1 - P(B)$$

και της υπόθεσης της ανεξαρτησίας των A και B,

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

ως εξής:

$$P(AB') = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B').$$

Ανάλογα διαπιστώνεται ότι, στην περίπτωση αυτή, και τα ενδεχόμενα A' και B, όπως επίσης και τα ενδεχόμενα A' και B', είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 8.1. Έστω ότι μία οικογένεια με 3 παιδιά επιλέγεται τυχαία. Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο A όπως η επιλεγόμενη οικογένεια έχει παιδιά και των δύο φύλων και το ενδεχόμενο B όπως έχει το πολύ ένα κορίτσι. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Παρατηρούμε ότι η τομή AB είναι το ενδεχόμενο η επιλεγόμενη οικογένεια να έχει ακριβώς ένα κορίτσι. Εύκολα υπολογίζονται οι πιθανότητες:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}, \; P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}, \; P(B) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως ισχύει η σχέση (8.1) και τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Ας θεωρήσουμε αρχικά τρία ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$ και ας υποθέσουμε ότι είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα οπότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2), \\ P(A_1A_3) &= P(A_1)P(A_3), \\ P(A_2A_3) &= P(A_2)P(A_3). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Η ανεξαρτησία του A_1 τόσο από το A_2 όσο και από το A_3 δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την ανεξαρτησία του A_1 από την τομή A_2A_3 (βλ. παράδειγμα 8.2). Παρατηρούμε ότι αν, επιπλέον των (8.2), ισχύει και η σχέση

$$P[A_1(A_2A_3)] = P(A_1)P(A_2A_3), \tag{8.3}$$

τότε ισχύει και η σχέση

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \tag{8.4}$$

Αντίστροφα αν, επιπλέον των (8.2), ισχύει και η (8.4), τότε ισχύει και η (8.3), όπως επίσης και οι σχέσεις

$$P[A_2(A_1A_3)] = P(A_2)P(A_1A_3), \tag{8.5}$$

$$P[A_3(A_1A_2)] = P(A_3)P(A_1A_2). \tag{8.6}$$

Μετά τις προκαταρκτικές αυτές παρατηρήσεις θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων.

Ορισμός 8.2. *Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A_1, A_2, ..., A_\nu \subseteq \Omega$. Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ καλούνται (αμοιβαίως ή πλήρως) στοχαστικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις*

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_\kappa}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_\kappa}) \tag{8.7}$$

για κάθε συνδυασμό $\{i_1, i_2, ..., i_\kappa\}$ των ν δεικτών $\{1, 2, ..., \nu\}$ ανά κ και για κάθε $\kappa = 2, 3, ..., \nu$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, για την ανεξαρτησία $\nu = 3$ ενδεχομένων απαιτείται να ισχύουν οι σχέσεις (8.2) και (8.4).

Παράδειγμα 8.2. *Κατά ζεύγη αλλά όχι πλήρως ανεξάρτητα ενδεχόμενα.* Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους κύβου και έστω A_1 το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στην πρώτη ρίψη, A_2 το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στη δεύτερη ρίψη και A_3 το ενδεχόμενο το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις δύο ρίψεις να είναι άρτιος αριθμός. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι ανεξάρτητα.

Ο δειγματικός χώρος Ω του τυχαίου πειράματος των δύο ρίψεων του κύβου περιλαμβάνει $N(\Omega) = 6^2 = 36$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία, που είναι οι διατάξεις των 6 αριθμών (εδρών) $\{1, 2, ..., 6\}$ ανά 2 με επανάληψη. Επίσης

$$A_1 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(4,1),(4,2),(4,3),$$
$$(4,4),(4,5),(4,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},$$
$$A_2 = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),$$
$$(4,2),(4,4),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6),(6,2),(6,4),(6,6)\},$$
$$A_3 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),$$
$$(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

και

$$A_1 A_2 = A_1 A_3 = A_2 A_3 = A_1 A_2 A_3$$
$$= \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

και έτσι

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2), \; P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3), \; P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3),$$

ενώ

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)\,.$$

Επομένως τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα ενώ δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 8.3. Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τριών ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος. Έστω A_j το ενδεχόμενο της εμφάνισης στην j ρίψη της όψης κεφαλή (κορώνα), $j = 1,2,3$. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι ανεξάρτητα.

Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\gamma,\gamma,\gamma),\ (\gamma,\gamma,\kappa),\ (\gamma,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\gamma,\gamma),\ (\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}$$

και

$$A_1 = \{(\kappa,\gamma,\gamma),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,$$

$$A_2 = \{(\gamma,\kappa,\gamma),\ (\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}$$

$$A_3 = \{(\gamma,\gamma,\kappa),\ (\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,.$$

Επίσης

$$A_1A_2 = \{(\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,\ A_1A_3 = \{(\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,$$

$$A_2A_3 = \{(\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,\ A_1A_2A_3 = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\}\,.$$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{8}$$

και έτσι

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2),\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)\,,\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)\,,$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\,.$$

Επομένως τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι πλήρως ανεξάρτητα.

9. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Η έννοια των ανεξαρτήτων δοκιμών ενός τυχαίου πειράματος αποτελεί βασικό στοιχείων των περισσοτέρων στοχαστικών προτύπων (μοντέλων) που μελετά η Θεωρία των Πιθανοτήτων. Για την εισαγωγή της έννοιας αυτής ας θεωρήσουμε αρχικά δύο τυχαία πειράματα με δειγματικούς χώρους Ω_1 και Ω_2. Η διαδοχική (ή και ταυτόχρονη) εκτέλεση των δύο αυτών τυχαίων πειραμάτων ορίζει ένα (*διδιάστατο*) *σύνθετο τυχαίο πείραμα*. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το καρτεσιανό (ή συνδυαστικό) γινόμενο

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1,\omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\}\,.$$

Ένα διδιάστατο σύνθετο τυχαίο πείραμα το οποίο συνίσταται στη διαδοχική εκτέλεση ενός τυχαίου πειράματος με δειγματικό χώρο Ω καλείται ειδικότερα *ακολουθία δύο δοκιμών* του τυχαίου αυτού πειράματος. Στην ειδική αυτή περίπτωση, στην οποία $\Omega_1 = \Omega$ και $\Omega_2 = \Omega$, ο δειγματικός χώρος είναι το καρτεσιανό γινόμενο του Ω με τον εαυτό του,

$$\Omega^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \Omega,\ i = 1, 2\}.$$

Ας θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ (ως προς το δειγματικό χώρο Ω_i), $i = 1, 2$. Το ενδεχόμενο αυτό ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega_1 \times \Omega_2$, του συνθέτου πειράματος, εκφράζεται από το σύνολο $B_i \in\subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, $i = 1, 2$, όπου $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$. Τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 αναφέρονται ως ενδεχόμενα εξαρτώμενα από το πρώτο και δεύτερο τυχαίο πείραμα, αντίστοιχα. Ειδικότερα, στην περίπτωση που $\Omega_1 = \Omega$ και $\Omega_2 = \Omega$ τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 αναφέρονται ως ενδεχόμενα εξαρτώμενα από την πρώτη και δεύτερη δοκιμή του τυχαίου πειράματος, αντίστοιχα. Η πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου B_i εξαρτάται αποκλειστικά από το αποτέλεσμα του *i*-οστού πειράματος (ή της *i*-οστής δοκιμής), $i = 1, 2$. Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μεταφέρεται και σε τυχαία πειράματα και κατά συνέπεια και σε δοκιμές τυχαίου πειράματος. Συγκεκριμένα έχουμε:

Δύο τυχαία πειράματα με δειγματικούς χώρους Ω_1 και Ω_2 καλούνται ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(B_1 B_2) = P(B_1) P(B_2) \tag{9.1}$$

για κάθε $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$ ενδεχόμενα (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega_1 \times \Omega_2$) εξαρτώμενα από το πρώτο και δεύτερο τυχαίο πείραμα, αντίστοιχα.

Η σημασία των ανεξαρτήτων τυχαίων πειραμάτων και ειδικότερα των ανεξαρτήτων δοκιμών τυχαίου πειράματος, έγκειται κυρίως στο ότι δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή χρησίμων στοχαστικών προτύπων (μοντέλων). Στην περίπτωση αυτή δεν αρχίζει κάποιος ορίζοντας αξιωματικά την πιθανότητα $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ και μετά εξετάζοντας κατά πόσον ικανοποιείται η σχέση (9.1) διαπιστώνει την ανεξαρτησία των τυχαίων πειραμάτων (ή των δοκιμών του τυχαίου πειράματος). Αντίθετα μάλιστα, ορίζονται πρώτα οι πιθανότητες $P_i(A_i)$ για κάθε ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ $i = 1, 2$ και μετά υποθέτοντας ότι τα τυχαία πειράματα είναι ανεξάρτητα ορίζεται η πιθανότητα $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (9.1). Σημειώνουμε ότι, από πρακτική άποψη, η υπόθεση της ανεξαρτησίας των τυχαίων πειραμάτων διατυπώνεται μετά την εξέταση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται και σύμφωνα με τα αποτελέσματα σειράς παρατηρήσεων.

Ο ορισμός της πιθανότητας $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ μέσω των πιθανοτήτων $P_i(A_i)$ για κάθε ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ $i = 1, 2$, στην περίπτωση που υποθέτουμε ότι τα τυχαία πειράματα είναι ανεξάρτητα, επιτυγχάνεται ως εξής: Αρχικά, χρησιμοποιώντας την (9.1), ορίζεται η πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{(\omega_1, \omega_2)\}$ του δειγματικού χώρου $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\}) P_2(\{\omega_2\}).$$

Η πιθανότητα $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, ορίζεται τότε, μέσω της πιθανότητας των στοιχειωδών ενδεχομένων, από τη σχέση

$$P(B) = \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in B} P(\{(\omega_1,\omega_2)\}).$$

Παρατηρούμε ότι αν $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$, τότε

$$P(B_1) = P_1(A_1),\ P(B_2) = P_2(A_2).$$

Επίσης

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$$

και έτσι

$$P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2).$$

Οι ανωτέρω έννοιες και συμπεράσματα επεκτείνονται, χωρίς καμμιά περαιτέρω δυσκολία, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό ν τυχαίων πειραμάτων (ή δοκιμών τυχαίου πειράματος).

Παράδειγμα 9.1. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία 5 ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε 2 τουλάχιστο ρίψεις ο αριθμός που εμφανίζει ο δεύτερος κύβος υπερβαίνει τον αριθμό που εμφανίζει ο πρώτος κύβος.

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων με δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{(i,j):\ i = 1,2,\ldots,6,\ j = 1,2,\ldots,6\},$$

ο οποίος περιλαμβάνει $N(\Omega) = 6^2 = 36$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία. Το ενδεχόμενο A όπως ο αριθμός που εμφανίζει ο δεύτερος κύβος υπερβαίνει τον αριθμό που εμφανίζει ο πρώτος κύβος,

$$A = \{(i,j):\ j = i+1, i+2,\ldots,6,\ i = 1,2,\ldots,6\},$$

περιλαμβάνει $N(A) = 15$ δειγματικά σημεία. Χαρακτηρίζοντας ως επιτυχία ε το ενδεχόμενο A και ως αποτυχία α το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A', ο δειγματικός χώρος Ω δύναται να παρασταθεί ως $\Omega_1 = \{\alpha, \varepsilon\}$. Τότε

$$p = P_i(\{\varepsilon\}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12},\ q = P_i(\{\alpha\}) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Περαιτέρω, ο δειγματικός χώρος του τυχαίου πειράματος μιας ακολουθίας 5 ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων είναι το

$$\Omega_5 = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5): \omega_i \in \{\alpha,\varepsilon\},\ i = 1,2,3,4,5\}.$$

Το ενδεχόμενο B πραγματοποίησης κ επιτυχιών σε 5 ρίψεις (δοκιμές):

$$B = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5): \omega_i = \varepsilon \text{ για } \kappa \text{ ακριβώς δείκτες } i \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

περιλαμβάνει

$$\binom{5}{\kappa}$$

δειγματικά σημεία, όσα και ο αριθμός των επιλογών των κ θέσεων για τις επιτυχίες από τις 5 συνολικά θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο δειγματικό σημείο, το οποίο περιλαμβάνει σε κ θέσεις το ε και σε $5-\kappa$ θέσεις το α, έχει πιθανότητα

$$P(\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\})P_3(\{\omega_3\})P_4(\{\omega_4\})P_5(\{\omega_5\})$$
$$= \left(\frac{5}{12}\right)^{\kappa}\left(\frac{7}{12}\right)^{5-\kappa}.$$

Επομένως η πιθανότητα $p_\kappa = P(B)$ δίδεται από την

$$p_\kappa = \binom{5}{\kappa}\left(\frac{5}{12}\right)^{\kappa}\left(\frac{7}{12}\right)^{5-\kappa}, \ \kappa = 0,1,\ldots,5.$$

Η πιθανότητα όπως σε 2 τουλάχιστο ρίψεις ο αριθμός που εμφανίζει ο δεύτερος κύβος υπερβαίνει τον αριθμό που εμφανίζει ο πρώτος κύβος, έστω Q_2, η οποία είναι ίση με την πιθανότητα 2 τουλάχιστο επιτυχιών, είναι ίση με

$$Q_2 = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^5 - 5\frac{5}{12}\left(\frac{7}{12}\right)^4 = 1 - 0{,}0675 - 0{,}2412 = 0{,}6913.$$

Παράδειγμα 9.2. *Νόμος κληρονομικότητας του Mendel.* Η κληρονομικότητα χαρακτηριστικών οφείλεται σε ειδικούς φορείς καλουμένους γονίδια. Τα κύτταρα ενός οργανισμού, με εξαίρεση τους γαμέτες που είναι τα κύτταρα αναπαραγωγής (σπέρμα ή ωάριο), φέρουν γονίδια κατά ζεύγη τα οποία είναι είτε του τύπου A είτε του τύπου α. Έτσι ανάλογα με τα ζεύγη των γονιδίων που φέρουν τα κύτταρα κάθε οργανισμός ανήκει σε ένα από τους τρεις γονότυπους AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ (δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των $A\alpha$ και αA). Οι γαμέτες φέρουν ένα μόνο γονίδιο που στην περίπτωση των γονοτύπων AA και $\alpha\alpha$ είναι του τύπου A και α, αντίστοιχα, ενώ στην περίπτωση του γονοτύπου $A\alpha$ είναι εξίσου πιθανόν να είναι του τύπου A ή του τύπου α. Τα παιδιά κληρονομούν από τους γονείς τους τα γονίδια ένα από τον καθένα. Έστω ότι οι γονότυποι AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ εμφανίζονται σε ποσοστά p, $2q$ και r, αντίστοιχα, με $p + 2q + r = 1$ ανεξάρτητα φύλου.

Οι πιθανότητες των τριών γονοτύπων AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ για οποιονδήποτε απόγονο γονέων που εκλέγονται τυχαία δύνανται να υπολογισθούν ως εξής: Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 όπως ένα αρσενικό άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον αρχικό πληθυσμό είναι του γονοτύπου AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$, αντίστοιχα και τα ενδεχόμενα B_1, B_2 και B_3 όπως ένα θηλυκό άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον αρχικό πληθυσμό είναι του γονοτύπου AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$, αντίστοιχα. Επίσης ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A και B όπως ένας απόγονος ζευγαρώματος δύο ατόμων (αρσενικού και θηλυκού) του αρχικού πληθυσμού κληρονομήσει το γονίδιο A από τον πατέρα και τη μητέρα, αντίστοιχα. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) = p \cdot 1 + 2q\frac{1}{2} = p + q$$

και

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - (p+q) = q + r,$$

εφ' όσον $p + 2q + r = 1$. Ομοίως

$$P(B) = p + q, \ P(B') = q + r.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα και τα ενδεχόμενα Γ_1, Γ_2 και Γ_3 όπως ένας απόγονος ζευγαρώματος δύο ατόμων (αρσενικού και θηλυκού) του αρχικού πληθυσμού είναι του γονοτύπου *AA*, *Aα* και *αα*, αντίστοιχα. Τότε $\Gamma_1 = AB$, $\Gamma_2 = AB' + A'B$ και $\Gamma_3 = A'B'$. Τα ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα, οπότε τόσο τα ενδεχόμενα *A* και B' όσο και τα ενδεχόμενα A' και *B* και τα ενδεχόμενα A' και B' είναι ανεξάρτητα (βλ. Παρατήρηση 8.1). Επομένως

$$P(\Gamma_1) = P(AB) = P(A)P(B) = (p+q)^2,$$

$$P(\Gamma_2) = P(AB' + A'B) = P(AB') + P(A'B)$$

$$= P(A)P(B') + P(A')P(B) = 2(p+q)(q+r),$$

$$P(\Gamma_3) = P(A'B') = P(A')P(B') = (q+r)^2.$$

Παράδειγμα 9.3. *Κληρονομικότητα χαρακτηριστικών συνδεομένων με το φύλο.* Τα γονίδια κείνται στα χρωματοσώματα. Τα χρωματοσώματα εμφανίζονται κατά ζεύγη και μεταβιβάζονται ως (αδιαίρετες) μονάδες έτσι ώστε τα γονίδια ενός χρωματοσώματος να παραμένουν μαζί. Ο νόμος κληρονομικότητας των γονιδίων εφαρμόζεται και στα χρωματοσώματα ως μονάδες. Το φύλο καθορίζεται από δύο χρωματοσώματα *X* και *Y* και κάθε άτομο φέρει ένα ζεύγος τέτοιων χρωματοσωμάτων. Τα αρσενικά φέρουν το ζεύγος *XY* και θηλυκά το ζεύγος *XX*. Έτσι η μητέρα μεταβιβάζει ένα *X* χρωματόσωμα και το φύλο ενός απογόνου καθορίζεται από το χρωματόσωμα *X* ή *Y* που μεταβιβάζει ο πατέρας.

Τα γονίδια που κείνται στο χρωματόσωμα *X* δεν έχουν αντίστοιχο γονίδιο στο χρωματόσωμα *Y*. Έτσι τα θηλυκά, τα οποία έχουν δύο χρωματοσώματα *X*, έχουν δύο τέτοια γονίδια ενώ στα αρσενικά, τα οποία έχουν ένα χρωματόσωμα *X*, τέτοια γονίδια εμφανίζονται ως μονά. Τα γονίδια που προκαλούν την αχρωματοψία, όπως και τα γονίδια που προκαλούν την αιμοφιλία, αποτελούν χαρακτηριστικά παρα-δείγματα γονιδίων κειμένων στο χρωματόσωμα *X*. Έστω *C* ο δεσπόζων και *c* ο υποχωρητικός τύπος του γονιδίου της αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας). Τα θηλυκά ανήκουν σε ένα από τους τρεις γονοτύπους *CC*, *Cc* και *cc*, ενώ τα αρσενικά σε ένα από τους δύο γονοτύπους *C* και *c*. Ένα θηλυκό του γονότυπου *CC* δεν παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία), του γονοτύπου *Cc* είναι φορέας αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας) και γονοτύπου *cc* παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία). Επίσης, ένα αρσενικό του γονότυπου *C* δεν παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία), και του γονοτύπου *c* παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία).

Έστω *p* το ποσοστό του δεσπόζοντος τύπου *C* και $q = 1 - p$ το ποσοστό του υποχωρητικού τύπου *c* του γονιδίου της αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας), τόσο στα αρσενικά όσο και στα θηλυκά άτομα. Τότε η πιθανότητα ένας άνδρας να μη παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία) είναι ίση με *p* ενώ να παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία) είναι ίση με $q = 1 - p$. Οι πιθανότητες *u*, *2v* και *w* των τριών γονοτύπων *CC*, *Cc* και *cc* του γονιδίου της αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας) στο γυναικείο πληθυσμό, αντίστοιχα, δύνανται να υπολογισθούν ως εξής: Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A_1 και A_2 όπως ένα άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον υποπληθυσμό των αρσενικών είναι του γονοτύπου *C* και *c*, αντίστοιχα και τα ενδεχόμενα B_1, B_2 και B_3 όπως ένα άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον υποπληθυσμό των θηλυκών είναι του γονοτύπου *CC*, *Cc* και *cc*, αντίστοιχα. Επίσης ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα *A* και *B* όπως ένας θηλυκός απόγονος ζευγαρώματος δύο ατόμων (αρσενικού και θηλυκού) του αρχικού πληθυσμού κληρονομήσει το γονίδιο C από τον πατέρα και τη μητέρα, αντίστοιχα. Τότε

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) = p \cdot 1 = p$$

και

$$P(A') = 1 - P(A) = q\ .$$

Επίσης, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(B) = P(B_1)P(B \mid B_1) + P(B_2)P(B \mid B_2) = u \cdot 1 + 2v\frac{1}{2} = u + v$$

και

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - (u + v) = v + w,$$

εφ' όσον $u + 2v + w = 1$. Παρατηρούμε ότι $B_1 = AB$, $B_2 = AB' + A'B$ και $B_3 = A'B'$. Επίσης τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, οπότε τόσο τα ενδεχόμενα A και B' όσο και τα ενδεχόμενα A' και B και τα ενδεχόμενα A' και B' είναι ανεξάρτητα. Επομένως

$$\begin{aligned} u &= P(B_1) = P(AB) = P(A)P(B) = p(u+v), \\ 2v &= P(B_2) = P(AB' + A'B) = P(AB') + P(A'B) \\ &= P(A)P(B') + P(A')P(B) = p(v+w) + q(u+v), \\ w &= P(B_3) = P(A'B') = P(A')P(B') = q(v+w). \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες σχέσεις, χρησιμοποιώντας το ότι $q = 1 - p$ και $v + w = 1 - (u + v)$, μετασχηματίζονται στις

$$qu = pv\ ,\ (2p-1)u + (2p+1)v = p$$

και έτσι

$$u = p^2\ ,\ v = pq\ ,\ w = q^2\ .$$

Ας σημειωθεί ότι η πιθανότητα w όπως μια γυναίκα παρουσιάζει αχρωματοψία είναι ίση με το τετράγωνο πιθανότητας q όπως ένας άνδρας παρουσιάζει αχρωματοψία.

10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η σειρά εξέτασης τεσσάρων μαθημάτων α, β, γ και δ καθορίζεται με κλήρωση για την αποφυγή διαμαρτυριών είτε από τους εξεταζόμενους είτε από τους επιτηρητές. Να ορισθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για την περιγραφή του τυχαίου αυτού πειράματος. Έστω ότι A είναι το ενδεχόμενο το μάθημα α να εξετασθεί πρώτο και B το ενδεχόμενο το μάθημα β να εξετασθεί δεύτερο. Να καταχωρηθούν τα δειγματικά σημεία των ενδεχομένων $A, B, A \cup B$ και $A \cap B$.

2. Κατά την τυχαία εκλογή μιας οικογένειας 4 παιδιών ενδιαφερόμαστε για τα ενδεχόμενα: A όπως ο αριθμός των αγοριών ισούται με τον αριθμό των κοριτσιών, B όπως αγόρια και κορίτσια εναλλάσσονται (αναφορικά με τη σειρά γέννησης) και Γ όπως τρία παιδιά του ιδίου φύλου γεννούνται διαδοχικά. Ποιος είναι ο καταλληλότερος δειγματικός χώρος Ω που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και ποια τα δειγματικά σημεία που ανήκουν σε κάθε ένα από τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν.

3. Έστω ότι δύο παίκτες α και β αγωνίζονται σε μια σειρά παιγνιδιών (π.χ. σκάκι, τάβλι, τένις) και νικητής αναδεικνύεται εκείνος που πρώτος κερδίζει τρία παιγνίδια. Να ορισθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω για την περιγραφή του τυχαίου αυτού πειράματος. Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A και B όπως ο παίκτης α αναδειχθεί νικητής στο τρίτο και στο τέταρτο παιγνίδι της σειράς, αντιστοχα. Να καταχωρηθούν τα δειγματικά σημεία των ενδεχομένων A, B, $A \cup B$ και $A \cap B$.

4. Έστω ότι ένας αριθμός τηλεφώνου εκλέγεται τυχαία από τον τηλεφωνικό κατάλογο. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως και τα τέσσερα τελευταία ψηφία του είναι διαφορετικά.

5. *Αποβιβάσεις ανελκυστήρα.* Έστω ότι ανελκυστήρας πενταόροφης οικοδομής ξεκινά από το ισόγειο με τέσσερα άτομα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες αποβίβασης (α) και των τεσσάρων ατόμων σε διαφορετικό όροφο, (β) δύο ατόμων στον τρίτο όροφο, ενός ατόμου στον τέταρτο όροφο και ενός ατόμου στον πέμπτο όροφο και (γ) δύο ατόμων στον τρίτο όροφο.

6. *Διάδοση ψιθύρων.* Σε μια πόλη $\nu+1$ κατοίκων ένα άτομο μεταδίδει ένα κουτσομπολιό σε ένα δεύτερο άτομο, το οποίο το μεταδίδει σε ένα τρίτο κ.ο.κ. Κάθε άτομο στο οποίο μεταδίδεται το κουτσομπολιό εκλέγεται από το ψιθυριστή τυχαία μεταξύ των ν κατοίκων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να μεταδοθεί το κουτσομπολιό χωρίς (α) να επιστρέψει στον πρώτο ψιθυριστή και (β) να επαναληφθεί σε οποιοδήποτε άτομο.

7. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο $\kappa+1$ ατόμων $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το άτομο α_0 έχει γενέθλια την ίδια μέρα με ένα τουλάχιστο από τα υπόλοιπα κ άτομα $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$.

8. Έστω ότι μέσα σε ν διακεκριμένα κελιά $\{c_1, c_2, ..., c_\nu\}$ τοποθετούνται τυχαία το ένα μετά το άλλο σφαιρίδια. Αν η διαδικασία αυτή σταματά (α) όταν τοποθετηθεί ένα σφαιρίδιο στο κελί c_ν και (β) όταν σε ένα οποιοδήποτε κελί τοποθετηθούν δύο σφαιρίδια, να υπολογισθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες όπως απαιτηθούν περισσότερες από κ δοκιμές.

9. *Το πρόβλημα του Γαλιλαίου.* Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης τριών κύβων και τα ενδεχόμενα A και B όπως το άθροισμα των ενδείξεων τούτων είναι 9 10 αντίστοιχα. Ένας παρατηρητικός φίλος του Γαλιλαίου διέκρινε ότι η συχνότητα εμφάνισης του ενδεχοένου A είναι μικρότερη από εκείνη του B. Τούτο δεν μπορούσε να εξηγήσει σκεπτόμενος ότι καθ΄ένα από τα ενδεχόμενα αυτά περιέχει 6 σημεία:

$$1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3=9,$$

$$1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4=10.$$

Ο Γαλιλαίος στον οποίο απευθύνθηκε μετά από προσεκτική ανάλυση υπολόγισε ορθά τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ απ' όπου προέκυψε ότι $P(A) < P(B)$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

10. Από τα ν κλειδιά που έχει κάποιος μόνο ένα ανοίγει την πόρτα του σπιτιού του. Επειδή δεν θυμάται ποιο είναι το σωστό κλειδί, δοκιμάζει ένα-ένα τα κλειδιά μέχρι να ανοίξει την πόρτα. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να απαιτηθούν κ δοκιμές, $\kappa = 1, 2..., \nu$.

11. Έστω ότι τρία σφαιρίδια εξάγονται τυχαία το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, από μια κληρωτίδα που περιέχει ν σφαιρίδια αριθμημένα από το ένα μέχρι το ν. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) του ενδεχομένου A όπως ο αριθμός του πρώτου σφαιριδίου είναι μικρότερος από εκείνο του δευτέρου και (β) του ενδεχομένου B όπως όπως ο αριθμός του πρώτου σφαιριδίου είναι μικρότερος από εκείνο του δευτέρου και ο αριθμός του δευτέρου σφαιριδίου είναι μικρότερος από εκείνο του τρίτου.

12. Ας θεωρήσουμε ένα τραπέζι το οποίο είναι χωρισμένο σε ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς α. Ένα νόμισμα διαμέτρου r με $r < \alpha$ τοποθετείται τυχαία στο τραπέζι. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το νόμισμα κείται στο εσωτερικό τριγώνου.

13. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού πειράματος. Αν $P(\{\omega_i\}) = 2P(\{\omega_{i+1}\})$, $i = 1, 2, ..., \nu - 1$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων $P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, ..., \nu$. Επιπλέον να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}$, $\kappa \le \nu$.

14. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος και $A \subseteq \Omega$, ένα ενδεχόμενο σ'αυτόν. Αν A' είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου A και ισχύει $P(A') = 2P(A) + 1/5$ να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A)$.

15. (*Συνέχεια*). Αν $3P(A') = 4P(A)$, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A)$.

16. (*Συνέχεια*). Αν $0 < P(A) < 1$, να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \ge 4$.

17. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία τριών ρίψεων ενός κύβου και έστω A το ενδεχόμενο όπως το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο του 10. Δείξετε ότι το ενδεχόμενο A και το συμπληρωματικό του ενδεχόμενο A' είναι ισοδύναμα σύνολα και χρησιμοποιώντας το ότι $N(A) = N(A')$ συμπεράνετε την πιθανότητα $P(A)$.

18. Ας θεωρήσουμε το δειγματικό χώρο Ω ενός στοχαστικού πειράματος και έστω $A, B \subseteq \Omega$ ενδεχόμενα με

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB), \; P(B - A) = 1/2.$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(AB)$ και στη συνέχεια οι πιθανότητες $P(A - B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup B')$, $P(AB' \cup A'B)$.

19. Αν $P(A) = 3/4$, $P(B) = 2/3$ και $P(AB) = 3/5$ να υπολογισθούν οι πιθανότητες: $P(A - B)$, $P(A \cup B)$ και $P(A'B')$.

20. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα 5 διαδοχικών ρίψεων δύο διακεκριμένων κύβων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως κάθε ένα από τα ζεύγη $(5,6)$ $(6,5)$ και $(6,6)$ εμφανισθεί μία τουλάχιστο φορά.

21. Ας θεωρήσουμε ένα πομπό ο οποίος εκπέμπει με την ίδια αναλογία τα σήματα σ_1, σ_2 και σ_3. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες όπως σε 5 εκπομπές παρατηρηθούν μια τουλάχιστον φορά το καθένα (α) τα σήματα σ_1 και σ_2 και (β) και τα τρία σήματα σ_1, σ_2 και σ_3.

22. Από μια κάλπη που περιέχει ν άσπρα και ν μαύρα σφαιρίδια εξάγονται διαδοχικά και χωρίς επανάθεση δύο σφαιρίδια κάθε φορά μέχρι να εξαχθούν όλα τα σφαιρίδια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως όλα τα ζευγάρια αποτελούνται από ένα άσπρο και ένα μαύρο σφαιρίδιο.

23. Οι εταιρείες ασφάλισης αυτοκινήτων κατατάσσουν τους οδηγούς σε 10 κατηγορίες ανάλογα με την πιθανότητα που έχουν να προκαλέσουν δυστύχημα. Έστω ότι η πιθανότητα όπως ένας οδηγός της κατηγορίας κ έχει σε ένα δωδεκάμηνο ένα τουλάχιστο δυστύχημα είναι $\kappa/100$, $\kappa = 1,2,...,10$. Ας θεωρήσουμε μία ασφαλιστική εταιρεία στην οποία τα $\kappa/55$ των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην κ κατηγορία $\kappa = 1,2,...,10$. Αν ένας οδηγός ασφαλισμένος στην εταιρεία αυτή αναφέρει ένα τουλάχιστο δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο ποιά είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κ κατηγορία, $\kappa = 1,2,...,10$;

24. Έστω ότι το ποσοστό των γυναικών μιας ορισμένης περιοχής που πάσχουν από καρκίνο της μήτρας είναι 0,001. Το τεστ Παπανικολάου κάνει ορθή διάγνωση της ασθένειας με πιθανότητα 0,97. Δεδομένου ότι το τεστ για μια γυναίκα είναι θετικό ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει πραγματικά από καρκίνο;

25. Έστω ότι 7% των ανδρών και 2% των γυναικών πάσχουν από αχρωματοψία. Αν το 48% του πληθυσμού αυτού είναι άνδρες και το 52% είναι γυναίκες να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως ένα άτομο που εκλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό να έχει αχρωματοψία.

26. Έστω ότι το 50% των γυναικών έχουν το γονίδιο της αιμοφιλίας. Αν μία γυναίκα έχει το γονίδιο η πιθανότητα να το κληρονομήσει στο παιδί της είναι 1/2. Να δειχθεί ότι η πιθανότητα μια γυναίκα να έχει το γονίδιο της αιμοφιλίας δεδομένου ότι απέκτησε υγιή γιό ελαττώνεται κατά 1/3.

27. Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη διαδρομή η πιθανότητα όπως οποιοδήποτε φανάρι της τροχαίας να είναι του ιδίου χρώματος με το προηγούμενο είναι 4/5. Αν το πρώτο φανάρι είναι πράσινο με πιθανότητα 3/5 και κόκκινο με πιθανότητα 2/5 να υπολογισθεί η πιθανότητα το τρίτο φανάρι να είναι πράσινο.

28. Από μια κληρωτίδα που περιέχει 21 σφαιρίδια φέροντα τους αριθμούς $\{1,2,...,21\}$ εξάγονται διαδοχικά και χωρίς επανάθεση τρία σφαιρίδια. Αν A_κ είναι το ενδεχόμενο εξαγωγής αριθμού πολλαπλασίου του 3 στην κ-οστή εξαγωγή, $\kappa = 1,2,3$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A_2')$, $P(A_1 \mid A_2)$ και $P(A_3)$.

29. Ας θεωρήσουμε ένα τηλεπικοινωνικό σύστημα αποτελούμενο από έναν πομπό, κ αναμεταδότες και ένα δέκτη. Ο πομπός στέλλει τα σήματα στο δυαδικό σύστημα, στο οποίο τα γράμματα του αλφαβήτου είναι ακολουθίες από 0 και 1. Οι αναμεταδότες και ο δέκτης, λόγω θορύβου, λαμβάνουν το σήμα 0 ως σήμα 1 με πιθανότητα 0,03 και το σήμα 1 ως σήμα 0 με πιθανότητα 0,05. Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες λήψης από το δέκτη (α) του σήματος 0 και (β) του σήματος 1 δεδομένης, σε αμφότερες τις περιπτώσεις, της αποστολής από τον πομπό του σήματος 1.

30. Ας θεωρήσουμε έναν πομπό ο οποίος εκπέμπει τα σήματα 0 και 1 σε αναλογία 2 προς 3. Ένας δέκτης των σημάτων αυτών λαμβάνει λανθασμένο σήμα σε 3% των περιπτώσεων και ένας δεύτερος δέκτης σε 4% των περιπτώσεων. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) ο πρώτος δέκτης να λάβει το σήμα 0 και (β) ο δεύτερος δέκτης να λάβει το σήμα 1. (γ) Αν ο πρώτος δέκτης λάβει το σήμα 0 και ο δεύτερος δέκτης το σήμα 1, ποιόν από τους δέκτες πρέπει να εμπιστευθούμε; (δ) Αν ο πρώτος δέκτης λάβει το σήμα 1 και ο δεύτερος δέκτης το σήμα 0, ποιόν από τους δέκτες πρέπει να εμπιστευθούμε;

31. Έστω ότι ένα μόριο δύναται να χωρισθεί σε 0 ή 1 ή 2 μόρια με πιθανότητες 1/4, 1/2 και 1/4, αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε τα σύνολα των μορίων της πρώτης και της δεύτερης γενιάς προερχόμενα από το αρχικό μόριο, του προγεννήτορα. Αν A_κ είναι το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των μορίων της πρώτης γενιάς είναι *κ*, $\kappa = 0,1,2$ και B_r είναι το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των μορίων της δεύτερης γενιάς είναι *r*, $r = 0,1,\ldots,6$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(B_0)$, $P(B_1)$ και $P(A_2 \mid B_1)$.

32. Έστω ότι το ποσοστό των ατόμων μιας ορισμένης περιοχής που πάσχουν από μία σοβαρή ασθένεια είναι 0,01. Ένα άτομο υποβάλλεται σε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους τέστ καθένα από τα οποία κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0,95. Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες να πάσχει το άτομο (α) δεδομένου ότι ένα τουλάχιστο τέστ είναι θετικό και (β) δεδομένου ότι και τα δύο τέστ είναι θετικά.

33. Δύο σκοπευτές *α* και *β* ρίχνουν από μία βολή κατά στόχου. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής από τον *α* είναι 0,8 ενώ από τον *β* είναι 0,6. Αν μια από τις δύο σφαίρες κτυπήσει το στόχο, να υπολογισθεί η πιθανότητα να ανήκει στον *α*.

34. Στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος δύο φορές ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα όπως εμφανισθεί *Α*: η ένδειξη κεφαλή μια τουλάχιστο φορά, *Β*: στην πρώτη ρίψη η ένδειξη γράμματα και *Γ*: σε κάθε ρίψη διαφορετική ένδειξη. Υπολογίζοντας τις σχετικές πιθανότητες, δείξετε ότι

$$P(B \mid A) < P(B)\,,\ P(\Gamma \mid A) > P(\Gamma)\,,\ P(\Gamma \mid B) = P(\Gamma)\,.$$

35. Έστω ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι ανεξάρτητα. Δείξετε ότι τα ενδεχόμενα (α) A_1 και $A_2 \cup A_3$, (β) A_2 και $A_1 \cup A_3$ και (γ) A_3 και $A_1 \cup A_2$ είναι ανεξάρτητα.

36. Αν $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ και $P(A \cup B) = 2/3$ να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα *Α* και *Β* είναι ανεξάρτητα. Ομοίως αν $P(A) = 1/2$ $P(B) = 1/5$ και $P(A'B') = 3/5$.

37. Έστω ότι ένα νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά *κ* φορές. Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο *Α* εμφάνισης και των δύο όψεων του νομίσματος και το ενδεχόμενο *Β* εμφάνισης μια το πολύ φορά της όψης κεφαλή. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα *Α* και *Β* είναι ανεξάρτητα.

38. Έστω ότι από μια κληρωτίδα που περιέχει 6 σφαιρίδια $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ εξάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο χωρίς επανάθεση όλα τα σφαιρίδια. Επίσης, έστω A_1 το ενδεχόμενο εξαγωγής του σφαιριδίου σ_1 πριν από την εξαγωγή του σφαιριδίου σ_2, A_2 το ενδεχόμενο εξαγωγής του σφαιριδίου σ_3 πριν από την εξαγωγή του σφαιριδίου σ_4 και A_3 το ενδεχόμενο εξαγωγής του σφαιριδίου σ_5 πριν από την εξαγωγή του σφαιριδίου σ_6. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2 και A_3 είναι ανεξάρτητα.

39. Ας θεωρήσουμε έναν αρχικό πληθυσμό στον οποίο οι γονότυποι *ΑΑ*, *Αα* και *αα* εμφανίζονται σε ποσοστά *p*, 2*q* και *r* αντίστοιχα με $p + 2q + r = 1$ ανεξάρτητα φύλου. Έστω ότι καθένας από τους γονείς (πατέρας και μητέρα) κληρονομεί, σύμφωνα με το *νόμο κληρονομικότητας του Mendel*, σε κάθε παιδί του ένα από τα γονίδια A και α. Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα ο πατέρας να είναι του τύπου $A\alpha$ δεδομένου ότι το παιδί είναι του τύπου AA.

40. Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό στον οποίο ο λόγος του αριθμού των ανδρών προς τον αριθμό των γυναικών είναι θ. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ένας άνδρας να παρουσιάζει αχρωματοψία είναι q, ενώ η πιθανότητα μια γυναίκα να παρουσιάζει αχρωματοψία είναι q^2 (βλ. Παράδειγμα 9.3). Έστω ότι ένα άτομο εκλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων όπως το εκλεγόμενο άτομο (α) είναι γυναίκα παρουσιάζουσα αχρωματοψία και (β) παρουσιάζει αχρωματοψία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Τα δειγματικά σημεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα) ενός δειγματικού χώρου στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) δύνανται να είναι αριθμοί, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που εκφράζουν ποσοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος, ή συμβολικές εκφράσεις με γράμματα του αλφαβήτου, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση που περιγράφουν ποιοτικό χαρακτηριστικό του στοχαστικού πειράματος. Οι περιπτώσεις αυτές αντιμετωπίζονται ενιαία με την αντιστοίχηση σε κάθε δειγματικό σημείο ενός πραγματικού αριθμού. Επιπλέον, σε ένα στοχαστικό (τυχαίο) πείραμα (ή φαινόμενο) το ενδιαφέρον και από πρακτική άποψη εστιάζεται στην πραγματοποίηση ή μη αριθμητικών μεγεθών τα οποία αντιστοιχούν σε δειγματικά σημεία. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1. *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Μια πραγματική συνάρτηση X που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.). Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ έναν πραγματικό αριθμό $x = X(\omega)$.*

Σημειώνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με τα κεφαλαία γράμματα χωρίς δείκτες X, Y, Z, W ή με δείκτες $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και οι τιμές τους με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα x, y, z, w ή $x_1, x_2, ..., x_\kappa$.

Το σύνολο $R_X \subseteq R$ των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X αποτελεί το νέο δειγματικό χώρο του στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου). Το διάστημα $(-\infty, x]$ είναι βασικό ενδεχόμενο στο νέο αυτόν δειγματικό χώρο. Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο $B \subseteq R_X$ δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει του διαστήματος αυτού. Είναι επομένως χρήσιμη η εισαγωγή της ακόλουθης συνάρτησης.

Ορισμός 1.2. *Η συνάρτηση*

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \ -\infty < x < \infty$$

καλείται συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) ή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X συμβολίζεται με F_X και η τιμή της στο x με $F_X(x)$.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής, ως πιθανότητα, λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1, \ -\infty < x < \infty.$$

Επίσης είναι αύξουσα συνάρτηση,

$$F(x_1) \le F(x_2), \; -\infty < x_1 < x_2 < \infty,$$

εφ' όσον $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x_1\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x_2\}$ και

$$F(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; F(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

εφ' όσον $\lim_{x \to -\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \varnothing$, $\lim_{x \to +\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \Omega$.

Η πιθανότητα όπως μια τυχαία μεταβλητή βρίσκεται σε συγκεκριμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών δύναται να εκφρασθεί συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής της. Σχετικά αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1. *Έστω F η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Τότε*

$$P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{1.2}$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$.

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : \alpha < X \le \beta\}$ δύναται να εκφρασθεί ως διαφορά δύο ενδεχομένων ως εξής:

$$\{\omega \in \Omega : \alpha < X \le \beta\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \beta\} - \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \alpha\}$$

με $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \alpha\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le \beta\}$, εφ' όσον $\alpha < \beta$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την (6.5) του Κεφ. 1, συνάγουμε, σύμφωνα με τη (2.1), τη σχέση (2.2).

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους νομίσματος. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\},$$

όπου σημειώνεται με *κ* η όψη κεφαλή και με *γ* η όψη γράμματα. Η συνάρτηση

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = (\kappa,\kappa) \\ 1, & \omega \in \{(\gamma,\kappa), \; (\kappa,\gamma)\} \\ 2, & \omega = (\gamma,\gamma) \end{cases}$$

η οποία ορίζεται στο δειγματικό χώρο *Ω* και παίρνει τιμές στο σύνολο

$$R_X = \{0,1,2\}$$

είναι τυχαία μεταβλητή και εκφράζει τον αριθμό εμφανίσεων της όψης γράμματα.

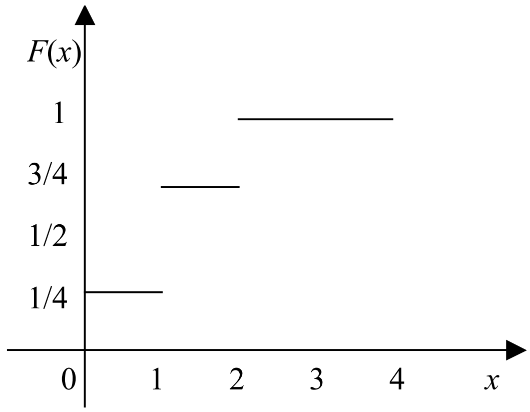
Η συνάρτηση κατανομής *F* της τ.μ. *X* υπολογίζεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \begin{cases} \varnothing \;, & -\infty < x < 0 \\ \{0\} \;, & 0 \le x < 1 \\ \{0,1\}, & 1 \le x < 2 \\ \Omega \;, & 2 \le x < \infty \end{cases}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό 1.2,

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 \;, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 3/4, & 1 \le x < 2 \\ 1 \;, & 2 \le x < \infty. \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ δίδεται στο Σχήμα 1.1. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι σκαλωτή συνάρτηση με άλματα στα σημεία $x = 0,1,2$ μεγέθους 1/4, 1/2, 1/4 αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$.

Παράδειγμα 1.2. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου. Καταγράφοντας την ένδειξη της επάνω έδρας του κύβου ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης (η ένδειξη της επάνω έδρας) του κύβου.

Η ταυτοτική αυτή συνάρτηση

$$X(\omega) = \omega\,,\ \omega \in \Omega$$

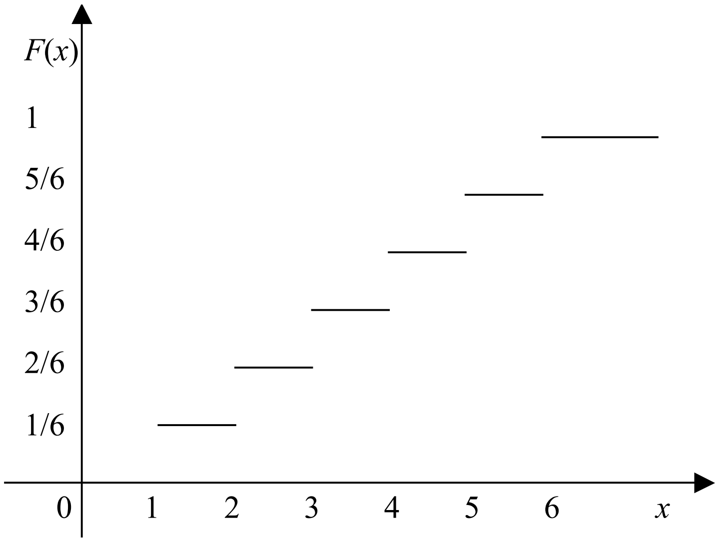
είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση κατανομής F της X υπολογίζεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \begin{cases} \varnothing, & -\infty < x < 1 \\ \{1\}, & 1 \le x < 2 \\ \{1,2\}, & 2 \le x < 3 \\ \{1,2,3\}, & 3 \le x < 4 \\ \{1,2,3,4\}, & 4 \le x < 5 \\ (1,2,3,4,5\}, & 5 \le x < 6 \\ \Omega, & 6 \le x < \infty \end{cases}$$

και σύμφωνα με τον ορισμό 1.2,

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1/6, & 1 \le x < 2 \\ 2/6, & 2 \le x < 3 \\ 3/6, & 3 \le x < 4 \\ 4/6, & 4 \le x < 5 \\ 5/6, & 5 \le x < 6 \\ 1, & 6 \le x < \infty \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ δίδεται στο Σχήμα 1.2. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι σκαλωτή συνάρτηση με άλματα στα σημεία $x = 1,2,3,4,5,6$ μεγέθους 1/6 το καθ' ένα.



Σχήμα 1.2. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$

Παράδειγμα 1.3. Ας θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή X με τιμές x στο διάστημα $[0,1]$ και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα $P(0 \le X \le 1) = 1$ κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0,1]$ (κατά το ανάλογο της ομοιόμορφης κατανομής της μάζας μιας ράβδου με άκρα τα σημεία 0 και 1). Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή η πιθανότητα η X να βρίσκεται στο διάστημα $(x_1, x_2]$ με $0 \le x_1 \le x_2 \le 1$ είναι ανάλογη του μήκους του: $P(x_1 < X \le x_2) = c(x_2 - x_1)$, όπου η c είναι η σταθερή αναλογίας. Επιπλέον έχουμε $P(-\infty < X < 0) = 0$, $P(1 < X < \infty) = 0$.

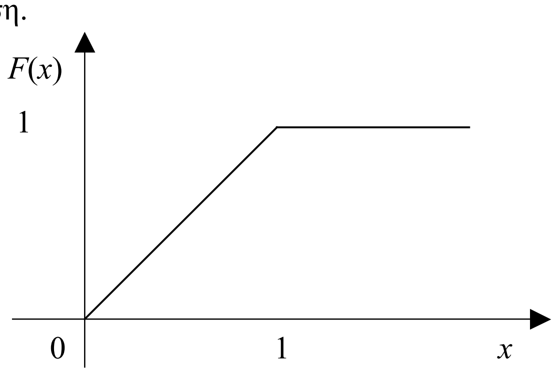
Η σταθερή c υπολογίζεται αν θέσουμε $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, οπότε

$$P(0 < X \le 1) = c$$

και επειδή $P(0 < X \le 1) = 1$ είναι $c = 1$. Η συνάρτηση κατανομής F της X είναι τότε η

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ δίδεται στο Σχήμα 1.3. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση.



Σχήμα 1.3. Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$

2. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Η μελέτη πολλών σημαντικών εννοιών που συνδέονται με τις τυχαίες μεταβλητές διευκολύνεται με το διαχωρισμό των δύο βασικών κατηγοριών: των διακριτών και των συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Σχετικά θέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 2.1. *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται διακριτή (ή απαριθμητή) αν παίρνει, με πιθανότητα 1, αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο) σύνολο τιμών* $R_X = \{x_0, x_1, ..., x_\nu, ...\}$. *Η συνάρτηση f η οποία σε κάθε σημείο* x_κ, $\kappa = 0,1,...$, *εκχωρεί την πιθανότητά του*

$$f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_\kappa\}),\ \kappa = 0,1,..., \quad (2.1)$$

καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X συμβολίζεται με f_X και η τιμή της στο x_κ με $f_X(x_\kappa)$. Σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την παράσταση $R_X = \{x_0\} + \{x_1\} + \cdots + \{x_\nu\} + \cdots$, η συνθήκη $P(X \in R_X)$ δύναται να γραφεί στη μορφή

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(X = x_\kappa) = 1.$$

Επίσης η συνάρτηση πιθανότητας, όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική

$$f(x_\kappa) \geq 0,\ \kappa = 0,1,... \text{ και } f(x) = 0,\ x \notin R_X \quad (2.2)$$

και

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = 1. \quad (2.3)$$

Στην περίπτωση που το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X είναι πεπερασμένο, $R_X = \{x_0, x_1, ..., x_\nu\}$, η σειρά (2.3) γίνεται ένα πεπερασμένο άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} f(x_\kappa) = 1.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,...$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής αυτής $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$. Συγκεκριμένα, στη μερική περίπτωση που $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, ισχύουν οι σχέσεις

$$F(x) = \sum_{\kappa=0}^{r} f(x_\kappa),\ x_r \leq x < x_{r+1},\ r = 0,1,..., \quad (2.4)$$

με $F(x) = 0$ για $-\infty < x < x_0$ και

$$f(x_\kappa) = F(x_\kappa) - F(x_{\kappa-1}),\ \kappa = 1,2,... \quad (2.5)$$

με $f(x_0) = F(x_0)$. Γενικότερα ισχύει η σχέση

$$F(x) = \sum_{x_\kappa \leq x} f(x_\kappa),\ -\infty < x < \infty, \quad (2.6)$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλα τα x_κ τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του *x*.

Ορισμός 2.2. *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση,*

$$f(x) \geq 0\,,\ -\infty < x < \infty\,, \tag{2.7}$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,, \tag{2.8}$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha < \beta$ *να ισχύει*

$$P(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,. \tag{2.9}$$

Η $f(x)$ *καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλώς συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X.*

Άμεση συνέπεια των ορισμών της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ και της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής *X* είναι η σχέση

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,,\ -\infty < x < \infty\,. \tag{2.10}$$

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο *x* τότε παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε την

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)\,. \tag{2.11}$$

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (2.10) και (2.11) είναι οι αντίστοιχες των (2.4) και (2.5) για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, σε αντίθεση με τη συνάρτηση πιθανότητας, δεν παριστάνει την πιθανότητα κάποιου ενδεχομένου. Η πιθανότητα $P(X = x_0) = 0$ και επομένως η $f(x_0)$ δεν παριστάνει βέβαια αυτή την πιθανότητα. Μόνον όταν η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται μεταξύ δύο σημείων, όπως στην (2.9), δίδει κάποια πιθανότητα. Κατά προσέγγιση για μικρό $h > 0$ έχουμε

$$P(x < X \leq x + h) \cong f(x)h\,.$$

Παράδειγμα 2.1. Ας επανέλθουμε στο τυχαίο πείραμα, του παραδείγματος 1.1, των δύο διαδοχικών ρίψεων ενός συνήθους κύβου. Ο αριθμός *X* των εμφανίσεων της όψης γράμματα είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή εφ’ όσον το σύνολο των τιμών της $R_X = \{0,1,2\}$ είναι διακριτό (απαριθμητό). Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. *X* υπολογίζεται ως εξής:

$$f(0) = P(X = 0) = P[(\kappa,\kappa)] = \frac{1}{4}\,,$$

$$f(1) = P(X = 1) = P[(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma)] = \frac{1}{2}\,,$$

$$f(2) = P(X = 2) = P[(\gamma,\gamma)] = \frac{1}{4}\,.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{2} f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές x στο διάστημα $[0,1]$ και ας υποθέσουμε ότι η συνολική πιθανότητα κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό (βλ. Παράδειγμα 1.3). Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της X.

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει υπολογισθεί στο Παράδειγμα 1.3 και είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας αυτή συνάγουμε, σύμφωνα με τη (2.10), τη συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0 \text{ ή } x > 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3. Έστω ότι ο χρόνος απορρόφησης ενός φαρμάκου μετρούμενος σε ώρες είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2},\ 0 \le x \le \theta,$$

όπου $\theta > 0$ είναι παράμετρος της κατανομής. Να υπολογισθούν η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, και οι πιθανότητες $P(\alpha < X \le \beta)$, $P(X > \alpha)$ με $\alpha < \beta \le \theta$.

Η συνάρτηση κατανομής για $0 \le x \le \theta$ είναι

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \frac{2}{\theta^2}\int_{0}^{x} (\theta - t)dt = -\left[\frac{(\theta - t)^2}{\theta^2}\right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{(\theta - x)^2}{\theta^2}.$$

Επίσης $F(x) = 0$, $-\infty < x < 0$ και $F(x) = 1$, $\theta \le x < \infty$.

Χρησιμοποιώντας την (1.2) και τη συνάρτηση κατανομής οι ζητούμενες πιθανότητες υπολογίζονται ως

$$P(\alpha < X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{(\theta - \alpha)^2 - (\theta - \beta)^2}{\theta^2}$$

και

$$P(X > \alpha) = 1 - P(X \le \alpha) = 1 - F(\alpha) = \frac{(\theta - \alpha)^2}{\theta^2}.$$

3. ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Στην πιθανοθεωρητική μελέτη ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου), όπως επίσης και στη στατιστική συμπερασματολογία, αναφύεται συχνά η ανάγκη προσδιορισμού της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$, η οποία είναι συνάρτηση μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής X με γνωστή κατανομή. Συνήθως το ενδιαφέρον αφορά την περίπτωση που τόσο η τυχαία μεταβλητή X όσο και η τυχαία μεταβλητή Y είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή ο προσδιορισμός της κατανομής της Y επιτυγχάνεται ευκολότερα με την εύρεση, αρχικά, της συνάρτησης κατανομής. Η συνάρτηση πυκνότητας της Y προσδιορίζεται με παραγώγιση της συνάρτησης κατανομής. Η έκφραση της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$,

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P[g(X) \le y],$$

συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X απαιτεί τον προσδιορισμό του συνόλου $\{x : g(x) \le y\}$. Τούτο επιτυγχάνεται εύκολα αν ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X των τιμών της X επί του συνόλου R_Y των τιμών της Y και μονότονος. Τότε υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός $x = g^{-1}(y)$ και είναι μονότονος. Στην περίπτωση αυτή η σχέση $g(x) \le y$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x \le g^{-1}(y)$, αν η $y = g(x)$ είναι αύξουσα και με τη σχέση $x \ge g^{-1}(y)$, αν η $y = g(x)$ είναι φθίνουσα και επομένως

$$F_Y(y) = P[X \le g^{-1}(y)] = F_X(g^{-1}(y)),$$

αν η $y = g(x)$ είναι αύξουσα και

$$F_Y(y) = P[X \ge g^{-1}(y)] = 1 - P[X < g^{-1}(y)] = 1 - F_X(g^{-1}(y)),$$

αν η $y = g(x)$ είναι φθίνουσα. Αν η αντίστροφη συνάρτηση $x = g^{-1}(y)$ παραγωγίζεται και η παράγωγος $dg^{-1}(y)/dy$ είναι συνεχής για κάθε y στο R_Y, τότε παραγωγίζοντας την ανωτέρω έκφραση της συνάρτησης κατανομής $F_Y(y)$, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης , συνάγουμε τη σχέση

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy},$$

αν η $y = g(x)$ είναι αύξουσα και τη σχέση

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy},$$

αν η $y = g(x)$ είναι φθίνουσα. Επομένως

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$. Αν ο μετασχηματισμός $Y = g(X)$ είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X επί του συνόλου $R_Y = g(R_X)$ και υπάρχει η παράγωγος $dg^{-1}(y)/dy$ και είναι συνεχής για κάθε y στο R_Y, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = g(X)$ είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, \ y \in R_Y . \tag{3.1}$$

Στη μερική περίπτωση που $y = g(x) = \alpha x + \beta$, όπου α και β πραγματικές σταθερές με $\alpha \neq 0$, ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο $x = g^{-1}(y) = (y - \beta)/\alpha$ και $dg^{-1}(y)/dy = 1/\alpha$. Έτσι συνάγουμε από το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1. *Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$. Τότε η $Y = \alpha X + \beta$, $\alpha \neq 0$, είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\frac{1}{|\alpha|}, \ y \in R_Y . \tag{3.2}$$

Παράδειγμα 3.1. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \ -\infty < x < \infty ,$$

όπου $-\infty < \mu < \infty$ και $0 < \sigma < \infty$ είναι παράμετροι της κατανομής. Σημειώνουμε ότι αυτή είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = \alpha X + \beta$.

Χρησιμοποιώντας την (3.2) παίρνουμε

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\alpha\mu-\beta)^2}{2(\alpha\sigma)^2}\right], \ -\infty < y < \infty .$$

Θέτοντας

$$\mu_Y = \alpha\mu + \beta \ , \ \sigma_Y = |\alpha|\sigma ,$$

η πυκνότητα αυτή γράφεται στη μορφή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right], \ -\infty < y < \infty ,$$

η οποία είναι η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής με παραμέτρους $\mu_Y = \alpha\mu + \beta$ και $\sigma_Y = |\alpha|\sigma$.

Ειδικά για $\alpha = 1/\sigma$ και $\beta = -\mu/\sigma$, οπότε $\mu_Y = 0$ και $\sigma_Y = 1$, η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

παίρνει τη μορφή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2},\ -\infty < y < \infty,$$

η οποία είναι η γνωστή ως τυποποιημένη κανονική πυκνότητα.

Η περίπτωση που ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ δεν είναι ένα προς ένα από το σύνολο R_X των τιμών της X επί του συνόλου R_Y των τιμών της Y δύναται να αντιμετωπισθεί με τον προσδιορισμό του συνόλου $\{x : g(x) \leq y\}$ και την εύρεση, αρχικά, της συνάρτησης κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y. Μια τέτοια περίπτωση εξετάζεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$ και συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in R$. (α) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = X^2$. (β) Στη μερική περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X έχει την τυποποιημένη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ -\infty < x < \infty,$$

να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της $Y = X^2$.

(α) Η τυχαία μεταβλητή Y δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και έτσι $F_Y(y) = 0$ για $-\infty < y \leq 0$, ενώ

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_Y(\sqrt{y}) - F_Y(-\sqrt{y})$$

για $0 < y < \infty$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\},\ 0 < y < \infty.$$

(β) Παρατηρούμε ότι η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, $f_X(-x) = f_X(x)$, και έτσι η ανωτέρω έκφραση της $f_Y(y)$ συναρτήσει της $f_X(x)$ γίνεται

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}),\ 0 < y < \infty.$$

Επομένως

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2},\ 0 < y < \infty.$$

Παράδειγμα 3.3. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $x \in R_X$ και συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in R$. (α) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$. (β) Αν

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ -\infty < x < \infty,$$

να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R_Y$ της $Y = |X|$.

(α) Η τυχαία μεταβλητή Y δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και έτσι $F_Y(y) = 0$ για $-\infty < y < 0$, ενώ

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = F_Y(y) - F_Y(-y),$$

για $0 \le y < \infty$. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης, συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y), \ 0 \le y < \infty.$$

(β) Παρατηρούμε ότι η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, $f_X(-x) = f_X(x)$, και έτσι η ανωτέρω έκφραση της $f_Y(y)$ συναρτήσει της $f_X(x)$ γίνεται

$$f_Y(y) = 2f_X(y), \ 0 \le y < \infty.$$

Επομένως

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-y/2}, \ 0 \le y < \infty.$$

4. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η κατανομή πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, δύναται να εκφρασθεί είτε από τη συνάρτηση κατανομής είτε από τη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας αυτής. Μια περιληπτική περιγραφή της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη θεώρηση και μελέτη μερικών βασικών παραμέτρων της κατανομής της. Η μέση τιμή που αποτελεί μέτρο θέσης ή κεντρικής τάσης και η διασπορά που αποτελεί μέτρο συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας είναι οι πιο βασικές παράμετροι της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής. Στο εδάφιο αυτό εισάγονται διαδοχικά και μελετώνται η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής.

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού μέσου μιας ακολουθίας τιμών. Συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1. (α) *Έστω ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,\ldots$. Τότε η μέση τιμή αυτής, συμβολιζόμενη με $E(X)$ ή μ_X ή απλώς μ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση*

$$\mu \equiv E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa). \tag{4.1}$$

(β) *Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, $-\infty < x < \infty$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση*

$$\mu \equiv E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{4.2}$$

Αξίζει να σημειωθεί η αναλογία μεταξύ της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής και του κέντρου βάρους μάζας στη μηχανική. Αν μια μονάδα μάζας κατανέμεται στα σημεία $x_0, x_1, \ldots$ μιας ευθείας και $f(x_\kappa)$ είναι η μάζα στο σημείο x_κ, $\kappa = 0,1,\ldots$ τότε η (4.1) παριστάνει το κέντρο βάρους (περί την αρχή). Κατά τον ίδιο τρόπο αν η μονάδα μάζας έχει συνεχή κατανομή σε μια ευθεία και αν η $f(x)$ παριστάνει την πυκνότητα μάζας στο x τότε η (4.2) ορίζει και πάλιν το κέντρο βάρους. Με την έννοια αυτή η μέση τιμή θεωρείται ως το κέντρο της κατανομής πιθανότητας.

Παράδειγμα 4.1. Έστω X ο αριθμός της επάνω έδρας στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου (βλ. Παράδειγμα 1.2). Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6},\ x = 1, 2, \ldots, 6 .$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 (α),

$$\mu = E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} .$$

Σημειώνουμε ότι, όπως φαίνεται και από το απλό αυτό παράδειγμα, η μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής δεν είναι κατ' ανάγκη μια από τις δυνατές τιμές της.

Παράδειγμα 4.2. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\theta, \theta]$. Να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. X δίδεται από την

$$f(x) = \frac{1}{2\theta},\ -\theta \le x \le \theta .$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1 (β),

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x dx = \left[\frac{x^2}{4\theta}\right]_{-\theta}^{\theta} = 0 .$$

Σημειώνουμε ότι η μέση τιμή της X είναι $E(X) = 0$, ανεξάρτητη της παραμέτρου θ. Στην κατανομή αυτή η παράμετρος θ καθορίζει τη συγκεντρωτικότητα των τιμών της X περί τη μέση τιμή. Όσο πιο μικρό είναι το θ τόσο πιο μεγάλη είναι η συγκεντρωτικότητα.

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X, διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \ldots$ ή συνεχή με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$. Σημειώνουμε ότι μια συνάρτηση αυτής $Y = g(X)$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή και η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y_r) = P(Y = y_r)$, $r = 0, 1, \ldots$ ή πυκνότητας $f_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$ αυτής προσδιορίζεαι μέσω της συνάρτησης πιθανότητας $f_X(x_\kappa)$, $\kappa = 0, 1, \ldots$ ή πυκνότητας $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X. Είναι επομένως ενδιαφέρον και έχει έννοια ο υπολογισμός της μέσης τιμής της $Y = g(X)$. Ο υπολογισμός αυτός δύναται να γίνει, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1, αφού πρώτα υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας της Y. Τούτο δεν είναι αναγκαίο να γίνεται σε κάθε μερική περίπτωση. Σχετικά ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa) f_X(x_\kappa), \tag{4.3}$$

αν η X είναι διακριτή και η έκφραση

$$E(Y) \equiv E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx, \tag{4.4}$$

αν η X είναι συνεχής.

Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής αποτελεί ένα μέτρο της συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας της κατανομής της. Η ύπαρξη κατανομών οι οποίες έχουν την ίδια μέση τιμή και των οποίων οι τιμές είναι περισσότερο ή λιγότερο διασπαρμένες (βλ. Παράδειγμα 4.2) καθιστά αναγκαία την εισαγωγή ενός τέτοιου μέτρου. Η διασπορά, η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για τη διάκριση των κατανομών αυτών, είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της απόκλισης $g(X) = (X - \mu)^2$, της τυχαίας μεταβλητής X από τη μέση της τιμή $\mu = E(X)$ και υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση των (4.3) και (4.4) ανάλογα με το αν X είναι διακριτή ή συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 4.2. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Τότε η διασπορά ή διακύμανση της X, συμβολιζόμενη με $V(X)$ ή σ_X^2 ή απλώς σ^2 αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ορίζεται από τη σχέση*

$$\sigma^2 \equiv V(X) = E[(X - \mu)^2]. \tag{4.5}$$

Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς $V(X)$,

$$\sigma \equiv \sigma_X = \sqrt{V(X)} \tag{4.6}$$

καλείται τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής X.

Σύμφωνα με τις (4.3) και (4.4), αν η X είναι μια διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,\ldots$, τότε

$$V(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (x_\kappa - \mu)^2 f(x_\kappa)$$

και αν η X είναι μια συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$, τότε

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx.$$

Σημειώνουμε ότι η αναλογία που υπάρχει μεταξύ της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής και του κέντρου βάρους μάζας στη μηχανική επεκτείνεται και μεταξύ της διασποράς και της ροπής αδρανείας περί το κέντρο βάρους.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς.

Θεώρημα 4.1. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και α, β σταθερές. Τότε*

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta, \tag{4.7}$$

$$E[g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)], \tag{4.8}$$

και

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X), \tag{4.9}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa)$, $\kappa = 0,1,\ldots$. Τότε σύμφωνα με την (4.3) παίρνουμε

$$E(\alpha X + \beta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\alpha x_\kappa + \beta) f(x_\kappa) = \alpha \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa f(x_\kappa) + \beta \sum_{\kappa=0}^{\infty} f(x_\kappa) = \alpha E(X) + \beta$$

και

$$E[g(X)+h(X)] = \sum_{\kappa=0}^{\infty}[g(x_\kappa)+h(x_\kappa)]f(x_\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} g(x_\kappa)f(x_\kappa) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} h(x_\kappa)f(x_\kappa)$$

$$= E[g(X)] + E[h(X)].$$

Στην περίπτωση που η X είναι συνεχής, χρησιμοποιώντας την (4.4), συνάγουμε κατά τον ίδιο τρόπο τις (4.7) και (4.8).

Σύμφωνα με τον ορισμό 4.2 της διασποράς και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7) και (4.8) συνάγουμε τη σχέση

$$V(\alpha X+\beta) = E([\alpha X+\beta) - E(\alpha X+\beta)]^2 = E([\alpha X+\beta-\alpha E(X)-\beta]^2)$$

$$= E(\alpha^2[X-E(X)]^2) = \alpha^2 E[(X-\mu)^2] = \alpha^2 V(X).$$

Αναπτύσσοντας το τετράγωνο $(X-\mu)^2$, της απόκλισης της τ.μ. X από τη μέση τιμή $\mu = E(X)$, κατά το διώνυμο του Νεύτωνα , και χρησιμοποιώντας τις (4.7) και (4.8) παίρνουμε

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - E(2\mu X - \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Παρατήρηση 4.1. *Τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή.* Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με $E(X)=\mu$ και $V(X)=\sigma^2$ τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{4.11}$$

έχει μέση τιμή, σύμφωνα με την (4.7),

$$E(Z) = E[(X-\mu)/\sigma] = [E(X)-\mu]/\sigma = 0$$

και διασπορά, σύμφωνα με την (4.9),

$$V(Z) = V[(X-\mu)/\sigma] = V(X)/\sigma^2 = 1.$$

Η τυχαία μεταβλητή Z που ορίζεται από την (4.11) καλείται τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στη X.

Παρατήρηση 4.2. *Παραγοντικές ροπές.* Η έκφραση (4.10) διευκολύνει τον υπολογισμό της διασποράς μιας τυχαίας μεταβλητής X, ιδιαίτερα στην περίπτωση που αυτή είναι συνεχής. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή τότε η διασπορά αυτής υπολογίζεται ευκολότερα με τη χρησιμοποίηση της *παραγοντικής ροπής* δεύτερης τάξης,

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2],$$

όπου $(X)_2 = X(X-1)$. Συγκεκριμένα έχουμε

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2. \tag{4.12}$$

Η σχέση αυτή συνάγεται άμεσα από την (4.10) και την

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X).$$

Παράδειγμα 4.3. Έστω X ο αριθμός της επάνω έδρας στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός συνήθους κύβου. Να υπολογισθεί η διασπορά $V(X)$.

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \ x = 1, 2, ..., 6 .$$

Επομένως, σύμφωνα με την (4.3)

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} .$$

Χρησιμοποιώντας την (4.10) και το ότι (βλ. Παράδειγμα 4.1)

$$E(X) = \frac{7}{2}$$

παίρνουμε

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} .$$

Παράδειγμα 4.4. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος η οποία τερματίζεται όταν εμφανισθεί για πρώτη φορά η όψη γράμματα. Έστω X ο αριθμός των απαιτουμένων προς τούτο ρίψεων. Η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \ x = 1, 2, ...$$

Να υπολογισθούν ο αναμενόμενος αριθμός των ρίψεων $E(X)$ και η διασπορά του αριθμού των ρίψεων $V(X)$.

Παρατηρούμε ότι παραγωγίζοντας διαδοχικά τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^x = (1-t)^{-1}, \ -1 < t < 1$$

συνάγουμε τις σχέσεις

$$\sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = (1-t)^{-2}, \ \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) t^{x-2} = 2(1-t)^{-3}, \ -1 < t < 1 .$$

Επομένως

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 2 ,$$

$$E[(X)_2] = \sum_{x=2}^{\infty} (x)_2 f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-3} = 4$$

και σύμφωνα με την (4.12)

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = 4 + 2 - 2^2 = 2 .$$

Παράδειγμα 4.5. Να υπολογισθεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{2\theta}, \ -\theta \le x \le \theta .$$

Χρησιμοποιώντας την (4.4) παίρνουμε

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6\theta}\right]_{-\theta}^{\theta} = \frac{\theta^2}{3}$$

και σύμφωνα με την (4.10) και επειδή (βλ.Παράδειγμα 4.2)

$$E(X) = 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$V(X) = E(X^2) = \frac{\theta^2}{3}.$$

Παράδειγμα 4.6. Έστω ότι ο χρόνος απορρόφησης ενός φαρμάκου μετρούμενος σε ώρες είναι μια συνεχής μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2},\ 0 \le x \le \theta,$$

όπου $\theta > 0$ είναι παράμετρος της κατανομής (βλ. Παράδειγμα 2.3). Να υπολογισθούν ο μέσος χρόνος απορρόφησης του φαρμάκου $E(X)$ και η διασπορά του χρόνου απορρόφησης $V(X)$.

Η μέση τιμή $E(X)$, σύμφωνα με τον ορισμό 4.1, δίδεται από την

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{2}{\theta^2}\int_{0}^{\theta} x(\theta - x)dx = \left[\frac{x^2}{\theta} - \frac{2x^3}{3\theta^2}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta}{3}.$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την (4.4), παίρνουμε

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{2}{\theta^2}\int_{0}^{\theta} x^2(\theta - x)dx = \left[\frac{2x^3}{3\theta} - \frac{x^4}{2\theta^2}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta^2}{6}$$

και έτσι

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^2}{9} = \frac{\theta^2}{18}.$$

Παράδειγμα 4.7. Έστω ότι η ταχύτητα X του ανέμου (σε χιλιόμετρα ανά ώρα) είναι μια συνεχής ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\theta},\ 0 \le x \le \theta.$$

Η πίεση Y (ατμόσφαιρες) που ασκείται στην επιφάνεια των πτερύγων ενός αεροσκάφους δίδεται από τη σχέση $Y = aX^2$. Να υπολογισθούν η μέση πίεση $E(X)$ και η διασπορά της πίεσης $V(X)$.

Χρησιμοποιώντας την (4.4) παίρνουμε

$$E(Y) = \alpha E(X^2) = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{\alpha}{\theta}\int_{0}^{\theta} x^2 dx = \frac{\alpha}{\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\theta} = \frac{\alpha\theta^2}{3}$$

και

$$E(Y^2) = \alpha^2 E(X^4) = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx = \frac{\alpha^2}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 dx = \frac{\alpha^2}{\theta}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\theta} = \frac{\alpha^2\theta^4}{5},$$

οπότε

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{\alpha^2\theta^4}{5} - \frac{\alpha^2\theta^4}{9} = \frac{4\alpha^2\theta^4}{45}.$$

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{5}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{13}{25}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{19}{25}, & 2 \le x < 3, \\ \frac{23}{25}, & 3 \le x < 4, \\ 1, & 4 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) οι πιθανότητες $P(1 < X \le 3)$, $P(X > 2)$ και (β) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 0,1,2,3,4$.

2. Έστω ότι ο χρόνος αναμονής X σε λεπτά σε συγκεκριμένο σταθμό του υπογείου σιδηροδρόμου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{x}{4}, & 2 \le x < 4, \\ 1, & 4 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) οι πιθανότητες $P(X \le 2)$, $P(1 < X \le 3)$, $P(X > 3)$ και (β) η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$.

3. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο διακεκριμένων κύβων και έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία στο σημείο (i, j) του δειγματικού χώρου αντιστοιχεί το σημείο $i + j - 2$, $i = 1,2,...,6$, $j = 1,2,...,6$. Να υπολογισθούν η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0,1,...,10$ και η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = P(X \le x)$, $-\infty < x < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής X.

4. (Συνέχεια). Έστω Y η απόλυτη τιμή της διαφοράς των εμφανιζομένων εδρών. Να υπολογισθούν η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y) = P(Y = y)$, $y = 0,1,...,5$ και η συνάρτηση κατανομής $F_Y(y) = P(Y \le y)$, $-\infty < y < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής Y.

5. Έστω ότι η X είναι μια μη αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 4p^3, & x = 0, \\ 5p(1-3p), & x = 1, \\ 2p(p+3)-1, & x = 2, \\ 0, & x \neq 0,1,2. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες p, $P(X \leq 1)$ και $P(0 < X \leq 2)$.

6. Έστω ότι η X είναι μια μη αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = c\binom{x-1}{k-1}, \; x = \kappa, \kappa+1, \ldots, \nu .$$

Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο του Pascal,

$$\binom{x}{\kappa} = \binom{x-1}{\kappa} + \binom{x-1}{\kappa-1}$$

υπολογίστε τη σταθερή c και τη συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$.

7. Έστω ότι η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c - |x|, \; |x| \leq c ,$$

όπου $c > 0$. Να υπολογισθούν (α) η σταθερή c, (β) η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$ και (γ) η πιθανότητα $P(|X| \leq 3/4)$.

8. Η ποσότητα βενζίνης X (σε χιλιόλιτρα) που πωλεί πρατήριο βενζίνης σε μια μέρα είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x < 1, \\ c, & 1 \leq x < 2, \\ c(3-x), & 2 \leq x < 3, \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η σταθερή c και (β) οι πιθανότητες $P(X \leq 3/4)$, $P(1/2 < X \leq 5/2)$, $P(X > 9/4)$ και (γ) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

9. Η εκατοστιαία περιεκτικότητα σε οινόπνευμα ενός παρασκευάσματος είναι μια συνεχής μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = cx^3(1-x), \; 0 < x < 1 .$$

(α) Να υπολογισθούν η σταθερή c και οι πιθανότητες $p_1 = P(0 < X \leq 1/3)$ και $p_2 = P(1/3 < X \leq 2/3)$. (β) Αν το παρασκεύασμα πωλείται προς $4j$ ευρώ το λίτρο όταν η περιεκτικότητα σε οινόπνευμα είναι $(j-1)/3 < X \leq j/3$, ενώ κοστίζει $3j$ ευρώ, $j = 1,2,3$, να υπολογισθεί το μέσο κέρδος ανά λίτρο και η διασπορά του κέρδους.

10. Έστω ότι ετήσιο εισόδημα μισθωτού *X*, μετρούμενο σε χιλιάδες ευρώ, είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{4 \cdot 10^4}{x^5},\ 10 \le x < \infty .$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $-\infty < x < \infty$ και (β) το μέσο εισόδημα $E(X)$ και η διασπορά του εισοδήματος $V(X)$.

11. (*Συνέχεια*). Ο συντελεστής φορολογίας (ποσοστό) *Y* αυξάνεται κλιμακωτά συναρτήσει του εισοδήματος *X*. Έστω ότι $Y = g(X)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 10 \le x < 20, \\ \dfrac{1}{10}, & 20 \le x < 40, \\ \dfrac{2}{10}, & 20 \le x < 60, \\ \dfrac{3}{10}, & 60 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$, $y = 0,\ 1/10,\ 2/10,\ 3/10$ και (β) ο μέσος συντελεστής φορολογίας $E(Y)$.

12. (*Συνέχεια*). Ο φόρος εισοδήματος *Z* εκφράζεται συναρτήσει του εισοδήματος *X* από την $Z = h(X)$, όπου

$$h(x) = \begin{cases} 0, & 10 \le x < 20, \\ \dfrac{x-20}{10}, & 20 \le x < 40, \\ \dfrac{2(x-30)}{10}, & 20 \le x < 60, \\ \dfrac{3(x-40)}{10}, & 60 \le x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_Z(z)$, $-\infty < z < \infty$ (β) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_z(z)$, $-\infty < z < \infty$, και (γ) ο μέσος φόρος εισοδήματος $E(Z)$.

13. Ο χρόνος πέψης *X*, μετρούμενος σε ώρες, μιας μονάδας τροφής είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty,\ (0 < \theta < \infty).$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, (β) η πιθανότητα όπως για την πέψη μιας μονάδας τροφής απαιτηθεί περισσότερο από μια ώρα και (γ) ο μέσος χρόνος πέψης μιας μονάδας τροφής $E(X)$.

14. Έστω ότι *X* μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{2\nu},\ x = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \nu .$$

Να υπολογισθούν η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

15. Έστω ότι X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = 1/3\,,\ -1 \le x \le 2\,.$$

Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ της $Y = |X|$.

16. Η διακύμανση ηλεκτρικού ρεύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $[10,12]$. Αν το ρεύμα αυτό διέρχεται από αντίσταση 2 ohm, να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τάσης $Y = 2X^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η κατανομή πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής εξετάσθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται διεξοδικά οι σημαντικότερες διακριτές κατανομές. Πιο συγκεκριμένα διατυπώνονται τα πιο βασικά και χρήσιμα στοχαστικά πρότυπα (μοντέλα) καθ’ ένα από τα οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή μιας ευρείας κλάσης στοχαστικών (τυχαίων) πειραμάτων ή φαινομένων. Ορίζονται διακριτές τυχαίες μεταβλητές και σε κάθε περίπτωση προσδιορίζεται η κατανομή τους, υπολογίζοντας τη συνάρτηση πιθανότητας αυτής. Επίσης υπολογίζονται η μέση τιμή και η διασπορά της κατανο-μής και αποδεικνύονται χρήσιμες ιδιότητές της. Για τη διευκόλυνση των εφαρμογών γίνεται χρήση των πινάκων των κατανομών αυτών. Στο επόμενο κεφάλαιο μελετώνται με τον ίδιο διεξοδικό τρόπο οι σπουδαιότερες συνεχείς κατανομές.

2. ΚΑΤΑΝΟΜΗ BERNOULLI ΚΑΙ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

2.1. Κατανομή Bernoulli

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και ένα ενδεχόμενο A στον Ω. Αν A' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A στον Ω, τότε τα ενδεχόμενα (A, A') αποτελούν μια διαίρεση του δειγματικού χώρου Ω, εφ’ όσον $A \cap A' = \varnothing$ και $A + A' = \Omega$. Το ενδεχόμενο A χαρακτηρίζεται συνήθως ως επιτυχία και το A' ως αποτυχία. Παριστάνοντας με ε την επιτυχία και α την αποτυχία ο δειγματικός χώρος δύναται να παρασταθεί ως $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$. Ένα τέτοιο τυχαίο πείραμα καλείται *δοκιμή Bernoulli*. Έστω

$$P(\{\varepsilon\}) = p\,,\ P(\{\alpha\}) = 1 - P(\{\varepsilon\}) = 1 - p = q\,, \tag{2.1}$$

και ας θεωρήσουμε την ακόλουθη τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 2.1. *Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$). Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν-ένα) τυχαίας μεταβλητής X καλείται (μηδέν-ένα) κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.*

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής, όπως επίσης η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Bernoulli δίδονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. *Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδεται από την*

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}\,,\ x = 0,1\,. \tag{2.2}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ q, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x<\infty.\end{cases} \tag{2.3}$$

Η μέση τιμή και διασπορά της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδονται από τις

$$\mu=E(X)=p\,,\ \sigma^2=V(X)=pq\,. \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Ο αριθμός X των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli είναι μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον $\Omega=\{\alpha,\varepsilon\}$ με $X(\alpha)=0$, $X(\varepsilon)=1$, και έτσι συνάγουμε τις πιθανότητες

$$P(X=0)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=0\})=P(\{\alpha\})=q\,,$$

$$P(X=1)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=1\})=P(\{\varepsilon\})=p\,,$$

οι οποίες συνεπάγονται τη συνάρτηση πιθανότητας (2.2). Η συνάρτηση κατανομής (2.3) προκύπτει άμεσα από τη (2.2) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{1}xp^xq^{1-x}=p$$

και η διασπορά αυτής συνάγεται ως εξής:

$$\sigma^2=V(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum_{x=0}^{1}(x-p)^2p^xq^{1-x}=p^2q+q^2p=pq\,.$$

2.2. Διωνυμική κατανομή

Ορισμός 2.1. *Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q=1-p$),*

$$P_i(\{\varepsilon\})=p\,,\ P_i(\{\alpha\})=q=1-p\,,\ i=1,2,\ldots,\nu\,,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική με παραμέτρους ν και p.

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της διωνυμικής κατανομής συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=\binom{\nu}{x}p^xq^{\nu-x}\,,\ x=0,1,\ldots,\nu \tag{2.5}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{[x]}\binom{\nu}{\kappa}p^\kappa q^{\nu-\kappa}, & 0\le x<\nu,\\ 1, & \nu\le x<\infty,\end{cases} \tag{2.6}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Απόδειξη. Ο δειγματικός χώρος του συνθέτου τυχαίου πειράματος των ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli είναι, σύμφωνα με το Εδάφιο 9 του Κεφ. 1, το ν-πλό καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$ με τον εαυτό του,

$$\Omega^{\nu} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{\nu}) : \omega_i \in \{\alpha, \varepsilon\},\ i = 1, 2, ..., \nu\}.$$

Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ να πραγματοποιηθούν x επιτυχίες στις ν δοκιμές περιλαμβάνει $\binom{\nu}{x}$ στοιχειώδη ενδεχόμενα, όσα και ο αριθμός των επιλογών των x θέσεων για τις επιτυχίες από τις ν θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο στοιχειώδες ενδεχόμενο, επειδή οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες, έχει πιθανότητα

$$p^x q^{\nu - x}.$$

Επομένως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x},\ x = 0, 1, ..., \nu.$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0,\ x = 0, 1, ..., \nu,\ f(x) = 0,\ x \notin \{0, 1, ..., \nu\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα,

$$\sum_{x=0}^{\nu} f(x) = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x} = (p + q)^{\nu} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής (2.6) προκύπτει άμεσα από τη (2.5) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Οι πίνακες της συνάρτησης πιθανότητας (2.5) και της συνάρτησης κατανομής (2.6) της διωνυμικής κατανομής διευκολύνουν τους υπολογισμούς που περιλαμβάνουν διωνυμικές πιθανότητες και χρησιμοποιούνται ευρύτατα, ιδιαίτερα στη Στατιστική. Ο Πίνακας 1 του παραρτήματος δίδει τη συνάρτηση πιθανότητας (2.5) για $\nu = 1, 2, ..., 20$ και $p = 0{,}05,\ 0{,}10, ..., 0{,}50$. Στην περίπτωση που $p > 0{,}5$ οπότε $q = 1 - p < 0{,}5$, χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x} = \binom{\nu}{\nu - x} q^{\nu - x} p^{\nu - (\nu - x)}. \tag{2.7}$$

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της διωνυμικής κατανομής.

Θεώρημα 2.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (2.5). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά της αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \nu p,\ \sigma^2 = V(X) = \nu pq \tag{2.8}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\nu} x \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x\binom{\nu}{x} = x\frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} = \nu\frac{(\nu-1)!}{(x-1)!(\nu-x)!} = \nu\binom{\nu-1}{x-1}$$

παίρνουμε

$$\mu = E(X) = \nu\sum_{x=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{x-1}p^x q^{\nu-x} = \nu p\sum_{y=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{y}p^y q^{\nu-1-y}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα συμπεραίνουμε ότι

$$\mu = E(X) = \nu p(p+q)^{\nu-1} = \nu p.$$

Επίσης

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \sum_{x=2}^{\nu}(x)_2\binom{\nu}{x}p^x q^{\nu-x} = \sum_{x=0}^{\nu}x(x-1)\binom{\nu}{x}p^x q^{\nu-x}$$

και επειδή

$$x(x-1)\binom{\nu}{x} = x(x-1)\frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} = \nu(\nu-1)\frac{(\nu-2)!}{(x-2)!(\nu-x)!} = \nu(\nu-1)\binom{\nu-2}{x-2}$$

παίρνουμε

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \nu(\nu-1)\sum_{x=2}^{\nu}\binom{\nu-2}{x-2}p^x q^{\nu-x} = \nu(\nu-1)p^2\sum_{y=0}^{\nu-2}\binom{\nu-2}{y}p^y q^{\nu-2-y}$$

$$= \nu(\nu-1)p^2(p+q)^{\nu-2} = \nu(\nu-1)p^2.$$

Επομένως

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p - \nu^2 p^2 = \nu pq.$$

Παράδειγμα 2.1. Έστω ότι σε ν ασθενείς μετρείται η πίεση του αίματος πριν και μετά τη χορήγηση ενός ορισμένου φαρμάκου και τα αποτελέσματα είναι (y_1, z_1), $(y_2, z_2), \ldots, (y_\nu, z_\nu)$. Αν $y_\kappa > z_\kappa$ θεωρούμε ότι η κ–οστή δοκιμή είχε αποτέλεσμα επιτυχία, ενώ αν $y_\kappa \le z_\kappa$ αποτυχία, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$. Αν το φάρμακο δεν έχει καμμιά επίδραση τότε η πιθανότητα επιτυχίας p είναι ίση με την πιθανότητα αποτυχίας $q = 1 - p$ και επομένως $p = 1/2$.

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών στις ν δοκιμές. Τότε, υποθέτοντας ότι το φάρμακο δεν έχει καμμιά επίδραση στην πίεση του αίματος,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}, \ x = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Σημειώνουμε ότι πολύ μικρός αριθμός επιτυχιών αποτελεί ένδειξη ότι το φάρμακο δεν έχει καμμία επίδραση στην πίεση. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) 2 το πολύ επιτυχιών και (β) 7 τουλάχιστον επιτυχιών στην περίπτωση $\nu = 8$ ασθενών.

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1 του παραρτήματος παίρνουμε

$$P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2}\binom{8}{x}(0{,}5)^8 = 0{,}0039 + 0{,}0312 + 0{,}1094 = 0{,}1445,$$

$$P(X \ge 7) = \sum_{x=7}^{8}\binom{8}{x}(0{,}5)^8 = 0{,}0312 + 0{,}0039 = 0{,}0351.$$

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε έναν αρχικό πληθυσμό στον οποίο οι γονότυποι AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ εμφανίζονται με πιθανότητες p, $2q$ και r, ανεξάρτητα φύλου. Έστω ότι καθένας από τους γονείς (πατέρας και μητέρα) κληρονομεί, σύμφωνα με το νόμο κληρονομικότητας του Mendel, σε κάθε παιδί του ένα από τα γονίδια A και α.

Ας θεωρήσουμε ένα ζευγάρι (άνδρα και γυναίκα) από τον πληθυσμό αυτό το οποίο αποκτά ν παιδιά και έστω ότι το ενδιαφέρον για κάθε παιδί εστιάζεται στο κατά πόσον έχει το γονότυπο AA. Χαρακτηρίζοντας το ενδεχόμενο Γ_1 όπως ένα παιδί έχει το γονότυπο AA ως επιτυχία και το συμπληρωματικό του ως αποτυχία, η γέννηση ενός παιδιού δύναται να θεωρηθεί ως δοκιμή Bernoulli με πιθανότητες (βλ. Παράδειγμα 9.2 του Κεφ. 1)

$$p_1 = P(\{\varepsilon\}) = P(\Gamma_1) = (p+q)^2\,,\ q_1 = P(\{\alpha\}) = P(\Gamma_1') = 1-(p+q)^2\,.$$

Η σειρά των ν γεννήσεων αποτελεί μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli και έτσι ο αριθμός X των παιδιών που έχουν το γονότυπο AA ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \binom{\nu}{x} p_1^x q_1^{\nu-x}\,,\ x = 0,1,\ldots,\nu\,.$$

Στη μερική περίπτωση που οι πιθανότητες των τριών γονοτύπων στον αρχικό πληθυσμό είναι $p = q = r = 1/4$, οπότε $p_1 = 1/4$, $q_1 = 3/4$, ο αριθμός X των παιδιών που έχουν το γονότυπο AA, σε σύνολο $\nu = 4$ παιδιών, έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}\,,\ x = 0,1,2,3,4\,.$$

Η πιθανότητα όπως ένα τουλάχιστο από τα 4 παιδιά έχει το γονότυπο AA είναι ίση με

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256} = 0{,}6834\,.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών με το γονότυπο AA είναι

$$\mu = E(X) = 4\cdot\frac{1}{4} = 1\,.$$

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ PASCAL

3.1. Γεωμετρική κατανομή

Ορισμός 3.1. *Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q),*

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p\,,\ P_i(\{\alpha\}) = q = 1-p\,,\ i = 1,2,\ldots,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται γεωμετρική με παράμετρο p.

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της γεωμετρικής κατανομής συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. *Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίδεται από την*

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \ x = 1, 2, ... \tag{3.1}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1 - q^{[x]}, & 1 \le x < \infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

όπου $[x]$ *παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.*

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$, η πρώτη επιτυχία να πραγματοποιηθεί στη x-οστή δοκιμή, περιλαμβάνει ένα μόνο δειγματικό σημείο (στοιχειώδες ενδεχόμενο) και συγκεκριμένα το

$$\{(\alpha, \alpha, ..., \alpha, \varepsilon)\},$$

όπου στις $x - 1$ θέσεις (δοκιμές) έχει αποτυχία και στη x-οστή θέση (δοκιμή) έχει επιτυχία. Χρησιμοποιώντας ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες τούτο έχει πιθανότητα

$$q^{x-1} p.$$

Επομένως η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X είναι η

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \ x = 1, 2, ...$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \ x = 1, 2, ..., \ f(x) = 0, \ x \notin \{1, 2, ...\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του αθροίσματος των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου (σειράς),

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p(1-q)^{-1} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής (3.2) προκύπτει άμεσα από τη συνάρτηση πιθανότητας (3.1) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της γεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 3.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (3.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}, \ \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2} \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή και η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της γεωμετρικής κατανομής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}$$

και

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \sum_{x=2}^{\infty} (x)_2 \, pq^{x-1} = pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) q^{x-2}.$$

Παρατηρούμε ότι, παραγωγίζοντας διαδοχικά τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{x=0}^{\infty} q^x = (1-q)^{-1},$$

συνάγουμε τις σχέσεις

$$\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = (1-q)^{-2}, \ \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-2} = 2(1-q)^{-3}.$$

Επομένως

$$\mu = E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{p},$$

και

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = pq\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)pq^{x-2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2},$$

οπότε

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{2q}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Η *έλλειψη μνήμης* αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα της γεωμετρικής κατανομής. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (3.1). Τότε*

$$P(X > \kappa + r \mid X > \kappa) = P(X > r), \ \kappa, r = 0, 1, \ldots. \tag{3.4}$$

Απόδειξη. Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{w : X(w) > \kappa + r\}$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{w : X(w) > \kappa\}$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\{w : X(w) > \kappa + r\} \subseteq \{w : X(w) > \kappa\}$ και χρησιμοποιώντας την (3.2), είναι ίση με

$$P(X > \kappa + r \mid X > \kappa) = \frac{P(X > \kappa + r, X > \kappa)}{P(X > \kappa)} = \frac{P(X > \kappa + r)}{P(X > \kappa)}$$

$$= \frac{1 - F(\kappa + r)}{1 - F(\kappa)} = \frac{q^{\kappa + r}}{q^{\kappa}} = q^r$$

και επειδή

$$P(X > r) = 1 - F(r) = q^r$$

συνάγεται η (3.4).

Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα αυτή σημαίνει *έλλειψη μνήμης* της γεωμετρικής κατανομής με την ακόλουθη έννοια. Η πιθανότητα να απαιτηθούν επιπρόσθετα περισσότερες από r δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία δεδομένου ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί επιτυχία στις κ πρώτες δοκιμές είναι η ίδια με την (μη δεσμευμένη) πιθανότητα να απαιτηθούν περισσότερες από r δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία. Επομένως η πληροφορία μη επίτευξης του στόχου (επιτυχία) ξεχνιέται και η προσπάθεια συνεχίζεται όπως όταν πρωταρχίζει.

Παρατήρηση 3.1. Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού Y των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση της σχέσης $Y = X - 1$ και της (3.1) ως εξής:

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = y + 1) = pq^y, \ y = 0, 1, \ldots. \tag{3.5}$$

Η κατανομή της τ.μ. Y καλείται επίσης γεωμετρική με παράμετρο p. Η μέση τιμή και η διασπορά αυτής προκύπτουν από τις (3.3):

$$E(Y) = E(X-1) = E(X) - 1 = \frac{q}{p}, \; V(Y) = V(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{3.6}$$

Παράδειγμα 3.1. Το κόστος εκτέλεσης για πρώτη φορά ενός συγκεκριμένου πειράματος είναι 500 ευρώ. Αν το πείραμα αποτύχει, για ορισμένες μεταβολές που πρέπει να γίνουν πριν από την επόμενη εκτέλεσή του απαιτείται ένα πρόσθετο ποσόν 100 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα επιτυχίας $p = 4/5$ και ότι συνεχίζονται μέχρι την πρώτη επιτυχία. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 4 το πολύ δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία και (β) το αναμενόμενο κόστος μέχρι την πρώτη επιτυχία.

(α) Ο αριθμός X των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}, \; x = 1, 2, \ldots$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{[x]}, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Επομένως

$$P(X \le 4) = F(4) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}9984.$$

(β) Αν Y είναι το κόστος μέχρι την πρώτη επιτυχία τότε

$$Y = 500X + 100(X-1) = 600X - 100$$

και

$$E(Y) = 600E(X) - 100.$$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι ίση με

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{5}{4}$$

και συνεπώς

$$E(Y) = 650.$$

3.2. Κατανομή Pascal

Ορισμός 3.2. *Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q),*

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p, \; P_i(\{\alpha\}) = q = 1 - p, \; i = 1, 2, \ldots,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Pascal με παραμέτρους r και p.

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της κατανομής Pascal συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.4. *Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Pascal με παραμέτρους r και p δίδεται από την*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \ x = r, r+1, \dots \tag{3.7}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < r \\ \sum_{\kappa=r}^{[x]} \binom{\kappa-1}{r-1} p^r q^{\kappa-r}, & r \le x < \infty, \end{cases} \tag{3.8}$$

όπου $[x]$ *παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.*

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ περιλαμβάνει τα δειγματικά σημεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα) $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{x-1}, \varepsilon)$, με $r-1$ επιτυχίες στις $x-1$ πρώτες δοκιμές και επιτυχία στη x-οστή δοκιμή, τα οποία είναι πλήθους $\binom{x-1}{r-1}$, όσα και ο αριθμός των επιλογών των $r-1$ θέσεων για τις επιτυχίες από τις $x-1$ δυνατές θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο δειγματικό σημείο έχει πιθανότητα

$$p^r q^{x-r}.$$

Επομένως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \ x = r, r+1, \dots .$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \ x = r, r+1, \dots, \ f(x) = 0, \ x \notin \{r, r+1, \dots\}$$

και χρησιμοποιώντας το αρνητικό διωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} t^x = (1-t)^{-r}, \ -1 < t < 1, \tag{3.9}$$

συνάγουμε τη σχέση

$$\sum_{x=r}^{\infty} f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y-1}{y} q^y = p^r (1-q)^{-r} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής (3.8) προκύπτει άμεσα από τη συνάρτηση πιθανότητας (3.7) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Pascal.

Θεώρημα 3.5. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pascal με συνάρτηση πιθανότητας την (3.7). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p}, \ \sigma^2 = V(X) = \frac{rq}{p^2}. \tag{3.10}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} ,$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x\binom{x-1}{r-1} = x\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = r\frac{x!}{r!(x-r)!} = r\binom{x}{x-r}$$

και την (3.9), συνάγουμε την έκφραση

$$\mu = rp^r \sum_{x=r}^{\infty}\binom{x}{x-r} q^{x-r} = rp^r \sum_{y=0}^{\infty}\binom{r+y}{y} q^y = rp^r (1-q)^{-r-1} = \frac{r}{p}.$$

Η δεύτερης τάξης ανοδική παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu_{[2]} = E[X(X+1)] = \sum_{x=r}^{\infty} x(x+1)\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} ,$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x(x+1)\binom{x-1}{r-1} = x(x+1)\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!}$$

$$= r(r+1)\frac{(x+1)!}{(r+1)!(x-r)!} = r(r+1)\binom{x+1}{x-r}$$

και την (3.9), συνάγουμε την έκφραση

$$\mu_{[2]} = E[X(X+1)] = r(r+1)p^r \sum_{x=r}^{\infty}\binom{x+1}{x-r} q^{x-r} = r(r+1)p^r \sum_{y=0}^{\infty}\binom{r+y+1}{y} q^y$$

$$= r(r+1)p^r (1-q)^{-r-2} = r(r+1)p^{-2}.$$

Επομένως η διασπορά της τ.μ. X είναι

$$\sigma^2 = V(X) = E[X(X+1)] - E(X) - [E(X)]^2 = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2}.$$

Παρατήρηση 3.2. Ας θεωρήσουμε τον αριθμό Y των αποτυχιών μέχρι τη r-οστή επιτυχία σε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας αυτής μεταβλητής δύναται να υπολογισθεί είτε απευθείας είτε με τη χρησιμοποίηση της σχέσης $Y = X - r$ και της συνάρτησης πιθανότητας (3.7) της X. Έχουμε

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = r + y) = \binom{r+y-1}{y} p^r q^y ,\ y = 0,1,\ldots. \tag{3.11}$$

Η κατανομή της τ.μ. Y καλείται επίσης κατανομή Pascal ή αρνητική διωνυμική με παραμέτρους r και p. Η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δύνανται να προκύψουν από τις (3.10) ως εξής:

$$\mu = E(Y) = E(X) - r = \frac{r}{p} - r = \frac{rq}{p},\ \sigma^2 = V(Y) = V(X) = \frac{rq}{p^2}. \tag{3.12}$$

Παρατήρηση 3.3. *Σύνδεση των κατανομών Pascal και διωνυμικής.* Ας παραστήσουμε με $X_{r,P}$ τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία σε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και με $X_{\nu,\Delta}$ τον αριθμό των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Τότε

$$P(X_{r,P} \le \nu) = P(X_{\nu,\Delta} \ge r)\,, \tag{3.13}$$

επειδή το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία είναι το πολύ ν είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των επιτυχιών στις ν δοκιμές είναι τουλάχιστον r. Επίσης

$$P(X_{r,P} = \nu+1) = pP(X_{\nu,\Delta} = r-1)\,, \tag{3.14}$$

επειδή το ενδεχόμενο όπως η r-οστή επιτυχία πραγματοποιηθεί στην $\nu+1$ δοκιμή είναι ίσο με την τομή των ανεξαρτήτων ενδεχομένων όπως πραγματοποιηθούν $r-1$ επιτυχίες στις ν δοκιμές και επιτυχία στη $\nu+1$ δοκιμή. Η σχέση (3.14) δύναται να χρησιμοποιηθεί μαζί με τον Πίνακα 1 των πιθανοτήτων της διωνυμικής κατανομής για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων της κατανομής Pascal.

Παράδειγμα 3.3. Μια γυναίκα εξακολουθεί να τεκνοποιεί μέχρι να αποκτήσει δύο αγόρια. Έστω ότι η πιθανότητα γέννησης αγοριού είναι $p = 0{,}49$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα όπως η γυναίκα αυτή αποκτήσει το πολύ 4 παιδιά μέχρι να πετύχει το σκοπό της και (β) ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών μέχρι τη γέννηση του δεύτερου αγοριού.

(α) Έστω X ο αριθμός των παιδιών μέχρι και τη γέννηση του δεύτερου αγοριού. Τότε η τ.μ. X έχει την κατανομή Pascal με παραμέτρους $r = 2$, $p = 0{,}49$ και έτσι

$$P(X \le 4) = \sum_{\kappa=2}^{4} (\kappa-1)(0{,}49)^2(0{,}51)^{\kappa-2} = (0{,}49)^2\{1 + 2(0{,}51) + 3(0{,}51)^2\} = 0{,}67\,.$$

(β) Ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών μέχρι τη γέννηση του δεύτερου αγοριού, σύμφωνα με την πρώτη από τις (3.10), είναι

$$\mu = E(X) = \frac{2}{0{,}49} = 4{,}08\,.$$

Παράδειγμα 3.4. *Το πρόβλημα των σπιρτόκουτων του Banach.* Στη διάρκεια μιας τελετής προς τιμή του γνωστού μαθηματικού Banach, ο Steinhaus αναφερόμενος χιουμοριστικά στις καπνιστικές συνήθειες του τιμομένου έδωσε το ακόλουθο παράδειγμα ως εφαρμογή της κατανομής Pascal. Ένας μαθηματικός έχει πάντα μαζί του ένα σπιρτόκουτο στη δεξιά τσέπη και ένα άλλο στην αριστερή. Όταν χρειάζεται σπίρτο παίρνει τυχαία ένα από τα κουτιά και επομένως οι διαδοχικές εκλογές σπιρτόκουτων αποτελούν μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με $p = q = 1/2$. Έστω ότι αρχικά το κάθε κουτί περιέχει ν σπίρτα και ας θεωρήσουμε τη στιγμή κατά την οποία για πρώτη φορά ο μαθηματικός ανακαλύπτει ότι το ένα κουτί είναι κενό. Τη στιγμή αυτή το άλλο κουτί θα περιέχει Z σπίρτα. Η τυχαία αυτή μεταβλητή μπορεί να πάρει τις τιμές $z = 0, 1, \ldots, \nu$. Να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(z) = P(Z = z)$, $z = 0, 1, \ldots, \nu$.

Ας θεωρήσουμε ως επιτυχία την εκλογή του σπιρτόκουτου που βρίσκεται στη δεξιά τσέπη. Παρατηρούμε ότι το σπιρτόκουτο στη δεξιά τσέπη θα βρεθεί κενό όταν το άλλο θα περιέχει z σπίρτα αν και μόνο αν ο αριθμός X των δοκιμών μέχρι τη

$(\nu+1)$ επιτυχία είναι ίσος με $x=(\nu+1)+(\nu-z)=2\nu-z+1$. Το ίδιο ισχύει και με την εναλλαγή του ρόλου των δύο τσεπών. Επομένως, σύμφωνα με την (3.7),

$$f_Z(z)=P(Z=z)=2P(Z=2\nu-z+1)=\binom{2\nu-z}{\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu-z},\ z=0,1,\ldots,\nu .$$

4. ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο πληθυσμό του οποίου τα στοιχεία, σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό, κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες. Έστω ότι ένα δείγμα συγκεκριμένου μεγέθους εκλέγεται από τον πληθυσμό αυτό, χωρίς επανάθεση. Ο αριθμός των στοιχείων της μιας ή της άλλης κατηγορίας που περιλαμβάνονται στο δείγμα αποτελεί αντικείμενο πιθανοθεωρητικής μελέτης. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1. *Έστω ότι από μια κάλπη που περιέχει r άσπρα και s μαύρα σφαιρίδια εξάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, ν σφαιρίδια. Στο τυχαίο (στοχαστικό) αυτό πείραμα έστω X ο αριθμός των άσπρων σφαιριδίων τα οποία εξάγονται. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται υπεργεωμετρική με παραμέτρους r, s και ν.*

Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής συνάγεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής με παράμετρους r, s και ν δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu},\ x=0,1,\ldots,\nu . \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Ο δειγματικός χώρος Ω περιλαμβάνει $N(\Omega)=\binom{r+s}{\nu}$ δειγματικά σημεία, όσα και ο αριθμός των ν-άδων σφαιριδίων που δύνανται να εξαχθούν. Τα δειγματικά αυτά σημεία είναι ισοπίθανα. Το ενδεχόμενο $\{X=x\}$ περιλαμβάνει $\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}$ ν-άδες σφαιριδίων με x άσπρα από τα r και $\nu-x$ μαύρα από τα s. Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$f(x)=P(X=x)=\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu},\ x=0,1,\ldots,\nu .$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x)\ge 0,\ x=0,1,\ldots,\nu,\ f(x)=0,\ x\notin\{0,1,\ldots,\nu\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy,

$$\sum_{x=0}^{\nu}\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}=\binom{r+s}{\nu}, \tag{4.2}$$

ισχύει

$$\sum_{x=0}^{\nu}f(x)=\sum_{x=0}^{\nu}\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu}=1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας. Επίσης τα σημεία με θετική πιθανότητα καθορίζονται από τις ανισότητες

$$0 \le x \le \nu, \; 0 \le x \le r, \; 0 \le \nu - x \le s$$

και είναι οι ακέραιοι x με

$$\max\{0, \nu - s\} \le x \le \min\{\nu, r\}.$$

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της υπεργεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 4.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (4.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \nu \frac{r}{r+s}, \; \sigma^2 = V(X) = \nu \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r+s-\nu}{r+s-1}. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\nu} x \binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x} \Big/ \binom{r+s}{\nu}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x\binom{r}{x} = x\frac{r!}{x!(r-x)!} = r\frac{(r-1)!}{(x-1)!(r-x)!} = r\binom{r-1}{x-1}$$

και τον τύπο (4.2) του Cauchy,

$$\mu = r\sum_{x=1}^{\nu}\binom{r-1}{x-1}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu} = r\sum_{y=0}^{\nu-1}\binom{r-1}{y}\binom{s}{\nu-1-y}\Big/\binom{r+s}{\nu}$$

$$= r\binom{r+s-1}{\nu-1}\Big/\binom{r+s}{\nu} = \nu\frac{r}{r+s}.$$

Η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu_{(2)} = E[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\nu} x(x-1)\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x(x-1)\binom{r}{x} = x(x-1)\frac{r!}{x!(r-x)!} = r(r-1)\frac{(r-2)!}{(x-2)!(r-x)!} = r(r-1)\binom{r-2}{x-2}$$

και τον τύπο (4.2) του Cauchy συνάγουμε την

$$\mu_{(2)} = r(r-1)\sum_{x=2}^{\nu}\binom{r-2}{x-2}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu} = r(r-2)\sum_{y=0}^{\nu-2}\binom{r-2}{y}\binom{s}{\nu-2-y}\Big/\binom{r+s}{\nu}$$

$$= r(r-1)\binom{r+s-2}{\nu-2}\Big/\binom{r+s}{\nu} = \nu(\nu-1)\frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)}.$$

Επομένως

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{\nu(\nu-1)r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)} + \frac{\nu r}{r+s} - \left(\frac{\nu r}{r+s}\right)^2$$

$$= \nu \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r+s-\nu}{r+s-1}.$$

Η υπεργεωμετρική κατανομή δύναται να προσεγγισθεί, για μεγάλο $u = r+s$ από τη διωνυμική κατανομή σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την υπεργεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας (4.1) με $u = r+s$. Αν $u, r, s \to \infty$ έτσι ώστε $\lim_{u\to\infty} \frac{r}{u} = p$, τότε*

$$\lim_{u\to\infty} \binom{\nu}{x} \frac{(r)_x (s)_{\nu-x}}{(u)_\nu} = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x},\ x = 0,1,\ldots,\nu. \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την υπόθεση $\lim_{u\to\infty} \frac{r}{u} = p$ και επειδή $\frac{s}{u} = 1 - \frac{r}{u}$ έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} \frac{s}{u} = 1 - \lim_{u\to\infty} \frac{r}{u} = 1 - p.$$

Επίσης $\lim_{u\to\infty} \frac{c}{u} = 0$ για σταθερό (ως προς u) αριθμό c. Επομένως

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(r)_x}{u^x} = \lim_{u\to\infty} \frac{r}{u}\left(\frac{r}{u} - \frac{1}{u}\right)\cdots\left(\frac{r}{u} - \frac{x-1}{u}\right) = p^x,$$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(s)_{\nu-x}}{u^{\nu-x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{s}{u}\left(\frac{s}{u} - \frac{1}{u}\right)\cdots\left(\frac{r}{u} - \frac{\nu-x-1}{u}\right) = (1-p)^{\nu-x},$$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(u)_\nu}{u^\nu} = \lim_{u\to\infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{u}\right)\cdots\left(1 - \frac{\nu-1}{u}\right) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές αυτές σχέσεις συνάγουμε την (4.4).

Παράδειγμα 4.2. *Εκτίμηση του αριθμού των ψαριών λίμνης (Feller, 1968).* Ας υποθέσουμε ότι σε μια λίμνη υπάρχει ένας άγνωστος αριθμός u ψαριών. Από τη λίμνη αυτή ψαρεύουμε r ψάρια τα οποία σημαδεύουμε με μια ανεξίτηλη κόκκινη κηλίδα και αφήνουμε και πάλι ελεύθερα. Μετά από ορισμένο χρόνο ψαρεύουμε από τη λίμνη αυτή ν ψάρια και παρατηρούμε ότι κ από αυτά έχουν την κόκκινη κηλίδα. Να υπολογισθεί η τιμή του u η οποία μεγιστοποιεί την πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ το δεύτερο δείγμα ψαριών να περιέχει κ σημαδεμένα ψάρια.

Παρατηρούμε ότι στο στοχαστικό αυτό πείραμα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του υπεργεωμετρικού στοχαστικού προτύπου (μοντέλου) και σύμφωνα με την (4.3) η πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ δίδεται από την

$$p_{u,\kappa} = \binom{r}{\kappa}\binom{u-r}{\nu-\kappa} \Big/ \binom{u}{\nu}.$$

Για τη μεγιστοποίηση ως προς u της πιθανότητας αυτής σημειώνουμε ότι το πηλίκο

$$\frac{p_{u,\kappa}}{p_{u-1,\kappa}} = \frac{(u-r)(u-v)}{(u-r-v+\kappa)u} = \frac{1-(v/u)}{1-(v-\kappa)/(u-r)}$$

είναι μεγαλύτερο του 1 αν $(v/u) < (v-\kappa)/(u-r)$ και μικρότερο του 1 αν $(v/u) > (v-\kappa)/(u-r)$. Επομένως η πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ ως συνάρτηση του u αυξάνει στο διάστημα $u < vr/\kappa$, φθίνει στο διάστημα $u > vr/\kappa$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $u = [vr/\kappa]$, όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x. Η τιμή αυτή του u η οποία μεγιστοποιεί την πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ αποτελεί μια *εκτίμηση* του αριθμού των ψαριών της λίμνης.

5. ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Ορισμός 5.1. *Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x = 0,1,\ldots, \tag{5.1}$$

όπου $0 < \lambda < \infty$. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0,\ x = 0,1,\ldots,\ f(x) = 0,\ x \notin \{0,1,\ldots\}$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης e^z σε δυναμοσειρά,

$$e^z = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{z^x}{x!}, \tag{5.2}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X δίδεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \sum_{\kappa=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}, & 0 \le x < \infty, \end{cases} \tag{5.3}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Ο Πίνακας 2 του παραρτήματος δίδει τη συνάρτηση πιθανότητας (5.1) της κατανομής Poisson για $\lambda = 0{,}1,\ 0{,}2,\ldots,10$.

Η κατανομή Poisson μελετήθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Simeon Denia Poisson (1781-1840) ως προσεγγιστική κατανομή της διωνυμικής κατανομής. Σχετικά ο Poisson απέδειξη το 1837 το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (2.5). Αν για $v \to \infty$ το $p \to 0$ έτσι ώστε $vp = \lambda$ (ή γενικότερα $\lim_{v\to\infty} vp = \lambda$), όπου $\lambda > 0$ σταθερή, τότε*

$$\lim_{\nu\to\infty}\binom{\nu}{x}p^x(1-p)^{\nu-x}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\dots . \tag{5.4}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση πιθανότητας (2.5) της διωνυμικής κατανομής, σύμφωνα με την υπόθεση $p=\lambda/\nu$, $\nu=1,2,\dots$, δύναται να γραφεί ως εξής

$$\binom{\nu}{x}p^x(1-p)^{\nu-x}=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{(\nu)_x}{\nu^x}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{x}.$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές σχέσεις

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{(\nu)_x}{\nu^x}=\lim_{\nu\to\infty}1\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{\nu}\right)=1,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu}=e^{-\lambda},\ \lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{x}=1,$$

συνάγουμε την (5.4).

Παρατήρηση 5.1. Η προσέγγιση (5.4) είναι ικανοποιητική για $\nu\geq 20$ και $p\leq 10/\nu$. Επειδή η πιθανότητα p εμφάνισης ενός ενδεχομένου (επιτυχίας) υποτίθεται μικρή (θεωρητικά $p\to 0$ για $\nu\to\infty$) η κατανομή Poisson θεωρείται ως *κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων*. Επίσης αναφέρεται και ως *νόμος των μικρών αριθμών*.

Σχετικά με τη μέση τιμή και τη διασπορά της κατανομής Poisson αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας την (5.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu=E(X)=\lambda,\ \sigma^2=V(X)=\lambda. \tag{5.5}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu=E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (5.2) συνάγουμε την πρώτη από τις (5.5).

Η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu_{(2)}=E[X(X-1)]=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{\chi=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (5.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_{(2)}=E[X(X-1)]=\lambda^2.$$

Επομένως

$$\sigma^2=V(X)=E[X(X-1)]+E(X)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Παράδειγμα 5.1. Ας υποθέσουμε ότι η παραγωγή ενός βιομηχανικού προϊόντος γίνεται κάτω από στατιστικό έλεγχο ποιότητας έτσι ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις του στοχαστικού προτύπου (μοντέλου) των ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli. Μια μονάδα του προϊόντος αυτού θεωρείται ελαττωματική αν δεν πληροί όλες τις καθορισμένες προδιαγραφές και η πιθανότητα γι' αυτό έστω ότι είναι $p = 0{,}01$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε ένα κιβώτιο 20 μονάδων του προϊόντος αυτού υπάρχει μια το πολύ ελαττωματική.

Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών μονάδων του προϊόντος στο κιβώτιο των 20 μονάδων. Η τυχαία αυτή μεταβλητή έχει τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = \binom{20}{x}(0{,}01)^x (0{,}99)^{20-x}, \ x = 0,1,...,20 .$$

Επειδή το $\nu = 20$ είναι μεγάλο και το $p = 0{,}01$ μικρό έτσι ώστε $\lambda = \nu p = 0{,}2$ είναι μικρότερο του 10 η προσέγγιση αυτής από την Poisson με

$$P(X = x) = e^{-0{,}2}\frac{(0{,}2)^x}{x!}, \ x = 0,1,...$$

είναι ικανοποιητική. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 του παραρτήματος, παίρνουμε

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8187 + 0{,}1637 = 0{,}9824 .$$

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιώντας τη διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας, παίρνουμε

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8180 + 0{,}1652 = 0{,}9832 .$$

Παρατήρηση 5.2. *Στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) Poisson.* Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα στο οποίο ένα ενδεχόμενο A μπορεί να εμφανίζεται (πραγματοποιείται) σε διάφορες χρονικές στιγμές ή σε διάφορα σημεία του χώρου (μονοδιάστατου, διδιάστατου ή τριδιάστατου). Για παράδειγμα σε ένα σταθμό βενζίνης το ενδεχόμενο άφιξης αυτοκινήτου μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή όπως και σε μια πλάκα Petri με βακτηρίδια το ενδεχόμενο παρατήρησης με το μικροσκόπιο σκοτινού σημείου (το οποίο σημαίνει την ύπαρξη αποικίας βακτηριδίων) μπορεί να εμφανισθεί σε οποιοδήποτε σημείο αυτής (δηλαδή σημείο του επιπέδου). Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες του πειράματος παραμένουν αμετάβλητες στο χρόνο ή το χώρο και ότι ο αριθμός εμφανίσεων του A σε δύο ξένα μεταξύ τους χρονικά ή χωρικά διαστήματα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα όπως το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί μια φορά σε ένα μικρό χρονικό διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του, ενώ η πιθανότητα όπως το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί δύο ή περισσότερες φορές στο μικρό αυτό χρονικό διάστημα είναι αμελητέα.

Στο τυχαίο αυτό πείραμα ας παραστήσουμε με X_t τον αριθμό εμφανίσεων του A σε χρονικό ή χωρικό διάστημα μήκους t. Για δεδομένο t, η X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει τις τιμές $0,1,...$, ενώ όταν το t μεταβάλλεται, η X_t, $t \ge 0$, ορίζει μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών η οποία καλείται *στοχαστική ανέλιξη (ή διαδικασία)*.

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πιθανότητας της X_t χωρίζουμε το διάστημα $(0,t]$ σε ένα μεγάλο αριθμό ν υποδιαστημάτων μήκους $\Delta t = t/\nu$. Σε κάθε τέτοιο διάστημα θα έχουμε σύμφωνα με τις συνθήκες του πειράματος είτε μια πραγματοποίηση του A (επιτυχία) με πιθανότητα $p_\nu \cong \theta \Delta t = \theta t/\nu$, $\theta > 0$, είτε καμμιά πραγματοποίηση του A (αποτυχία) με πιθανότητα $q_\nu = 1 - p_\nu$. Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X_t εμφανίσεων του A στα ν υποδιαστήματα (ανεξάρτητες δοκιμές) είναι η

$$P(X_t = x) \cong \binom{\nu}{x} p_\nu^x q_\nu^{\nu-x},\ x = 0,1,\ldots,\ p_\nu \cong \frac{\theta t}{\nu}.$$

Επειδή για $\Delta t \to 0$, το $\nu \to \infty$ και $\lim\limits_{\nu\to\infty} \nu p_\nu = \theta t$, η διωνυμική αυτή συνάρτηση πιθανότητας στο όριο γίνεται

$$P(X_t = x) = e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^x}{x!}\quad x = 0,1,\ldots,\ (\theta > 0,\ t > 0). \tag{5.6}$$

Αξίζει να σημειώσουμε μερικά από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα φαινομένων που εμφανίζονται στην πράξη και ικανοποιούν τις συνθήκες του πιθανοθεωρητικού μοντέλου της κατανομής Poisson.

(α) Μια ραδιενεργός πηγή εκπέμπει σωμάτια *α*. Ο αριθμός των σωματίων που φθάνουν σε δεδομένο τμήμα του χώρου σε χρόνο *t* αποτελεί το πιο γνωστό παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Στο περίφημο πείραμα των Rutherford, Chadwick και Ellis (1920) παρατηρήθηκε μια ραδιενεργός πηγή για $\nu = 2608$ χρονικά διαστήματα των 7,5 δευτερολέπτων. Τα παρατηρηθέντα αποτελέσματα βρέθηκαν πολύ κοντά στα αντίστοιχα θεωρητικά που δίδει η κατανομή Poisson με $\lambda = 3{,}87$.

(β) Είναι γνωστό το πρόβλημα των λανθασμένων τηλεφωνικών συνδέσεων, όπου αντί του αριθμού που έχει σχηματισθεί στο κατράν καλείται άλλος αριθμός. Έχει πειραματικά παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των λανθασμένων τηλεφωνικών συνδέσεων ακολουθεί την κατανομή Poisson. Επίσης ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο στη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ακολουθεί την κατανομή Poisson.

(γ) Ο αριθμός των τροχαίων ατυχημάτων σε μια πόλη ή σε κάποιο τμήμα του οδικού δικτύου στη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου (ημέρα, μήνας, χρόνος κ.λπ.) ακολουθεί την κατανομή Poisson. Το μοντέλο όμως αυτό δεν μπορεί να εφαρμοσθεί για την περίπτωση του αριθμού των αυτοκινήτων που συγκρούονται γιατί σε μερικά δυστυχήματα εμπλέκονται περισσότερα από ένα αυτοκίνητα.

(δ) Ο αριθμός των επιβατών μιας αεροπορικής πτήσης που δεν εμφανίζονται την ώρα της αναχώρησης ενώ έχουν κρατήσει θέσεις. Με αυτό υπόψη οι αεροπορικές εταιρείες έχουν σε αναμονή ένα μικρό κατάλογο επιβατών από τον οποίο και συμπληρώνουν τις κενές θέσεις του αεροσκάφους.

(ε) Κατά τον βομβαρδισμό ενός στόχου οι βόμβες πέφτουν συνήθως σε διάφορα σημεία κοντά στο στόχο. Ο αριθμός των βομβών που πέφτουν σε επιφάνεια *t* τετραγωνικών μέτρων γύρω από το στόχο ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αυτό έχει αποδειχθεί και από τα στατιστικά στοιχεία του βομβαρδισμού του Λονδίνου με ιπτάμενες βόμβες στη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου.

(στ) Μια πλάκα Petri με αποικίες βακτηριδίων, οι οποίες με το μικροσκόπιο είναι ορατές ως σκοτεινές κηλίδες, χωρίζεται σε μικρά τετραγωνίδια. Ο αριθμός των βακτηριδίων σε επιφάνεια *t* τετραγωνιδίων ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Εκτός από τα παραδείγματα αυτά υπάρχουν και άλλα φαινόμενα ή πειράματα, ίσως λιγότερο γνωστά, στα οποία μπορεί να εφαρμοσθεί η κατανομή Poisson. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα εφαρμογής της κατανομής Poisson.

Παράδειγμα 5.2. Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση. Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται (α) στη δεύτερη θέση και (β) στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

Ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = e^{-4}\frac{4^x}{x!},\ x = 0,1,\ldots .$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 του παραρτήματος παίρνουμε για την περίπτωση (α)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 = 0{,}9084,$$

που σημαίνει ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι το άτομο θα ταξιδέψει. Για την περίπτωση (β) παίρνουμε

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{x=0}^{4} P(X = x) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 - 0{,}1954 - 0{,}1954 = 0{,}3711,$$

που σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το άτομο να ταξιδέψει.

Παράδειγμα 5.3. Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Αθήνα από μια σπάνια ασθένεια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες: (α) να υπάρξουν το πολύ 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα, (β) να υπάρξουν το πολύ 4 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε χρονικό διάστημα 2 μηνών, (γ) να υπάρξουν 2 τουλάχιστο μήνες με 2 το πολύ θανάτους στο επόμενο τρίμηνο.

Ο αριθμός X_t των θανάτων από την ασθένεια αυτή σε διάστημα t μηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με

$$P(X_t = x) = e^{-3t}\frac{(3t)^x}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots .$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 του παραρτήματος, παίρνουμε (α)

$$P(X_1 \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$$

και (β)

$$P(X_2 \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} e^{-6}\frac{6^x}{x!} = 0{,}0025 + 0{,}0149 + 0{,}0446 + 0{,}0892 + 0{,}1339 = 0{,}2851.$$

Ο αριθμός Y των μηνών με 2 το πολύ θανάτους ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με

$$P(Y = y) = \binom{3}{y}(0{,}4232)^y(0{,}5768)^{3-y},\ y = 0,1,2,3$$

και έτσι (γ)

$$P(Y \geq 2) = \binom{3}{2}(0{,}4232)^2(0{,}5768) + \binom{3}{3}(0{,}4232)^3 0{,}5768 .$$

6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι δύο διακεκριμένοι κύβοι ρίχνονται 12 φορές. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X των ρίψεων στις οποίες ο αριθμός του πρώτου κύβου υπερβαίνει τον αριθμό του δευτέρου κύβου.

2. Έστω ότι σε 10 ρίψεις ενός μη αμερόληπτου νομίσματος η πιθανότητα να εμφανισθεί 5 φορές κεφαλή είναι διπλάσια της πιθανότητας να εμφανισθεί 4 φορές κεφαλή. Να υπολογισθεί η πιθανότητα σε 5 ρίψεις του νομίσματος να εμφανισθεί μια τουλάχιστο φορά κεφαλή.

3. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι $p = 0{,}3$. Να υπολογισθεί ο αριθμός ν των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να κτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστο μια φορά να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0,9.

4. Έστω ότι ένα σωμάτιο υπό την επίδραση δυνάμεων κινείται σε ευθεία ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$. Υποθέτουμε ότι τα διάφορα βήματα είναι ανεξάρτητα και ότι το σωμάτιο βρίσκεται αρχικά στη θέση 0. Αν X_ν είναι η θέση του σωματίου μετά ν βήματα, δείξετε ότι (α) η τυχαία μεταβλητή $Y_\nu = (X_\nu + \nu)/2$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (ν, p) και (β) $E(X_\nu) = \nu(2p-1)$, $V(X_\nu) = 4\nu pq$.

5. Ένα χαλύβδινο έλασμα λυγίζεται πολλές φορές μέχρις ότου κοπεί. Η πιθανότητα να κοπεί σε οποιαδήποτε λύγιση είναι σταθερή και ίση με $p = 0{,}1$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να κοπεί το έλασμα μέχρι την τρίτη λύγιση και (β) ο μέσος αριθμός των λυγίσεων που απαιτούνται για να κοπεί το έλασμα.

6. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι 0,9. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 5 το πολύ βολές για να κτυπηθεί ο στόχος και (β) ο μέσος αριθμός των βολών που απαιτούνται για να κτυπηθεί ο στόχος.

7. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/2$ και έστω X ο αριθμός αριθμός των δοκιμών πριν από την εμφάνιση για πρώτη φορά δύο συνεχόμενων επιτυχιών. Δείξετε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{2^{x+2}} \sum_{\kappa=0}^{[x/2]} \binom{x-\kappa}{\kappa}, \; x = 0, 1, \ldots .$$

8. Έστω ότι ένα κίβδηλο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά μέχρις ότου εμφανισθεί για ν-οστή φορά το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται. Αν p είναι η πιθανότητα όπως σε μια ρίψη του νομίσματος η όψη γράμματα να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = \nu, \nu+1, \ldots$ και (β) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

9. Έστω ότι δύο παίκτες α και β αγωνίζονται σε μια σειρά παιγνιδιών και νικητής αναδεικνύεται εκείνος που κερδίζει πρώτος ν παιγνίδια και ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα σε οποιοδήποτε παιγνίδι να κερδίσει ο α είναι p και ο β είναι $q = 1 - p$. Αν Z είναι ο αριθμός των νικών που ο ηττημένος υπολείπεται του νικητή κατά τη λήξη της σειράς των παιγνιδιών να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = 1, 2, ..., \nu$.

10. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) να πραγματοποιηθεί άρτιος αριθμός επιτυχιών σε ν δοκιμές και (β) να απαιτηθεί περιττός αριθμός δοκιμών μέχρι την r–οστή επιτυχία.

11. Από τους 125 εργαζόμενους σε μια επιχείρηση 50 είναι γυναίκες. Έστω ότι για κάποια συγκεκριμένη εργασία επιλέγονται τυχαία 5 εργαζόμενοι. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως μεταξύ των 5 οι 2 είναι γυναίκες, χρησιμοποιώντας (α) την ακριβή κατανομή του αριθμού X των γυναικών μεταξύ των 5 και (β) κατάλληλη προσέγγιση της κατανομής αυτής.

12. Από μια κληρωτίδα που περιέχει ν κλήρους αριθμημένους από το 1 μέχρι το ν, εξάγονται διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο χωρίς επανάθεση κ κλήροι. Έστω X ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται. Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$ και (β) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

13. Έστω ότι ένα βιβλίο 350 σελίδων περιέχει 42 τυπογραφικά λάθη. Αν τα λάθη αυτά είναι τυχαία κατανεμημένα στο βιβλίο να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) όπως μια σελίδα που εκλέγεται τυχαία περιέχει x λάθη και (β) όπως 10 σελίδες που εκλέγονται τυχαία μόνο 3 δεν έχουν λάθος.

14. Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι 0,1% του πληθυσμού εμπλέκεται σε ένα τουλάχιστο δυστύχημα κάθε χρόνο. Αν η εταιρεία αυτή έχει ασφαλίσει 5000 άτομα να υπολογισθούν οι πιθανότητες να εμπλακούν σε δυστύχημα (α) το πολύ 3 πελάτες της τον επόμενο χρόνο (β) το πολύ 2 σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο χρόνια και (γ) το πολύ 4 στα επόμενα δύο χρόνια.

15. Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων σε νοσοκομείο των Αθηνών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σε ένα μήνα να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα και (β) να συμβούν το πολύ δύο θάνατοι σε δύο μήνες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η απλούστερη συνεχής κατανομή πιθανότητας είναι η ομοιόμορφη η οποία εκχωρεί ίσες (ομοιόμορφες) πιθανότητες στα στοιχειώδη δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου (στοχαστικού) πειράματος με συνεχή (μη απαριθμητό) δειγματικό χώρο *Ω*. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή *X* ορισμένη στον *Ω* με πεδίο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha < \beta$ πραγματικοί αριθμοί. Η ομοιόμορφη εκχώρηση πιθανότητας εκφράζεται από τη σχέση

$$P(x_1 < X \leq x_2) = c(x_2 - x_1),\ \alpha \leq x_1 < x_2 \leq \beta, \tag{1.1}$$

όπου *c* προσδιοριστέα σταθερή. Θέτοντας $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}. \tag{1.2}$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, στην οποια η τυχαία μεταβλητή *X* είναι συνεχής, οπότε $P(X = x) = 0$ για κάθε $x \in R$, η εκχώρηση πιθανότητας δεν γίνεται σε σημεία αλλά σε διαστήματα και είναι ανάλογη του μήκους των. Τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι διαστήματα του ιδίου μήκους είναι ισοπίθανα.

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής *X*, όπως προκύπτει από τις (1.1) και (1.2), δίδεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x < \beta \\ 1, & \beta \leq x < \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και έτσι παραγωγίζοντάς την συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής *X*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & x < \alpha \ \text{ ή } \ x > \beta. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ορισμός 1.1. *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας την (1.4). Η κατανομή της τ.μ. X συμβολίζεται με* $U(\alpha, \beta)$ *και καλείται ομοιόμορφη ή ορθογώνια στο διάστημα* $[\alpha, \beta]$. *Τα σημεία α και β είναι παράμετροι της κατανομής.*

Σχετικά με τις ροπές της ομοιόμορφης κατανομής αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ομοιόμορφη κατανομή* $U(\alpha,\beta)$. *Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2},\ \sigma^2 = V(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \tag{1.5}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, είναι

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x dx = \left[\frac{x^2}{2(\beta-\alpha)}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}$$

και επειδή $(\beta^2-\alpha^2) = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$,

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Επίσης είναι

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3(\beta-\alpha)}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}$$

και επειδή $\beta^3-\alpha^3 = (\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$,

$$E(X^2) = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}.$$

Η διασπορά της τ.μ. X είναι τότε

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} - \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε ένα όργανο μέτρησης με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Το παρεχόμενο από το όργανο αυτό τέταρτο δεκαδικό ψηφίο αποτελεί στρογγύλευση προς τον πλησιέστερο ακέραιο. Τα σφάλματα που προκύπτουν από τη στρογγύλευση της μέτρησης δύνανται να θεωρηθούν ότι έχουν την ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha,\beta)$ με $\alpha = -10^{-4}/2$, $\beta = 10^{-4}/2$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα όπως το σφάλμα μέτρησης μιας ποσότητας είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερο του $10^{-4}/3$ και (β) η μέση τιμή και η διασπορά του σφάλματος μέτρησης.

(α) Χρησιμοποιώντας την (1.3) με $\alpha = -10^{-4}/2$, $\beta = 10^{-4}/2$ παίρνουμε

$$P(|X|>10^{-4}/3) = 1-P(|X|\le 10^{-4}/3) = 1-[F(10^{-4}/3)-F(-10^{-4}/3)]$$
$$= 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(β) Σύμφωνα με τις (1.5) έχουμε

$$\mu = E(X) = 0,\ \sigma^2 = V(X) = 10^{-8}/12.$$

Παράδειγμα 1.2. Έστω ότι ο σειρμός φθάνει σε συγκεκριμένο σταθμό του υπογείου σιδηροδρόμου κάθε 10 λεπτά, αρχίζοντας τα δρομολόγιά του στις 5 π.μ. Αν ένας επιβάτης φθάνει στο σταθμό σε χρόνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα 7:20 ως 7:40 να υπολογισθούν οι πιθανότητες να περιμένει το σειρμό (α) το πολύ 4 λεπτά και (β) τουλάχιστο 7 λεπτά.

Έστω X ο χρόνος άφιξης του επιβάτη στο σταθμό, μετρούμενος σε λεπτά με αρχή τη χρονική στιγμή 7:20. Τότε η τ.μ. X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,20]$ και έτσι

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{20}, & 0\le x<20\\ 1, & x\ge 20.\end{cases}$$

(α) Το ενδεχόμενο A ο επιβάτης να περιμένει το πολύ 4 λεπτά είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να φθάσει στο σταθμό στο διάστημα 7:26 ως 7:30 ή στο διάστημα 7:36 ως 7:40. Επομένως

$$P(A)=P(6<X\le 10)+P(16<X\le 20)=\{F(10)-F(6)\}+\{F(20)-F(16)\}=\frac{2}{5}.$$

(β) Το ενδεχόμενο B ο επιβάτης να περιμένει τουλάχιστο 7 λεπτά είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να φθάσει στο σταθμό στο διάστημα 7:20 ως 7:23 ή 7:30 ως 7:33. Επομένως

$$P(B)=P(0<X\le 3)+P(10<X\le 13)=\{F(3)-F(0)\}+\{F(13)-F(10)\}=\frac{3}{10}.$$

2. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ERLANG

2.1. Εκθετική κατανομή

Ορισμός 2.1. *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & 0\le x<\infty\\ 0, & -\infty<x<0,\end{cases} \tag{2.1}$$

όπου $0<\theta<\infty$. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται εκθετική με παράμετρο θ.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση (2.1) είναι μη αρνητική και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty}\theta e^{-\theta x}dx=\left[-e^{-\theta x}\right]_0^{\infty}=1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας.

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X, σύμφωνα με την (2.10) του Κεφ. 2, είναι η

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0\\ 1-e^{-\theta x}, & 0\le x<\infty.\end{cases} \tag{2.2}$$

Θεώρημα 2.1. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας τη (2.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu=E(X)=\frac{1}{\theta},\ \sigma^2=V(X)=\frac{1}{\theta^2}. \tag{2.3}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} \theta\, xe^{-\theta x}dx = \frac{1}{\theta}\int_{0}^{\infty} ye^{-y}dy\,,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο μετασχηματισμός $y = \theta x$. Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{0}^{\infty} ye^{-y}dy = -\int_{0}^{\infty} yde^{-y} = -[ye^{-y}]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-y}dy = -[ye^{-y} + e^{-y}]_0^{\infty} = 1$$

και έτσι

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}.$$

Ομοίως

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \theta x^2 e^{-\theta x}dx = \frac{1}{\theta^2}\int_{0}^{\infty} y^2 e^{-y}dy$$

και επειδή

$$\int_{0}^{\infty} y^2 e^{-y}dy = -\int_{0}^{\infty} y^2 de^{-y} = -[y^2 e^{-y}]_0^{\infty} + 2\int_{0}^{\infty} ye^{-y}dy = -[y^2 e^{-y} + 2ye^{-y} + 2e^{-y}]_0^{\infty} = 2$$

παίρνουμε

$$E(X^2) = \frac{2}{\theta^2}.$$

Επομένως

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\theta^2}.$$

Η ιδιότητα του *αμνήμονος* είναι χαρακτηριστική της εκθετικής κατανομής. Την ιδιότητα αυτή αποδεικύουμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας τη (2.1). Τότε*

$$P(X > x + y \mid X > x) = P(X > y)\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,. \qquad (2.4)$$

Απόδειξη. Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X > x + y\}$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{X > x\}$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\{X > x + y\} \subseteq \{X > x\}$ και χρησιμοποιώντας την (2.2), είναι ίση με

$$P(X > x + y \mid X > x) = \frac{P(X > x + y, X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\theta(x+y)}}{e^{-\theta x}} = e^{-\theta y}$$

και επειδή

$$P(X > y) = 1 - F(y) = e^{-\theta y}$$

έπεται η (2.4).

Παρατήρηση 2.1. Ας θεωρήσουμε μια ανέλιξη Poisson X_t, $t \geq 0$ με μέση τιμή $E(X_t) = \theta t$ (βλ. Παρατήρηση 5.2 του Κεφ. 3) και ας παραστήσουμε με T το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση της πρώτης επιτυχίας (εμφάνισης του ενδεχομένου A). Επειδή το ενδεχόμενο $\{T > t\}$, όπως η πρώτη επιτυχία πραγματοποιηθεί μετά τη χρονική στιγμή t, είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X_t = 0\}$, όπως ο αριθμός των επιτυχιών μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι μηδέν, χρησιμοποιώντας την (5.6) του Κεφ. 3, συνάγουμε τη σχέση

$$P(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\theta t}, \; t \geq 0$$

και από αυτή τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ 1 - e^{-\theta t}, & 0 \leq t < \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη (2.2) ο χρόνος αναμονής T μέχρι την πραγματοποίηση της πρώτης επιτυχίας σε μια ανέλιξη Poisson έχει εκθετική κατανομή. Γενικότερα δύναται να δειχθεί ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επιτυχιών σε μια ανέλιξη Poisson έχουν εκθετική κατανομή.

Παράδειγμα 2.1. Έστω ότι η διάρκεια σε λεπτά ενός τηλεφωνήματος, σ' ένα δημόσιο τηλεφωνικό θάλαμο, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10 λεπτά. Επίσης, έστω ότι τη στιγμή που κάποιος μπαίνει στον τηλεφωνικό αυτό θάλαμο για ένα τηλεφώνημα ένας άλλος φθάνει εκεί και δεν συναντά κανένα να περιμένει. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες ο δεύτερος να περιμένει (α) περισσότερο από 10 λεπτά (β) μεταξύ 10 και 20 λεπτών.

Αν X είναι η διάρκεια του τηλεφωνήματος του πρώτου ατόμου, τότε

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x/10}, & x \geq 0 \end{cases}$$

και οι ζητούμενες πιθανότητες είναι (α)

$$P(X > 10) = 1 - F(10) = e^{-1} = 0{,}3679,$$

και (β)

$$P(10 < X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} = 0{,}3679 - 0{,}1353 = 0{,}2326\,.$$

2.2. Κατανομή Erlang

Ορισμός 2.2. *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\nu}}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\theta x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

όπου ν θετικός ακέραιος και $0 < \theta < \infty$. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κατανομή Erlang με παραμέτρους ν και θ.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση (2.6) είναι μη αρνητική και επειδή

$$I_{\nu} = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx = (\nu-1)!\,, \; \nu = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\theta^{\nu}}{(\nu-1)!}\int_{0}^{\infty} x^{\nu-1}e^{-\theta x}dx = \frac{1}{(\nu-1)!}\int_{0}^{\infty} y^{\nu-1}e^{-y}dy = 1\,,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας.

Το ολοκλήρωμα I_{ν}, $\nu = 1, 2,...$ δύναται να υπολογισθεί, εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ως εξής:

$$I_{\nu+1} = \int_{0}^{\infty} x^{\nu}e^{-x}dx = -\int_{0}^{\infty} x^{\nu}de^{-x} = -[x^{\nu}e^{-x}]_{0}^{\infty} + \nu\int_{0}^{\infty} x^{\nu-1}e^{-x}dx$$

και έτσι

$$I_{\nu+1} = \nu I_{\nu}\,,\ \nu = 1, 2,\dots . \qquad (2.8)$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την αναγωγική αυτή σχέση και επειδή

$$I_{1} = \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1\,,$$

συνάγουμε τη (2.7).

Θεώρημα 2.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Erlang με συνάρτηση πυκνότητας τη (2.6). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \frac{\nu}{\theta}\,,\ \sigma^{2} = V(X) = \frac{\nu}{\theta^{2}}\,. \qquad (2.9)$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{\theta^{\nu}}{(\nu-1)!}\int_{0}^{\infty} x^{\nu}e^{-\theta x}dx = \frac{1}{\theta(\nu-1)!}\int_{0}^{\infty} y^{\nu}e^{-y}dy$$

και χρησιμοποιώντας την (2.7) συνάγουμε την

$$E(X) = \frac{\nu!}{\theta(\nu-1)!} = \frac{\nu}{\theta}\,.$$

Ομοίως

$$E(X^{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2}f(x)dx = \frac{\theta^{\nu}}{(\nu-1)!}\int_{0}^{\infty} x^{\nu+1}e^{-\theta x}dx = \frac{1}{\theta^{2}(\nu-1)!}\int_{0}^{\infty} y^{\nu+1}e^{-y}dy$$

και

$$E(X^{2}) = \frac{(\nu+1)!}{\theta^{2}(\nu-1)!} = \frac{(\nu+1)\nu}{\theta^{2}}\,.$$

Επομένως η διασπορά της τ.μ. X είναι

$$\sigma^{2} = V(X) = E(X^{2}) - [E(X)]^{2} = \frac{(\nu+1)\nu}{\theta^{2}} - \frac{\nu^{2}}{\theta^{2}} = \frac{\nu}{\theta^{2}}\,.$$

Παρατήρηση 2.2. Ας θεωρήσουμε μια ανέλιξη Poisson X_t, $t \geq 0$ με μέση τιμή $E(X_t) = \theta t$ (βλ. παρατήρηση 5.2 του Κεφ. 3) και ας παραστήσουμε με T_ν το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση της *ν*-οστής επιτυχίας (εμφάνισης του ενδεχομένου *A*). Επειδή το ενδεχόμενο $\{T_\nu > t\}$, όπως η *ν*-οστή επιτυχία πραγματοποιηθεί μετά τη χρονική στιγμή *t* είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X_t < \nu\}$, όπως ο αριθμός των επιτυχιών μέχρι τη χρονική στιγμή *t* είναι μικρότερος του *ν*, χρησιμοποιώντας την (5.6) του Κεφ. 3, συνάγουμε τη σχέση

$$P(T_\nu > t) = P(X_t < \nu) = \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} P(X_t = \kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^\kappa}{\kappa!}, \ t \geq 0 .$$

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T_ν δίδεται τότε από την

$$F(t) = 1 - e^{-\theta t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\theta t)^\kappa}{\kappa!}, \ t \geq 0, \tag{2.10}$$

με $F(t) = 0, \ t < 0$. Παραγωγίζοντας αυτήν ως προς *t* παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} F(t) = \theta e^{-\theta t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\theta t)^\kappa}{\kappa!} - e^{-\theta t} \sum_{\kappa=1}^{\nu-1} \frac{\theta(\theta t)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}$$

και επομένως η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. T_ν είναι η

$$f(t) = \frac{\theta^\nu}{(\nu-1)!} t^{\nu-1} e^{-\theta t}, \ 0 \leq t < \infty .$$

Η κατανομή αυτή μελετήθηκε από το Δανό μαθηματικό A. K. Erlang (1878-1929). Σημειώνουμε ότι η σχέση (2.10), επειδή

$$F(t) = \int_0^t \frac{\theta^\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\theta x} dx$$

συνεπάγεται τη χρήσιμη στις εφαρμογές σχέση

$$F(t) = \int_0^t \frac{\theta^\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\theta x} dx = 1 - e^{-\theta t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\theta t)^\kappa}{\kappa!} . \tag{2.11}$$

Παράδειγμα 2.2. Η ημερήσια κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας σε εκατομύρια κιλοβατόρες σε μια πόλη είναι μια τυχαία μεταβλητή *X* η οποία ακολουθεί την κατανομή Erlang με μέση τιμή $E(X) = 10$ εκατομύρια κιλοβατόρες και διασπορά $V(X) = 5$ εκατομύρια κιλοβατόρες. Η μέγιστη ποσότητα ενέργειας που μπορεί να δοθεί στην πόλη σε μια μέρα είναι 15 εκατομύρια κιλοβατόρες. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να μη ικανοποιηθούν οι ημερήσιες ανάγκες της πόλης σε ηλεκτρική ενέργεια.

Η τυχαία μεταβλητή *X* έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{\theta^\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\theta x}, \ 0 \leq x < \infty$$

όπου *ν* θετικός ακέραιος και $0 < \theta < \infty$. Η μέση τιμή και διασπορά της *X*, σύμφωνα με τις (2.9) είναι

$$E(X) = \frac{\nu}{\theta}, \ V(X) = \frac{\nu}{\theta^2}$$

και επειδή $E(X)=10$, $V(X)=5$, παίρνουμε

$$\nu=4\,,\ \theta=2/5\,.$$

Επομένως

$$f(x)=\frac{(2/5)^4}{3!}x^3e^{-2x/5}\,,\ 0\le x<\infty$$

και η πιθανότητα να μη ικανοποιηθούν οι ημερήσιες ανάγκες της πόλης σε ηλεκτρική ενέργεια δίδεται από την

$$P(X>15)=\int_{15}^{\infty}\frac{(2/5)^4}{3!}x^3e^{-2x/5}dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.11) και τον Πίνακα 2 της συνάρτησης πιθανότητας της κατανομής παίρνουμε

$$P(X>15)=\sum_{\kappa=0}^{3}e^{-6}\frac{6^\kappa}{\kappa!}=0{,}1422\,.$$

Παράδειγμα 2.3. Έστω ότι ο αριθμός των τραυματιών σε αυτοκινητιστικά δυστυχήματα με σοβαρά κατάγματα που εισάγονται σε νοσοκομεία των Αθηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 8 άτομα ανά ημέρα. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα όπως ο χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τραυματία, μετρούμενος από την αρχή της ημέρας, είναι τουλάχιστο 12 ώρες και (β) ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τραυματία.

(α) Ο αριθμός X_t των τραυματιών σε χρονικό διάστημα t ωρών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $E(X_t)=\theta t$, όπου $\theta=8/24=1/3$. Ο χρόνος αναμονής T_3 ακολουθεί την κατανομή Erlang με συνάρτηση κατανομής

$$F(t)=1-e^{-t/3}\sum_{\kappa=0}^{2}\frac{(t/3)^\kappa}{\kappa!}\,.$$

Επομένως

$$P(T_3>12)=1-F(12)=1-e^{-4}\sum_{\kappa=0}^{2}\frac{4^\kappa}{\kappa!}$$

και χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 της συνάρτησης πιθανότητας της κατανομής Poisson παίρνουμε

$$P(T_3>12)=1-(0{,}0183+0{,}0733+0{,}1465)=0{,}7619\,.$$

(β) Η μέση τιμή της T_3, σύμφωνα με την πρώτη από τις (2.9), είναι

$$E(T_3)=\frac{3}{\theta}=9\,.$$

3. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η σημαντικότερη κατανομή πιθανότητας τόσο από θεωρητική άποψη όσο και από άποψη εφαρμογών είναι η κανονική κατανομή. Η κατανομή αυτή χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους De Moivre και Laplace για την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής για μεγάλο ν. Ο Gauss, ο οποίος διατύπωσε τη θεωρία των σφαλμάτων, χρησιμοποίησε την κανονική κατανομή ως προσεγγιστική της κατανομής των τυχαίων σφαλμάτων. Η ονομασία κανονική είναι σχετικά πρόσφατη και οφείλεται στον Karl Pearson.

Ορισμός 3.1. *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3.1}$$

όπου $-\infty < \mu < \infty$ *και* $0 < \sigma < \infty$ *είναι παράμετροι. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με* $N(\mu, \sigma^2)$ *και καλείται κανονική κατανομή με παραμέτρους* μ *και* σ^2.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση (3.1) είναι μη αρνητική και χρησιμοποιώντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $z = (x - \mu)/\sigma$ και $u = z/\sqrt{2}$ και το ολοκλήρωμα του Euler,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας.

Παρατήρηση 5.1. Η εξέχουσα θέση την οποία κατέχει η κανονική κατανομή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική οφείλεται και στη μεγάλη ποικιλία των εφαρμογών της. Συγκεκριμένα, τα τυχαία σφάλματα που εμφανίζονται σε διάφορες μετρήσεις έχουν κανονική κατανομή. Για το λόγο αυτό, η κανονική κατανομή αναφέρεται πολλές φορές και ως *κατανομή σφαλμάτων*. Επίσης, πολλές κατανομές τόσο διακριτές όσο και συνεχείς μπορούν κάτω από ορισμένες συνθήκες να προσεγγισθούν από την κανονική κατανομή. Το άθροισμα και ο μέσος όρος μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή ανεξάρτητα από το ποιά κατανομή ακολουθούν οι αρχικές παρατηρήσεις. Ακόμη, πολλά πληθυσμιακά χαρακτηριστικά (π.χ. ύψος, βάρος, βαθμολογία σε τεστ κλπ) ακολουθούν (περιγράφονται ικανοποιητικά από) την κανονική κατανομή

Η μέση τιμή και η διασπορά της κανονικής κατανομής συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας την (3.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$E(X) = \mu, \; V(X) = \sigma^2. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Θέτοντας $z = (x - \mu)/\sigma$, οπότε $x = \mu + \sigma z$, παίρνουμε

$$E(X) = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz = \mu + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-z^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} = \mu .$$

Η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$V(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx .$$

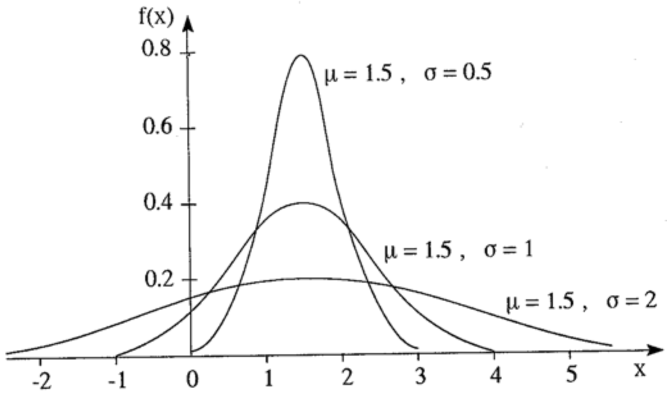
Θέτοντας $z = (x-\mu)/\sigma$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε

$$V(X) = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = -\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z de^{-z^2/2}$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[z e^{-z^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sigma^2 ,$$

και έτσι συμπληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.

Το διάγραμμα της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$, $-\infty < x < \infty$ της κανονικής κατανομής είναι κωδωνοειδούς μορφής. Η παράμετρος μ προσδιορίζει τη θέση της καμπύλης ως προς τον άξονα των x και η παράμετρος σ το οξύ ή πεπλατισμένο του σχήματός της. Συγκεκριμένα, όσο πιο μικρό είναι το σ τόσο πιο οξεία είναι η καμπύλη και όσο πιο μεγάλο είναι το σ τόσο πιο πεπλατισμένη είναι αυτή (βλέπε Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1. Η συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ της κανονικής κατανομής

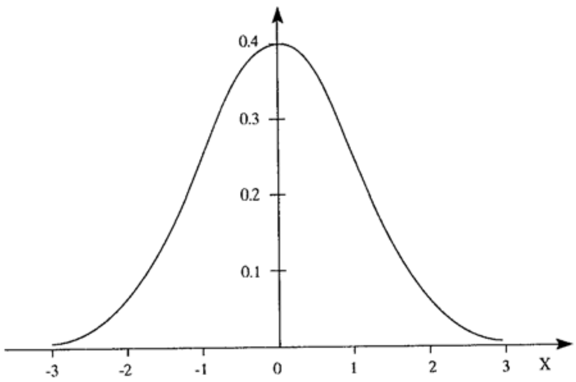
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ειδική περίπτωση κανονικής κατανομής με μέση τιμή $\mu = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = 1$. Σχετικά σημειώνουμε ότι η τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z = (X-\mu)/\sigma$ έχει συνάρτηση πυκνότητας (βλέπε Παράδειγμα 3.1 του Κεφαλαίου 3)

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} , \; -\infty < z < \infty .$$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Z, η οποία είναι $N(0,1)$, καλείται *τυποποιημένη κανονική κατανομή*. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής δίδεται στο Σχήμα 3.2. Η χρησιμότητα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής οφείλεται στην πινακοποίηση της κατανομής της

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt\,,\ -\infty < z < \infty\,.$$

Ο συνήθης πίνακας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής δίδει της τιμές $\Phi(z)$ για z από 0 μέχρι 3 με βήμα 0,01. Για τον προσδιορισμό των τιμών της $\Phi(z)$ για z από -3 μέχρι 0 χρησιμοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα της τυποποιημένης κακονικής κατανομής.



Σχήμα 3.1. Η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

Θεώρημα 3.2. *Η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής* $\Phi(z)$*,* $-\infty < z < \infty$*, ικανοποιεί τη σχέση*

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1\,,\ -\infty < z < \infty\,.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\Phi(-z)$

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-t^2/2} dt\,,$$

χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = -u$, παίρνει τη μορφή

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-u^2/2} du\,.$$

Επομένως

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1\,.$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Η προσέγγιση της συνάρτησης πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής για μεγάλο ν (θεωρητικά $\nu \to \infty$) από τη συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής, η οποία αποδείχθηκε αρχικά για $p = 1/2$ από τον De Moivre το 1733 και για οποιοδήποτε p από τον Laplace το 1812, δίδεται χωρίς απόδειξη στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$f(x) = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x}, \; x = 0, 1, ..., \nu,$$

όπου $q = 1 - p$ *και* $0 < p < 1$. *Τότε για μεγάλο* ν (*θεωρητικά* $\nu \to \infty$) *ισχύει η προσέγγιση*

$$f(x) \cong \frac{1}{\sqrt{\nu pq}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right)^2}, \; -\infty < x < \infty.$$

Χρήσιμο στις εφαρμογές είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p. Τότε για μεγάλο ν* (*θεωρητικά* $\nu \to \infty$) *ισχύει η προσέγγιση*

$$P(\alpha \le X \le \beta) \cong \Phi\left(\frac{\beta - \nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right), \; \alpha < \beta.$$

Παρατήρηση 3.1. *Διόρθωση συνέχειας*. Η προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κανονική κατανομή δεν είναι ικανοποιητική όταν το *ν* δεν είναι αρκετά μεγάλο. Γενικά, στις περιπτώσεις προσέγγισης μιας διακριτής κατανομής απο μια συνεχή έχει αποδειχθεί ότι οι προσεγγίσεις βελτιώνονται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση της διόρθωσης συνέχειας. Σύμφωνα με αυτή η πιθανότητα $f(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, ...$ προσεγγίζεται από την πιθανότητα $P(x - 1/2 \le X \le x + 1/2)$ και έτσι στην περίπτωση κανονικής προσέγγισης

$$P(X = x) \cong \Phi\left(\frac{x - \nu p + 1/2}{\sqrt{\nu pq}}\right) - \Phi\left(\frac{x - \nu p - 1/2}{\sqrt{\nu pq}}\right).$$

Γενικότερα

$$P(\alpha \le X \le \beta) \cong \Phi\left(\frac{\beta - \nu p + 1/2}{\sqrt{\nu pq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \nu p - 1/2}{\sqrt{\nu pq}}\right), \; \alpha \le \beta.$$

Παράδειγμα 3.1. Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια κύησης *X* μιας γυναίκας ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 270$ ημέρες και τυπική απόκλιση $\sigma = 30$ ημέρες. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως η διάρκεια κύησης παιδιού είναι μικρότερη από επτά μήνες.

Εισάγοντας την τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z = (X - \mu)/\sigma$, όπου $\mu = 270$ και $\sigma = 30$, συνάγουμε για τη ζητουμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(X < 210) = P\left(\frac{X - 270}{30} < \frac{210 - 270}{30}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2).$$

Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής έχουμε $\Phi(2) = 0{,}9772$ και έτσι

$$P(X < 210) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 \cong 2\%.$$

Παράδειγμα 3.2. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή *X* ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως η *X* απέχει από το μέσο μ το πολύ κ τυπικές αποκλίσεις σ, για $\kappa = 1, 2, 3$.

Εισάγοντας την τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z = (X - \mu)/\sigma$ συνάγουμε για τη ζητουμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(|X - \mu| \le \kappa\sigma) = P(|Z| \le \kappa) = P(-\kappa \le Z \le \kappa) = \Phi(\kappa) - \Phi(-\kappa) = 2\Phi(\kappa) - 1.$$

Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής έχουμε $\Phi(1) = 0{,}8413$, $\Phi(2) = 0{,}9772$, $\Phi(3) = 0{,}9987$ και έτσι

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = P(|X - \mu| \le \sigma) = 0{,}6826 \cong 68\%,$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(|X - \mu| \le 2\sigma) = 0{,}9544 \cong 95\%,$$

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P(|X - \mu| \le 3\sigma) = 0{,}9974 \cong 99{,}7\%.$$

Συμπερασματικά, *το 68% περίπου των τιμών ενός κανονικού πληθυσμού βρίσκονται σε απόσταση το πολύ μιας τυπικής απόκλισης, το 95% περίπου σε απόσταση δύο τυπικών αποκλίσεων και το 99.7% περίπου σε απόσταση τριών αποκλίσεων από το μέσο του πληθυσμού.*

Παράδειγμα 3.3. Ας θεωρήσουμε ότι ο χρόνος εμφάνισης X ενός φωτογραφικού φιλμ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 30$ λεπτά και τυπική απόκλιση $\sigma = 1{,}2$ λεπτά. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα όπως ο χρόνος εμφάνισης ενός φιλμ μη υπερβεί τα 28 λεπτά και (β) η πιθανότητα όπως σε τουλάχιστον 2 από 10 φιλμ ο χρόνος εμφάνισης μη υπερβεί τα 28 λεπτά.

(α) Εισάγοντας την τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z = (X - \mu)/\sigma$, όπου $\mu = 30$ και $\sigma = 1{,}2$, η πιθανότητα όπως ο χρόνος εμφάνισης ενός φιλμ μη υπερβεί τα 28 λεπτά ισούται με

$$P(X \le 28) = P\left(\frac{X - 30}{1{,}2} \le \frac{28 - 30}{1{,}2}\right) = P(Z \le -1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67) = 0{,}0475 \cong 5\%$$

(β) Ο αριθμός Y των φιλμ με χρόνο εμφάνισης το πολύ 28 λεπτών ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με αριθμό δοκιμών $\nu = 10$ και πιθανότητα επιτυχίας $p = P(X \le 28) = 0{,}05$, οπότε

$$P(Y = y) = \binom{10}{y}(0{,}05)^y (0{,}95)^{10-y}, \ y = 0,1,\ldots,10.$$

Επομένως η πιθανότητα όπως σε τουλάχιστον 2 από 10 φιλμ ο χρόνος εμφάνισης μη υπερβεί τα 28 λεπτά είναι

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) =$$

$$= 1 - \binom{10}{0}(0{,}05)^0 (0{,}95)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}05)^1 (0{,}95)^9 = 0{,}086.$$

Παράδειγμα 3.4. Έστω ότι ένα δείγμα ν ατόμων εκλέγεται τυχαία από ένα πληθυσμό για την εκτίμηση του ποσοστού p των ατόμων του πληθυσμού που πάσχουν από μια συγκεκριμένη ασθένεια. (α) Να υπολογισθεί το μέγεθος ν του δείγματος έτσι ώστε το ποσοστό των ατόμων στο δείγμα που πάσχουν από την ασθένεια να διαφέρει από το πραγματικό ποσοστό p κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο από 1% με πιθανότητα τουλάχιστον 95%. (β) Αν είναι γνωστό ότι $p \le 0{,}03$ (δηλαδή ότι πρόκειται περί σπάνιας ασθένειας) ποιό πρέπει να είναι το μέγεθος ν του δείγματος;

(α) Αν X είναι ο αριθμός των ατόμων του δείγματος που πάσχουν από την ασθένεια, τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p. Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που πάσχουν από την ασθένεια είναι ίσο με X/ν, οπότε το ζητούμενο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής

$$P\left(\left|\frac{X}{\nu}-p\right|\leq 0{,}01\right)\geq 0{,}95\,.$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κανονική κατανομή το αριστερό μέλος της συνθήκης μετασχηματίζεται στο

$$P\left(\left|\frac{X}{\nu}-p\right|\leq 0{,}01\right)=P\left(-0{,}01\leq\frac{X}{\nu}-p\leq 0{,}01\right)=P\left(\frac{-0{,}01\nu}{\sqrt{\nu pq}}\leq\frac{X-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}\leq\frac{0{,}01\nu}{\sqrt{\nu pq}}\right)$$

$$\cong\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{\nu}}{\sqrt{pq}}\right)-\Phi\left(-\frac{0{,}01\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu pq}}\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{\nu}}{\sqrt{pq}}\right)-1$$

και η συνθήκη παίρνει τη μορφή

$$2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{\nu}}{\sqrt{pq}}\right)-1\geq 0{,}95$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{\nu}}{\sqrt{pq}}\right)\geq 0{,}975\,.$$

Από τον Πίνακα 3 της τυποποιημένης κανονικής κατανομής έχουμε $\Phi(1{,}96)=0{,}975$ και οπότε

$$\frac{0.01\sqrt{\nu}}{\sqrt{pq}}\geq 1{,}96$$

και επομένως

$$\nu\geq 38416p(1-q)\,.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g(p)=p(1-p)=p-p^2$ μεγιστοποιείται για $p=0{,}5$, οπότε

$$p(1-p)\leq 0{,}5(1-0{,}5)=0{,}25$$

και έτσι το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος είναι

$$\nu\geq 38416\cdot 0{,}25\cong 9604\,.$$

(β) Αν είναι γνωστό ότι $p\leq 0{,}03$, τότε

$$p(1-p)\leq 0{,}03(1-0{,}03)=0{,}0021$$

και έτσι το απαιτούμενο μέγεθος του δείγματος είναι

$$\nu\geq 38416\cdot 0{,}0021\cong 81\,.$$

6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή *X* έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $E(X) = 1$ και $V(X) = 3$, (α) να υπολογισθούν οι σταθερές α και β, (β) να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$ και (γ) να βρεθούν οι $E(Y)$ και $V(Y)$.

2. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή *X* έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$. Δείξετε ότι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \frac{1}{\theta}\log\frac{1}{1-X}$$

δίδεται από την

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & -\infty < y < 0 \\ 1 - e^{-\theta y}, & 0 \le y < \infty. \end{cases}$$

και συμπεράνετε ότι ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

3. (*Συνέχεια*). Έστω $Z = h(X)$, όπου $h(x) = z$ για $1 - q^z < x \le 1 - q^{z+1}$, $z = 0, 1, \ldots$, με $0 < q < 1$. Δείξετε ότι η τυχαία μεταβλητή *Z* ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_Z(z) = pq^z,\ z = 0, 1, \ldots,$$

όπου $p = 1 - q$.

4. Έστω X_t ο αριθμός των θανάτων σε νοσοκομείο των Αθηνών από μια σπάνια ασθένεια σε χρονικό διάστημα *t* ωρών. Αν σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $[0, s]$ συνέβη ένας θάνατος, δείξετε ότι η χρονική στιγμή *T* του θανάτου ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, s]$.

5. Ο χρόνος ζωής *X* σε ώρες μιας ορισμένης ηλεκτρονικής λυχνίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E(X) = 1000$ ώρες. Το εργοστάσιο που κατασκευάζει τις λυχνίες δίδει εγγύηση α ωρών στους πελάτες του. Να υπολογισθεί το α έτσι ώστε με πιθανότητα τουλάχιστο 0,95 οι λυχνίες να επιζούν του χρόνου εγγύησης.

6. Ο χρόνος ζωής *X* του ιού της γρίπης μέσα στον οργανισμό ενός ατόμου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 μέρες. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα όπως ένα άτομο που προσβλήθηκε από τον ιό γίνει καλά στο χρονικό διάστημα από 2 μέχρι 4 μέρες και (β) η δεσμευμένη πιθανότητα όπως ένα άτομο που προσβλήθηκε από τον ιό γίνει καλά σε λιγότερο από 5 συνολικά μέρες δεδομένου ότι έχει 2 μέρες άρρωστος. (γ) Επίσης να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως 3 τουλάχιστο από 10 άτομα που προσβλήθηκαν από τον ιό γίνουν καλά στο χρονικό διάστημα από 2 μέχρι 4 μέρες.

7. Έστω ότι η ποσότητα *X* σε χιλιάδες λίτρα που πωλεί ένα πρατήριο βενζίνης σε μια μέρα πέραν των χιλίων λίτρων ακολουθεί την κατανομή Erlang με μέση τιμή 5 χιλιάδες λίτρα και τυπική απόκλιση 2,5 χιλιάδες λίτρα. Αν οι δεξαμενές του πρατηρίου μια συγκεκριμένη μέρα έχουν 8 χιλιάδες λίτρα να υπολογισθούν η πιθανότητα το πρατήριο να μη μπορέσει να ανταποκριθεί στη ζήτηση.

8. Το βάρος των νεογέννητων παιδιών σε μια συγκεκριμένη χώρα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 3,400 κιλά για τα αγόρια και 3,350 κιλά για τα κορίτσια και τυπική απόκλιση 0,400 κιλά για τα αγόρια και 0,350 κιλά για τα κορίτσια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) ένα νεογέννητο αγόρι να έχει βάρος μεγαλύτερο των 4,000 κιλών και (β) ένα νεογέννητο κορίτσι να έχει βάρος μεγαλύτερο των 3,000 κιλών και μικρότερο των 3,700 κιλών.

9. Το ύψος X των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 175 εκατοστόμετρα και τυπική απόκλιση 5 εκατοστόμετρα. Να υπολογισθούν τα ποσοστά του πληθυσμού των ανδρών με ύψος (α) μεγαλύτερο των 175, (β) μεγαλύτερο των 180 και (γ) μεταξύ των 170 και των 180. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες όπως σε τυχαίο δείγμα 6 ανδρών (δ) όλοι είναι ύψους άνω των 180 και (ε) οι δύο είναι υψηλότεροι του μέσου και τέσσερεις χαμηλότεροι του μέσου.

10. Μία αυτόματη μηχανή κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος σε χιλιοστόμετρα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 40 και τυπική απόκλιση 1. Αν το μήκος μιας βίδας είναι εκτός του διαστήματος $[39, 40]$, η βίδα θεωρείται ελαττωματική. Να υπολογισθούν (α) το ποσοστό των ελαττωματικών βίδων που παράγει η μηχανή, (β) η πιθανότητα όπως σε μια τυχαία επιλογή 5 βίδων μια το πολύ είναι ελαττωματική και (γ) η πιθανότητα όπως σε μια τυχαία επιλογή 100 βίδων 20 το πολύ είναι ελαττωματικές.

11. Έστω ότι η αντοχή X ενός υφάσματος (χιλιόγραμμα δύναμης) ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 και διασπορά 4. Ένα τόπι 25 μέτρων του υφάσματος με $X > 47$ αποφέρει κέρδος 25 ευρώ. Αν $X \leq 47$ το ύφασμα πωλείται ως δεύτερης διαλογής και αποφέρει κέρδος 15 ευρώ. Να υπολογισθεί το αναμενόμενο κέρδος ανά τόπι.

12. (α) Αν X είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 και c ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$P(X > c) = 2P(X \leq c),$$

να δειχθεί ότι

$$c + 0{,}43\sigma = \mu$$

(β) Αν οι τιμές του σιδήρου στο αίμα των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 110 mg/dl και διασπορά 25 mg/dl να βρεθεί η τιμή c του σιδήρου για την οποία το ποσοστό ανδρών που την υπερβαίνει είναι διπλάσιο του ποσοστού που δεν την υπερβαίνει.

13. (α) Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε 40 ρίψεις ενός συνήθους νομίσματος εμφανιστούν 20 κεφαλές χρησιμοποιώντας κανονική προσέγγιση με διόρθωση συνέχειας. (β) Ποιά είναι η ακριβής τιμή της πιθανότητας αυτής;

14. Σε μια δίκη που αφορούσε την πατρότητα ενός παιδιού ο κατηγορούμενος μπόρεσε να αποδείξει ότι βρισκόταν εκτός της χώρας για το χρονικό διάστημα που άρχιζε 295 μέρες πριν τη γέννηση του παιδιού και τελείωνε 240 ημέρες πριν τη γέννηση. Αν υποθέσουμε ότι η διάρκεια κύησης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 9 μήνες και τυπική απόκλιση 10 ημέρες, ποιά είναι η πιθανότητα ο κατηγορούμενος να είναι πράγματι ο πατέρας του παιδιού;

15. Η τιμή X της χοληστερόλης στο αίμα των ατόμων ενός συγκεκριμένου πληθυσμού ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή με μέση τιμή 250 και τυπική απόκλιση 50. (α) Να υπολογισθεί το ποσοστό των ατόμων του πληθυσμού των οποίων η τιμή χοληστερίνης είναι μεταξύ 200 και 260. (β) Να βρεθεί η τιμή της χοληστερόλης c τέτοια ώστε στο 10% των ατόμων του πληθυσμού η χοληστερόλη υπερβαίνει το c.

16. Έστω ότι ένα δείγμα ν ατόμων εκλέγεται τυχαία από ένα πληθυσμό για την εκτίμηση του ποσοστού p των καπνιστών. (α) Να υπολογισθεί το ν ώστε το ποσοστό των καπνιστών στο δείγμα να διαφέρει από το πραγματικό ποσοστό p κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο του 0,05 με πιθανότητα τουλάχιστον 0,99. (β) Αν είναι γνωστό ότι το πραγματικό ποσοστό των καπνιστών είναι $p \le 0{,}3$, ποιό πρέπει να είναι το μέγεθος ν του δείγματος;

17. Έστω ότι η απόκλιση X της βολής ενός σκοπευτή από το κέντρο στόχου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = 2(1-x),\ 0 \le x \le 1 .$$

Ο σκοπευτής κερδίζει το στοίχημα αν η απόκλιση της βολής από το κέντρο του στόχου δεν είναι μεγαλύτερη από το $1/2$. Να υπολογισθεί ο αριθμός ν των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να κερδίσει ο σκοπευτής το στοίχημα να είναι τουλάχιστο 0,98.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Η μελέτη της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς ενός ποσοτικού ή ποιοτικού χαρακτηριστικού των δειγματικών σημείων διευκολύνεται με την αντιστοίχηση σε κάθε δειγματικό σημείο ενός πραγματικού αριθμού. Όπως έχει ήδη λεπτομερώς εκτεθεί στο Κεφάλαιο 2 η αντιστοίχηση αυτή γίνεται από μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, η οποία καλείται τυχαία μεταβλητή. Ενδιαφέρον τόσο από θεωρητική άποψη, όσο και από άποψη εφαρμογών παρουσιάζει και η από κοινού μελέτη δύο χαρακτηριστικών των δειγματικών σημείων. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε δειγματικό σημείο ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών. Η αντιστοίχηση αυτή γίνεται από ένα ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων με (κοινό) πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1. *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος. Ένα ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων (X,Y) που ορίζεται στο δειγματικό χώρο Ω καλείται **διδιάστατη τυχαία μεταβλητή**. Το ζεύγος των συναρτήσεων αυτών αντιστοιχεί σε κάθε δειγματικό σημείο $\omega \in \Omega$ ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) με $x = X(\omega)$ και $y = Y(\omega)$.*

Σημειώνουμε ότι αν (X,Y) είναι μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή τότε τόσο η X όσο και η Y είναι (μονοδιάστατες) τυχαίες μεταβλητές και αντίστροφα.

Ορισμός 1.2. *Η συνάρτηση*

$$F(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x,\ Y(\omega) \le y\}), \tag{1.1}$$

για $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, καλείται συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) ή από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) συμβολίζεται με $F_{X,Y}$ και η τιμή της στο (x,y) με $F_{X,Y}(x,y)$.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση κατανομής ως πιθανότητα λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$, δηλαδή

$$0 \le F(x,y) \le 1,\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty. \tag{1.2}$$

Επίσης

$$F(-\infty, y) \equiv \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = P(\varnothing) = 0\,,\ F(x, -\infty) \equiv \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = P(\varnothing) = 0\,,$$

$$F(+\infty, -\infty) \equiv \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = P(\Omega) = 1\,.$$

και

$$F(x, +\infty) \equiv \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = P(X \leq x) = F_X(x)\,,\ -\infty < x < \infty\,, \tag{1.3}$$

$$F(+\infty, y) \equiv \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = P(Y \leq x) = F_Y(y)\,,\ -\infty < y < \infty\,. \tag{1.4}$$

Η συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής X θεωρούμενη στο πλαίσιο της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) καλείται, ιδιαιτέρως, *περιθώρια συνάρτηση κατανομής* της X. Ομοίως η συνάρτηση κατανομής $F_Y(y) = P(Y \leq y)$, $-\infty < y < \infty$ της τυχαίας μεταβλητής Y καλείται *περιθώρια συνάρτηση κατανομής* της Y.

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές εκπομπές σημάτων από έναν πομπό ο οποίος εκπέμπει υπό την ίδια αναλογία τα σήματα 0, 1 και 2. Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2)\}\,,$$

των $3^2 = 9$ διατάξεων των τριών σημάτων $\{0,1,2\}$ ανά δύο με επανάληψη, όπου στο διατεταγμένο ζεύγος (i, j) το i είναι το πρώτο και j είναι το δεύτερο εκπεμπόμενο σήμα. Σημειώνουμε ότι τα 9 δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα. Έστω X ο αριθμός των εκπεμπομένων σημάτων 1 και Y ο αριθμός των εκπεμπομένων σημάτων 2 στις δύο εκπομπές. Να υπολογισθούν η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ και οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής $F_X(x)$, $-\infty < x < \infty$ και $F_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X και Y υπολογίζεται σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1 ως εξής. Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δύνανται να πάρουν τις τιμές $x = 0,1,2$ και $y = 0,1,2$ και έτσι διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} = \varnothing$,

για $-\infty < x < 0$, $-\infty < y < \infty$, ή $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < 0$,

(β) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} = \{(0,0)\}$,

για $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$,

(γ) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} = \{(0,0), (0,2), (2,0)\}$,

για $0 \leq x < 1$, $1 \leq y < 2$,

(δ) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} = \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\}$,

για $0 \leq x < 1$, $2 \leq y < \infty$,

(ε) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$,

για $1 \leq x < 2$, $0 \leq y < 1$,

(στ) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\,,\ Y(\omega) \le y\} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}$,

για $1 \le x < 2$, $1 \le y < 2$,

(ζ) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\,,\ Y(\omega) \le y\} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$,

για $1 \le x < 2$, $2 \le y < \infty$,

(η) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\,,\ Y(\omega) \le y\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,

για $2 \le x < \infty$, $0 \le y < 1$,

(θ) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\,,\ Y(\omega) \le y\} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1)\}$,

για $2 \le x < \infty$, $1 \le y < 2$, και

(ι) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\,,\ Y(\omega) \le y\} = \Omega$,

για $2 \le x < \infty$, $2 \le y < \infty$.

Επομένως

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ & \text{ή} \ \ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < 0, \\ 1/9, & 0 \le x < 1, \quad 0 \le y < 1, \\ 3/9, & 0 \le x < 1, \quad 1 \le y < \infty, \\ 4/9, & 0 \le x < 1, \quad 2 \le y < \infty, \\ 3/9, & 1 \le x < 2, \quad 0 \le y < 1, \\ 7/9, & 1 \le x < 2 \quad 1 \le y < 2, \\ 8/9, & 1 \le x < 2, \quad 2 \le y < \infty, \\ 4/9, & 2 \le x < \infty, \quad 0 \le y < 1, \\ 8/9, & 2 \le x < \infty, \quad 1 \le y < 2, \\ 1, & 2 \le x < \infty, \quad 2 \le y < \infty. \end{cases}$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των τυχαίων μεταβλητών *X* και *Y*, οι οποίες σύμφωνα με τις (1.3) και (1.4), δύνανται να προκύψουν από την από κοινού συνάρτηση κατανομής δίδονται από τις

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 4/9, & 0 \le x < 1, \\ 8/9, & 1 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x < y. \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & -\infty < y < 0, \\ 4/9, & 0 \le y < 1, \\ 8/9, & 1 \le y < 2, \\ 1, & 2 \le y < \infty. \end{cases}$$

2. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Ορισμός 2.1. *Μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή* (X,Y) *καλείται διακριτή ή απαριθμητή αν παίρνει με πιθανότητα 1 πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο σύνολο τιμών* $R_{X,Y} = \{(x_0,y_0),(x_0,y_1),(x_1,y_0),\dots,(x_i,y_j),\dots\}$. *Η συνάρτηση f η οποία σε κάθε σημείο* (x_i,y_j), $i = 0,1,\dots$, $j = 0,1,\dots$, *εκχωρεί την πιθανότητά του*

$$f(x_i,y_j) = P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}), \qquad (2.1)$$

$i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$, *καλείται συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής* (X,Y) *ή από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.*

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) συμβολίζεται με $f_{X,Y}$ και η τιμή της στο (x_i, y_j) με $f_{X,Y}(x_i, y_j)$. Σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την παράσταση $R_{X,Y} = \{(x_0, y_0)\} + \{(x_0, y_1)\} + \cdots + \{(x_i, y_j)\} + \cdots$, η συνθήκη $P[(X,Y) \in R_{X,Y}]$ δύναται να γραφεί στη μορφή

$$P[(X,Y) \in R_{X,Y}] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} P(X = x_i,\, Y = y_j) = 1 .$$

Επίσης η συνάρτηση πιθανότητας (2.1), όπως προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της, είναι μη αρνητική:

$$f(x_i, y_j) \geq 0,\ i = 0,1,\ldots,\ j = 0,1,\ldots,\ f(x,y) = 0,\ (x,y) \notin R_{X,Y} \tag{2.2}$$

και

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j) = 1 . \tag{2.3}$$

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_i, y_j) = P(X = x_i,\, Y = y)$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$, μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής αυτής $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Συγκε-κριμένα στη μερική περίπτωση που $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ και $y_0 < y_1 < y_2 < \cdots$, ισχύουν οι σχέσεις

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_0,\ -\infty < y < \infty \ \text{ή} \ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < y_0 \\ \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} f(x_i, y_j), & x_r \leq x < x_{r+1},\ y_s \leq y <_{s+1},\ r,s = 0,1,\ldots \end{cases} \tag{2.4}$$

και

$$f(x_i, y_j) = F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + F(x_{i-1}, y_{j-1}), \tag{2.5}$$

για $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$, με $x_{-1} = -\infty$, $y_{-1} = -\infty$. Γενικότερα ισχύει η σχέση

$$F(x,y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{x_i \leq x} f(x_i, y_j),\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty ,$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλα τα x_i τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του x και σε όλα τα y_j τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα του y.

Ορισμός 2.2. *Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή* (X,Y) *καλείται συνεχής αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση,*

$$f(x,y) \geq 0,\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty \tag{2.6}$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \tag{2.7}$$

τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ *και* δ *με* $\alpha < \beta$ *και* $\gamma < \delta$,

$$P(\alpha < X \le \beta, \gamma < Y \le \delta) = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta f(x,y)dxdy\,. \tag{2.8}$$

Η συνάρτηση $f(x,y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ *καλείται συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής* (X,Y) *ή από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.*

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής (X,Y) συμβολίζεται με $f_{X,Y}$ και η τιμή της στο (x,y) με $f_{X,Y}(x,y)$. Σημειώνουμε ότι η (2.8) είναι ισοδύναμη με την

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t,u)dtdu\,,\ -\infty < x < \infty\,,\ -\infty < y < \infty\,. \tag{2.9}$$

Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x,y) τότε παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = f(x,y)\,. \tag{2.10}$$

Οι σχέσεις (2.9) και (2.10) είναι οι αντίστοιχες των (2.4) και (2.5) για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Σύμφωνα με τον ορισμό της μερικής παραγώγου και χρησιμοποιώντας την (2.10) συνάγουμε την προσεγγιστική σχέση

$$P(x < X \le x + h_1,\ y < Y \le y + h_2) \cong f(x,y)h_1 h_2$$

για μικρά $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

Ας επανέλθουμε στην περίπτωση μιας διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)\,,\ i = 0,1,...,\ j = 0,1,...$$

και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f_X(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x_i, y_j)\,,\ i = 0,1,.... \tag{2.11}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = x_i,\ Y = y_j)\,,\ i = 0,1,...$$

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής *X*,

$$f_X(x_i) = P(X = x_i)\,,\ i = 0,1,...,$$

η οποία θεωρούμενη στο πλαίσιο της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) καλείται, ιδιαιτέρως, *περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας* της *X*. Ανάλογα προκύπτει και η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y_i) = P(Y = y_j)$, $j = 0,1,...$ της τυχαίας μεταβλητής *Y*:

$$f_Y(y_j) = \sum_{i=0}^{\infty} f(x_i, y_j)\,,\ j = 0,1,.... \tag{2.12}$$

Ο χαρακτηρισμός των συναρτήσεων πιθανότητας $f_X(x_i)$ και $f_Y(y_j)$ ως περιθωρίων, θεωρουμένων στο πλαίσιο της συνάρτησης πιθανότητας $f(x_i, y_j)$ της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y), δικαιολογείται από τη σχηματική παρουσία τούτων στον Πίνακα 2.1. Σημειώνουμε ότι στον πίνακα αυτό τα στοιχεία της τελευταίας στήλης και τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής προκύπτουν σύμφωνα με τις (2.11) και (2.12) με άθροιση των στοιχείων των αντιστοίχων γραμμών ή στηλών.

$f(x,y)$

$X \backslash Y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$f_X(x)$
x_0	$f(x_0,y_0)$	$f(x_0,y_1)$	$\cdots$	$f(x_0,y_j)$	$\cdots$	$f_X(x_0)$
x_i	$f(x_1,y_0)$	$f(x_1,y_1)$	$\cdots$	$f(x_1,y_j)$	$\cdots$	$f_X(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
x_i	$f(x_i,y_0)$	$f(x_i,y_1)$	$\cdots$	$f(x_i,y_j)$	$\cdots$	$f_X(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	
$f_Y(y)$	$f_Y(y_0)$	$f_Y(y_1)$	$\cdots$	$f_Y(y_j)$	$\cdots$	1

Πίνακας 2.1. Η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας.

Στην περίπτωση μιας συνεχούς διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) με συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίδονται από τις σχέσεις

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\,, \; -\infty < x < \infty \tag{2.13}$$

και

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,, \; -\infty < y < \infty\,. \tag{2.14}$$

Παράδειγμα 2.1. Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y του Παραδείγματος 1.1. Η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας του X και Y, οι οποίες υπολογίζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τις σχέσεις (2.11) και (2.12), δίδονται στον Πίνακα 2.2.

$f(x,y)$

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
$f_Y(y)$	4/9	4/9	1/9	1

Πίνακας 2.2. Η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας.

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε μία διδιάσταστη τυχαία μεταβλητή (X,Y) η οποία κατανέμεται ομοιόμορφα στο τετράγωνο $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Να προσδιορισθούν οι από κοινού συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας και οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Η υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής της πιθανότητας συνεπάγεται ότι

$$P(x_1 < X \le x_2,\, y_1 < Y \le y_2) = C \cdot (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

όπου $0 \le x_1 < x_2 \le 1$, $0 \le y_1 < y_2 \le 1$ και C είναι η σταθερή αναλογίας. Θέτοντας $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ στη σχέση αυτή παίρνουμε

$$P(0 < X \le 1,\, 0 < Y \le 1) = C$$

και επειδή $P(0 < X \le 1,\ 0 < Y \le 1) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $C = 1$. Επομένως η συνάρτηση κατανομής $F(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δίδεται από την

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0,\ -\infty < y < \infty, \\ \quad \text{ή} & -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < 0, \\ xy, & 0 \le x < 1, \quad 0 \le y < 1, \\ x, & 0 \le x < 1, \quad 1 \le y < \infty, \\ y, & 1 \le x < \infty, \quad 0 \le y < 1, \\ 1, & 1 \le x < \infty, \quad 1 \le y < \infty. \end{cases}$$

Παραγωγίζοντας αυτή συνάγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της (X,Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y, σύμφωνα με τις (2.13) και (2.14), δίδονται από τις

$$f_X(x) = \int_0^1 dx = 1,\ 0 \le x \le 1$$

και

$$f_Y(y) = \int_0^1 dy = 1,\ 0 \le y \le 1.$$

3. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Χρήσιμη στην πιθανοθεωρητική μελέτη μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής είναι η κατανομή της μιας τυχαίας μεταβλητής για δεδομένη τιμή της άλλης τυχαίας μεταβλητής. Η εισαγωγή της κατανομής αυτής στη γενική περίπτωση είναι αρκετά δύσκολη. Για το λόγο αυτό εισάγουμε αυτές ξεχωριστά για διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Ας θεωρήσουμε μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) και έστω

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i,\, Y = y_j),\ i = 0,1,\ldots,\ j = 0,1,\ldots$$

η συνάρτηση πιθανότητας αυτής και

$$f_Y(y_j) = P(Y = y_j)\,,\ j = 0,1,...$$

η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της *Y*. Η συνάρτηση

$$f_{X|Y}(x_i \mid y_j) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}\,,\ i = 0,1,... \tag{3.1}$$

θεωρούμενη ως συνάρτηση του x_i, με y_j δεδομένη τιμή της τυχαίας μεταβλητής *Y* για την οποία $f_Y(y_j) > 0$, είναι μία συνάρτηση πιθανότητας. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i,\, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}\,,\ i = 0,1,...$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f_{X|Y}(x_i \mid y_j) = P(X = x_i \mid Y = y_j)\,,\ i = 0,1,.... \tag{3.2}$$

Η ανάλυση αυτή οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.1. *Έστω* (X,Y) *μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με* $f_{X,Y}(x_i, y_j)$, $i = 0,1,...,\ j = 0,1,...$ *συνάρτηση πιθανότητας και* $f_Y(y_j)$, $j = 0,1,...$ *περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y. Η συνάρτηση πιθανότητας (3.1) καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένης της* $Y = y_j$.

Ανάλογα ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή της *Y* δεδομένης της $X = x_i$.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία συνεχή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) και έστω $f_{X,Y}(x,y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ η συνάρτηση πυκνότητας αυτής και $f_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$ η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της *Y*. Η συνάρτηση

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,,\ -\infty < x < \infty \tag{3.3}$$

θεωρούμενη ως συνάρτηση του *x*, με δεδομένο *y* για το οποίο $f_Y(y) > 0$, είναι μία συνάρτηση πυκνότητας. Επίσης κατά προσέγγιση έχουμε για μικρά $h_1 > 0$, $h_2 > 0$

$$P(x < X \le x + h_1 \mid y < Y \le y + h_2) \cong f_{X|Y}(x \mid y) h_1\,. \tag{3.4}$$

Μετά την ανάλυση αυτή θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2. *Έστω* (X,Y) *μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με* $f_{X,Y}(x,y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ *συνάρτηση πυκνότητας και* $f_Y(y)$, $\infty < y < \infty$ *περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y. Η συνάρτηση πυκνότητας (3.3) καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της* $Y = y$.

Ανάλογα ορίζεται η δεσμευμένη κατανομή της *Y* δεδομένης της $X = x$.

Παράδειγμα 3.1. Έστω (X,Y) μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{x+y}{21},\ x=1,2\ ,\ y=1,2,3\ .$$

Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας της X δεδομένης της $Y=y$ και της Y δεδομένης της $X=x$.

Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y είναι

$$f_X(x)=\sum_{y=1}^{3}\frac{x+y}{21}=\frac{3x+6}{21},\ x=1,2\ ,$$

$$f_Y(y)=\sum_{x=1}^{2}\frac{x+y}{21}=\frac{2y+3}{21},\ y=1,2,3\ ,$$

και επομένως οι ζητούμενες δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας δίδονται, σύμφωνα με την (3.1), από τις

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{x+y}{2y+3},\ x=1,2\ ,$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{x+y}{2x+6},\ y=1,2,3\ .$$

Παράδειγμα 3.2. Έστω (X,Y) μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y)=8xy\ ,\ 0\le x\le y\le 1\ .$$

Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας της X δεδομένης της $Y=y$ και της Y δεδομένης της $X=x$.

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y είναι

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=8x\int_{x}^{1}ydy=4x(1-x^2)\ ,\ 0\le x\le 1\ ,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=8y\int_{0}^{y}xdx=4y^3\ ,\ 0\le y\le 1\ .$$

Επομένως, σύμφωνα με την (3.3), η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένης της $Y=y$ δίδεται από την

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{2x}{y^2}\ ,\ 0<x\le y\ .$$

Και τον ίδιο τρόπο

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{2y}{1-x^2}\ ,\ x\le y\le 1\ .$$

4. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας τυχαίων μεταβλητών εισάγεται μέσω της από κοινού συνάρτησης κατανομής και των περιθωρίων συναρτήσεων κατανομής των τυχαίων μεταβλητών. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1. *Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται στοχαστικά ανεξάρτητες ή απλώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει η σχέση*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)\,. \tag{4.1}$$

Στο επόμενο θεώρημα δίδεται κριτήριο της ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών βασισμένο στην από κοινού και στις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας ή πυκνότητας. Το θεώρημα αυτό δύναται εύκολα να αποδειχθεί με τη χρησιμοποίηση των σχέσεων (2.4), (2.5), (2.9) και (2.10) του κεφαλαίου αυτού και των σχέσεων (2.4), (2.5), (2.9) και (2.10) του Κεφαλαίου 2 οι οποίες συνδέουν τις συναρτήσεις κατανομής και τις συναρτήσεις πιθανότητας ή πυκνότητας.

Θεώρημα 4.1. (α) *Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι διακριτές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας* $f_{X,Y}(x_i, y_j)$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$ *και περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας* $f_X(x_i)$, $i = 0,1,\ldots$ *και* $f_Y(y_j)$, $j = 0,1,\ldots$ *τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = f_X(x_i)f(y_j)\,,\ i = 0,1,\ldots,\ j = 0,1,\ldots \tag{4.2}$$

(β) *Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας* $f_{X,Y}(x,y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ *και περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας* $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, *και* $f_Y(y)$, $-\infty < y < \infty$, *τότε είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\,, -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\,. \tag{4.3}$$

Παρατήρηση 4.1. *Δεσμευμένες κατανομές και στοχαστική ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών.* Έστω *X* και *Y* διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πιθανότητας $f_Y(x_i)$, $i = 0,1,\ldots$ και $f_Y(y_j)$, $j = 0,1,\ldots$. Τότε οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας $f_{X|Y}(x_i \mid y_j)$, $i = 0,1,\ldots$, και $f_{Y|X}(y_j \mid x_i)$, $j = 0,1,\ldots$, είναι

$$f_{X|Y}(x_i \mid y_j) = \frac{f_{X|Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)} = f_X(x_i)\,,\ i = 0,1,\ldots$$

για κάθε y_j με $f_Y(y_j) > 0$,

$$f_{Y|X}(y_j \mid x_i) = \frac{f_{X|Y}(x_i, y_j)}{f_X(x_i)} = f_Y(y_j)\,,\ j = 0,1,\ldots$$

για κάθε x_i με $f_X(x_i) > 0$, ανεξάρτητες της τιμής της δεσμεύουσας τυχαίας μεταβλητής αν και μόνο αν οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Αυτό σημαίνει ότι καμία τιμή της δεσμεύουσας τυχαίας μεταβλητής δεν δίνει οποιαδήποτε πληροφορία για την κατανομή της άλλης τυχαίας μεταβλητής. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και στην περίπτωση που οι *X* και *Y* είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Σχετικά με την ανεξαρτησία συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών σημειώνουμε ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* είναι ανεξάρτητες τότε και οι τυχαίες μεταβλητές $Z = g(X)$ και $W = h(Y)$ είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 4.1. Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα που περιέχει 5 αριθμημένα σφαιρίδια $\{1,2,3,4,5\}$ από τα οποία το $\{1\}$ είναι άσπρο τα $\{2,3\}$ είναι μαύρα και τα $\{4,5\}$

είναι κόκκινα. Έστω ότι εξάγονται δύο σφαιρίδια (α) χωρίς επανάθεση και (β) με επανάθεση. Αν X είναι ο αριθμός των εξαγομένων άσπρων σφαιριδίων και Y ο αριθμός των εξαγομένων μαύρων σφαιριδίων, να υπολογισθούν η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητες των τυχαίων μεταβλητών X και Y και να εξετασθεί κατά πόσο αυτές είναι ανεξάρτητες.

(α) Ο δειγματικός χώρος στην περίπτωση που η εξαγωγή των σφαιριδίων γίνεται χωρίς επανάθεση είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),$$
$$(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\},$$

των 20 μεταθέσεων των 5 ανά 2. Τα 20 αυτά δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x,y)$ και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ υπολογίζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τις (2.11) και (2.12) και δίδονται στον Πίνακα 2.3.

$f(x,y)$

X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	1/10	4/10	1/10	3/5
1	2/10	2/10	0	2/5
$f_Y(y)$	3/10	6/10	1/10	1

Πίνακας 2.3.

Παρατηρούμε ότι $f(x,y) \neq f_X(y)f_Y(y)$, $x=0,1$, $y=0,1,2$ και επομένως οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(β) Ο δειγματικός χώρος στην περίπτωση που η εξαγωγή των σφαιριδίων γίνεται με επανάθεση ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),\ (3,1),(3,2),(3,3),$$
$$(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\},$$

των 25 μεταθέσεων των 5 ανά 2 με επανάληψη. Τα 25 αυτά δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x,y)$ και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ υπολογίζονται σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τις (2.11) και (2.12) και δίδονται στον Πίνακα 2.4

$f(x,y)$

X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	4/25	8/25	4/25	16/25
1	4/25	4/25	0	8/25
2	1/25	0	0	1/25
$f_Y(y)$	9/25	12/25	4/25	1

Πίνακας 2.4

Παρατηρούμε ότι $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, $x = 0,1,2,$ $y = 0,1,2$ και επομένως οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 4.2. Για τη μελέτη της ηχητικής μιας αίθουσας διδασκαλίας μετράται η πυκνότητα του ήχου σε διάφορα σημεία αυτής. Έστω ότι η πυκνότητα του ήχου στο σημείου (X,Y) είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2},\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty .$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της X είναι η

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = xe^{-x^2/2}\int_0^{\infty} ye^{-y^2/2}dy = xe^{-x^2/2}\ ,\ 0 < x < \infty .$$

Ομοίως

$$f_Y(y) = ye^{-y^2/2},\ 0 < y < \infty .$$

Επομένως

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y),\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$$

και οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

5. ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Η έννοια της ροπής (της κατανομής πιθανότητας) μιας (μονοδιάστατης) τυχαίας μεταβλητής, που ως γνωστό αποτελεί το πιθανοθεωρητικό ανάλογο της ροπής της (μονοδιάστατης) κατανομής μάζας στη μηχανική, δύναται να επεκταθεί και στην περίπτωση μιας διδιάστασης τυχαίας μεταβλητής. Σχετικά ας θεωρήσουμε μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) και μία συνάρτηση αυτής $Z = g(X,Y)$. Η Z μία (μονοδιάστατη) τυχαία μεταβλητή και η συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(z_\kappa) = P(Z = z_\kappa)$, $\kappa = 0,1,...$ ή πυκνότητας $f_Z(z)$, $-\infty < z < \infty$ αυτής προσδιορίζεται μέσω της συνάρτησης πιθανότητας $f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 0,1,...,$ $j = 0,1,...$ ή πυκνότητας $f_{X,Y}(x,y)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < x < \infty$ της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y). Είναι επομένως ενδιαφέρον και έχει έννοια ο υπολογισμός της μέσης τιμής της $Z = g(X,Y)$. Ο υπολογισμός αυτός δύναται να γίνει, σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής μιας (μονοδιάστατης) τυχαίας μεταβλητής, αφού πρώτα προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας της Z. Τούτο δεν είναι αναγκαίο να γίνεται σε κάθε μερική περίπτωση. Σχετικά ισχύει η ακόλουθη έκφραση

$$E(Z) \equiv E[g(X,Y)] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} g(x_i, y_j) f_{X,Y}(x_i, y_j) \tag{5.1}$$

αν η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) είναι διακριτή και η έκφραση

$$E(Z) \equiv E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{5.2}$$

αν η (X,Y) είναι συνεχής. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αυτές συνάγουμε άμεσα τη σχέση

$$E[g(X,Y) + h(X,Y)] = E[g(X,Y)] + E[h(X,Y)] \tag{5.3}$$

και ως μερική περίπτωση αυτής τη σχέση

$$E[g(X)+h(Y)]=E[g(X)]+E[h(Y)]. \tag{5.4}$$

θέτοντας $g(X)=\alpha X$ και $h(Y)=\beta Y$ με α και β σταθερές συμπεραίνουμε ότι

$$E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y). \tag{5.5}$$

Επίσης αν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε χρησιμοποιώντας και πάλιν τις σχέσεις (5.1) και (5.2) συνάγουμε άμεσα τη σχέση

$$E[g(X)h(Y)]=E[g(X)]E[h(Y)] \tag{5.6}$$

και ειδικότερα τη σχέση

$$E(XY)=E(X)E(Y). \tag{5.7}$$

Οι ροπές (της κατανομής πιθανότητας) μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής ορίζονται ως μέση τιμή μιας συγκεκριμένης, σε κάθε περίπτωση, συνάρτησης αυτής. Έτσι για τον υπολογισμό τους δύνανται να χρησιμοποιηθούν οι εκφράσεις (5.1) και (5.2). Σχετικά θέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 5.1. *Έστω (X,Y) μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με $\mu_X=E(X)$ και $\mu_Y=E(Y)$. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των τυχαίων μεταβλητών X και Y, συμβολιζόμενη με $C(X,Y)$ ή $\sigma_{X,Y}$, ορίζεται από τη σχέση*

$$\sigma_{X,Y}\equiv C(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]. \tag{5.8}$$

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες της συνδιακύμανσης.

Θεώρημα 5.1. (α) *Αν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές και α,β,γ και δ είναι σταθερές τότε*

$$C(\alpha X+\beta,\ \gamma Y+\delta)=\alpha\gamma C(X,Y). \tag{5.9}$$

(β) *Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y εκφράζεται ως εξής:*

$$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y). \tag{5.10}$$

Απόδειξη. (α) Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1 και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέσης τιμής,

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta\,,\ E(\gamma Y+\delta)=\gamma E(Y)+\delta\,,$$

συνάγουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}C(\alpha X+\beta\,,\ \gamma Y+\beta)&=E\{[\alpha X+\beta-E(\alpha X+\beta)][\gamma Y+\delta-E(\gamma Y+\delta)]\}\\&=E\{[\alpha X+\beta-\alpha E(X)-\beta][\gamma Y+\delta-\gamma E(Y)-\delta]\}\\&=\alpha\gamma E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=\alpha\gamma C(X,Y).\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας τις (5.3) και (5.5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}C(X,Y)&=E[X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E(XY-\mu_Y X-\mu_Y Y+\mu_X\mu_Y)\\&=E(XY)-E(\mu_Y X+\mu_X Y-\mu_X\mu_Y)\\&=E(XY)-\mu_Y E(X)-\mu_X E(Y)+\mu_X\mu_Y=E(XY)-E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε σύμφωνα με την (5.10) και χρησιμοποιώντας την (5.7) συμπεραίνουμε ότι $C(X,Y)=0$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Οι τυχαίες μεταβλητές με συνδιακύμανση μηδέν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Έτσι θεωρείται σκόπιμος ο ακόλουθος ορισμός

Ορισμός 5.2. *Έστω (X,Y) μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνδιακύμανση $\sigma_{X,Y}=C(X,Y)$. Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y καλούνται ασυσχέτιστες αν και μόνο αν $C(X,Y)=0$.*

Η συνδιακύμανση εισέρχεται και στην έκφραση της διασποράς του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2. *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές. Τότε με α και β σταθερές ισχύει η μέση*

$$V(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2V(X)+\beta^2V(Y)+2\alpha\beta C(X,Y). \tag{5.11}$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες (ή απλώς ασυσχέτιστες) τότε

$$V(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2V(X)+\beta^2V(Y). \tag{5.12}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά την (5.3) παίρνουμε

$$\begin{aligned}V(\alpha X+\beta Y)&=E\{[\alpha X+\beta Y-E(\alpha X+\beta Y)]^2\}=E\{[\alpha(X-\mu_X)+\beta(Y-\mu_Y)]^2\}\\&=\alpha^2E[(X-\mu_X)^2]+\beta E[(Y-\mu_Y)^2]+2\alpha\beta E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\\&=\alpha^2V(X)+\beta^2V(Y)+2\alpha\beta C(X,Y).\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που οι X και Y είναι ανεξάρτητες (ή απλώς ασυσχέτιστες) έχουμε $C(X,Y)=0$ και έτσι από την (5.11) συμπεραίνουμε την (5.12).

Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y, σύμφωνα με την (5.9), μεταβάλλεται μεταβαλλομένης της κλίμακας μέτρησής τους. Για το λόγο αυτό εισάγουμε το συντελεστή συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών ο οποίος είναι απαλλαγμένος από το μειονέκτημα αυτό.

Ορισμός 5.3. *Έστω (X,Y) μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνδιακύμανση $\sigma_{X,Y}=C(X,Y)$ και διασπορές $\sigma_X^2=V(X)$ και $\sigma_Y^2=V(Y)$. Ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X και Y συμβολιζόμενος με $\rho(X,Y)$ ή $\rho_{X,Y}$ ή απλώς ρ ορίζεται από τη σχέση*

$$\rho\equiv\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}. \tag{5.13}$$

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών δεν μεταβάλλεται από μεταβολές της κλίμακας μέτρησής τους. Επίσης, όπως και η συνδιακύμανση, ο συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών δεν μεταβάλλεται από μεταβολές της θέσης τους.

Θεώρημα 5.3. *Αν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές και α,β,γ και δ σταθερές με $\alpha\gamma\neq 0$, τότε*

$$\rho(\alpha X+\beta\ ,\ \gamma Y+\delta)=\begin{cases}\ \rho(X,Y) & \text{αν} \quad \alpha\gamma>0,\\ -\rho(X,Y) & \text{αν} \quad \alpha\gamma<0.\end{cases} \tag{5.14}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την (5.9) και τις σχέσεις

$$V(\alpha X+\beta)=\alpha^2 V(X)\,,\ V(\gamma Y+\delta)=\gamma^2 V(Y)$$

συνάγουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3, τη σχέση

$$\rho(\alpha X+\beta\ ,\ \gamma Y+\delta)=\frac{C(\alpha X+\beta,\gamma Y+\delta)}{\sqrt{V(\alpha X+\beta)}\sqrt{V(\gamma Y+\delta)}}$$

$$=\frac{\alpha\gamma}{|\alpha|\cdot|\gamma|}\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{\alpha\gamma}{|\alpha\gamma|}\rho(X,Y)\,,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την (5.14).

Θεώρημα 5.4. *Αν* $\rho=\rho(X,Y)$ *είναι ο συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y, τότε*

$$-1\le\rho\le 1\,. \tag{5.15}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι θεωρώντας τις τυποποιημένες τυχαίες μεταβλητές

$$Z=(X-\mu_X)/\sigma_X\,,\ W=(Y-\mu_Y)/\sigma_Y$$

συνάγουμε ως μερική περίπτωση της (5.14) με $\alpha=1/\sigma_X$, $\beta=-\mu_X/\sigma_X$ και $\gamma=1/\sigma_Y$, $\delta=-\mu_Y/\sigma_Y$, οπότε $\alpha\gamma=1/(\sigma_X\sigma_Y)>0$, τη σχέση

$$\rho(Z,W)=\rho(X,Y)\,.$$

Επίσης, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.3 και επειδή $E(Z)=E(W)=0$, $V(Z)=V(W)=1$,

$$\rho(Z,W)=E(ZW)\,.$$

Επομένως

$$\rho(X,Y)=E(ZW)\,. \tag{5.16}$$

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $U=tZ-W\ \ -\infty<t<\infty$. Τότε

$$E(U^2)=t^2E(Z^2)-2tE(ZW)+E(W^2)=t^2-2tE(ZW)+1\,,\ -\infty<t<\infty\,,$$

εφόσον $E(Z^2)=V(Z)=1$ και $E(W^2)=V(W)=1$. Όμως $E(U^2)\ge 0$ και έτσι

$$t^2-2tE(ZW)+1\ge 0\,,\ \infty<t<\infty\,.$$

Τούτο συμβαίνει αν και μόνο αν η διακρίνουσα της τετραγωνικής αυτής έκφρασης δεν είναι θετική και συνεπώς

$$[E(ZW)]^2-1\le 0$$

ή ισοδύναμα

$$-1\le E(ZW)\le 1\,.$$

Η τελευταία αυτή σχέση συνεπάγεται, λόγω της (5.16), την (5.15).

Η σημασία του συντελεστή συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών ως μέτρου συσχέτισης (γραμμικής εξάρτησης) τούτων απορρέει από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.5. *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με συντελεστή συσχέτισης* $r = r(X,Y)$. *Τότε* $\rho = \pm 1$ *αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε με πιθανότητα 1 να ισχύει η γραμμική σχέση*

$$Y = \alpha X + \beta \,. \tag{5.17}$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τις αντίστοιχες των *X* και *Y* τυποποιημένες τυχαίες μεταβλητές

$$Z = (X - \mu_X)/\sigma_X \,,\; W = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$$

και την $U = \rho Z - W$. Τότε

$$E(U) = \rho E(Z) - E(W) = 0$$

και

$$V(U) = \rho^2 V(Z) + V(W) - 2\rho C(Z,W) = \rho^2 + 1 - 2\rho C(Z,W) = 1 - \rho^2$$

εφόσον $C(Z,W) = \rho(Z,W) = \rho(X,Y) = \rho$. Επομένως

$$\rho = \pm 1 \text{ αν και μόνο αν } V(U) = 0 \,.$$

Όμως

$$V(U) = 0 \text{ αν και μόνο αν } P(U = 0) = 1$$

και έτσι

$$\rho = \pm 1 \text{ αν και μόνο αν } Y = \mu_Y \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X)$$

με πιθανότητα 1 εφόσον

$$U = \rho Z - W = \rho(X - \mu_X)/\sigma_X - (Y - \mu_Y)/\sigma_Y \,.$$

Παρατήρηση 5.1. Ο συντελεστής συσχέτισης $\rho = \rho(X,Y)$ δύο τυχαίων μεταβλητών *X* και *Y* κείται στο διάστημα $[-1,1]$, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4. Αν $\rho = 0$, οπότε $C(X,Y) = 0$, οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* είναι ασυσχέτιστες. Αν $\rho = \pm 1$ οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* καλούνται *πλήρως (θετικά ή αρνητικά) συσχετισμένες* και σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5 είναι *γραμμικά εξαρτημένες*. Τιμές του *ρ* που πλησιάζουν το -1 ή το 1 αποτελούν ένδειξη ότι υπάρχει ισχυρή τάση προς γραμμική εξάρτηση των τυχαίων μεταβλητών *X* και *Y* ενώ τιμές του *ρ* που πλησιάζουν το 0 αποτελούν ένδειξη ότι η ύπαρξη τέτοιας τάσης είναι ασθενής. Συμπερασματικά, ο συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών αποτελεί μέτρο του βαθμού γραμμικής εξάρτησης τούτων.

Παράδειγμα 5.1. Έστω (X,Y) μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{21},\; x = 1,2, \quad y = 1,2,3 \,.$$

Να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών *X* και *Y*.

Έχουμε

$$E(XY) = \sum_{y=1}^{3}\sum_{x=1}^{2}\frac{xy(x+y)}{21} = \sum_{y=1}^{3}\frac{y(y+1)+2y(y+2)}{21}$$

$$= \sum_{y=1}^{3}\frac{y(3y+5)}{21} = \frac{24}{7} \,.$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y δίδονται από τις (βλ. Παράδειγμα 3.1)

$$f_X(x) = \frac{x+2}{7}, \ x = 1,2, \ f_Y(y) = \frac{2y+3}{21}, \ y = 1,2,3.$$

Συνεπώς

$$E(X) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x(x+2)}{7} = \frac{11}{7}, \ E(X^2) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x^2(x+2)}{7} = \frac{19}{7},$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{12}{49}$$

και

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{3} \frac{y(2y+3)}{21} = \frac{46}{21}, \ E(Y^2) = \sum_{y=1}^{3} \frac{y^2(2y+3)}{21} = \frac{114}{21},$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{278}{441}.$$

Η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι ίση με

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{24}{7} - \frac{11}{7}\frac{46}{21} = -\frac{2}{147}$$

και επομένως

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = -\frac{1}{\sqrt{834}}.$$

Παράδειγμα 5.2. Έστω (X,Y) μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy, \ 0 \le x \le y \le 1.$$

Να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Η μέση τιμή του γινομένου των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = 8\int_0^1\int_0^y x^2y^2dxdy = \frac{8}{3}\int_0^1 y^5dy = \frac{4}{9}.$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y δίδονται από τις (βλ. Παράδειγμα 3.2)

$$f_X(x) = 4x(1-x^2), \ 0 \le x \le 1, \ f_Y(y) = 4y^3, \ 0 \le y \le 1$$

και έτσι

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)dx = 4\int_0^1 x^{r+1}(1-x^2)dx = \frac{8}{(r+2)(r+4)}, \ r = 1,2,\dots,$$

$$E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_Y(y)dy = 4\int_0^1 y^{r+3}dy = \frac{4}{r+4}, \ r = 1,2,\dots,$$

οπότε

$$E(X)=\frac{8}{15},\ V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225},$$

$$E(Y)=\frac{4}{5},\ V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{2}{75}.$$

Η συνδιακύμανση των X και Y, σύμφωνα με την (5.10), είναι ίση με

$$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{225}$$

και επομένως

$$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{4/225}{\sqrt{(11/225)(2/75)}}=\frac{4}{\sqrt{66}}.$$

6. ΚΑΜΠΥΛΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής όπως ισοδύναμα και η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής σε δεδομένο σημείο μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής περιγράφουν πλήρως την υπό τη συνθήκη αυτή πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της. Μια περιληπτική περιγραφή της δεσμευμένης πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής παρέχεται από τη θεώρηση και μελέτη μερικών βασικών παραμέτρων της δεσμευμένης κατανομής της. Έτσι κατ' αναλογία προς τη μέση τιμή, η δεσμευμένη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X σε δεδομένο σημείο μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής $Y=y$, συμβολιζόμενη με $E(X\mid y_j)$ ή $m_{X|Y}(y_j)$ ή απλώς $m(y_j)$ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, δίδεται από τη σχέση

$$m_{X|Y}(y_j)=E(X\mid y_j)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i f_{X|Y}(x_i\mid y_j) \tag{6.1}$$

αν η X είναι διακριτή και από τη σχέση

$$m_{X|Y}(y)=E(X\mid y)=\int_{-\infty}^{\infty}x f_{X|Y}(x\mid y)dx \tag{6.2}$$

αν η X είναι συνεχής.

Ορισμός 6.1. *Έστω (X,Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και $m_{X|Y}(y)=E(X\mid y)$ η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένης της $Y=y$. Η καμπύλη με εξίσωση*

$$x=m_{X|Y}(y) \tag{6.3}$$

καλείται καμπύλη (μέσης) παλινδρόμησης της X στην Y. Η συνάρτηση $m_{X|Y}(y)$ καλείται συνάρτηση παλινδρόμησης της X στην Y.

Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζονται η συνάρτηση παλινδρόμησης της Y στη X: $m_{Y|X}(x)=E(Y\mid x)$ και καμπύλη (μέσης) παλινδρόμησης της Y στη X:

$$y=m_{Y|X}(x). \tag{6.4}$$

Στην περίπτωση που ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι κατ' απόλυτη τιμή ίσος με τη μονάδα, $\rho(X,Y)=\pm 1$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5 υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β τέτοιοι ώστε με πιθανότητα 1 να ισχύει η σχέση

$$Y=\alpha X+\beta\ ,$$

τότε

$$m_{X|Y}(y)=E(X\mid y)=E[(Y-\beta)/\alpha\mid y]=(y-\beta)/\alpha\,,$$

$$m_{Y|X}(x)=E(Y\mid x)=E[\alpha X\mid\beta\mid x)=\alpha x+\beta$$

και οι καμπύλες παλινδρόμησης $x=m_{X|Y}(y)$ και $y=m_{Y|X}(x)$ συμπίπτουν με την ευθεία $y=\alpha x+\beta$.

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες τότε

$$m_{X|Y}(y)=E(X\mid y)=E(X)=\mu_X\,,\ m_{X|Y}(x)=E(Y\mid y)=E(Y)=\mu_Y$$

και οι καμπύλες παλινδρόμησης $x=m_{X|Y}(y)$ και $y=m_{Y|X}(x)$ είναι οι ευθείες $x=\mu_X$ και $y=\mu_Y$ οι οποίες είναι παράλληλες προς τους άξονες y και x αντίστοιχα και τέμνονται στο σημείο (μ_X,μ_Y).

Στη γενική περίπτωση οι καμπύλες παλινδρόμησης $x=m_{X|Y}(y)$ και $y=m_{Y|X}$ δεν είναι κατ' ανάγκη ευθείες. Όμως από άποψη εφαρμογών είναι συχνά χρήσιμη η προσέγγιση αυτών από μία ευθεία γραμμή. Τούτο επιτυγχάνεται με τον προσδιορισμό μιας ευθείας $x=ay+b$ τέτοιας ώστε η μέση τετραγωνική απόκλιση της X από την $aY+b$,

$$E\{[X-(aY+b)]^2\}, \tag{6.5}$$

να ελαχιστοποιείται. Σημειώνεται ότι η ευθεία αυτή αποτελεί τη βέλτιστη προσέγγιση της καμπύλης παλινδρόμησης $x=m_{X|Y}(y)$ με την έννοια της ελαχιστοποίησης της μέσης τετραγωνικής απόκλισης

$$E\{[m_{X|Y}(Y)-(aY+b)]^2\}\,. \tag{6.6}$$

Θεώρημα 6.1. *Έστω* (X,Y) *μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με*

$$E(X)=\mu_X,\ E(Y)=\mu_Y,\ V(X)=\sigma_X^2,\ V(Y)=\sigma_Y^2,\ \rho(X,Y)=\rho_{X,Y}\,.$$

Τότε η ευθεία

$$x=\alpha y+\beta$$

για την οποία ελαχιστοποιείτάι η μέση τετραγωνική απόκλιση (6.5), δηλαδή

$$\min_{a,b}E\{[X-(aY+b)]^2\}-E\{[X-(\alpha Y+\beta)]^2\}, \tag{6.7}$$

έχει κλίση

$$\alpha=\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \tag{6.8}$$

και τέμνει τον άξονα των x στο σημείο

$$\beta=\mu_X-\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y\,. \tag{6.9}$$

Επιπλέον

$$E\{[X-(\alpha Y+\beta)]^2\}=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2)\,. \tag{6.10}$$

Απόδειξη.Η μέση τετραγωνική απόκλιση (6.5) θεωρούμενη ως συνάρτηση των a και b, έστω $Q(a,b)$, δύναται να γραφεί στη μορφή,

$$\begin{aligned}Q(a,b)&=E\{[X-\mu_X)-a(Y-\mu_Y)+(\mu_X-a\mu_Y-b)]^2\}\\&=E[(X-\mu_X)^2]+a^2E[(Y-\mu_Y)^2]\\&\quad-2aE[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]+(\mu_Y-a\mu_Y-b)^2\\&=\sigma_X^2+a^2\sigma_Y^2-2a\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y+(\mu_X-a\mu_Y-b)^2\,.\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης αυτής ως a και b και θέτοντας αυτές ίσες με μηδέν συνάγουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$a\sigma_Y^2-\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y-\mu_Y(\mu_X-a\mu_Y-b)=0$$

$$\mu_X-a\mu_Y-b=0\,.$$

Η λύση, έστω (α,β), του συστήματος αυτού είναι η

$$\alpha=\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y},\ \beta=\mu_X-\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y$$

και ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $Q(a,b)$. Εισάγοντας τις τιμές αυτές στη συνάρτηση $Q(a,b)$ λαμβάνουμε την ελάχιστη μέση τετραγωνική απόκλιση:

$$\begin{aligned}Q(\alpha,\beta)&=E\{[X-(\alpha Y+\beta)]^2\}=E\{[(X-\mu_X)-\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\mu_Y)]^2\}\\&=E[(X-\mu_X)^2]+\rho_{X,Y}^2\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}E[(Y-\mu_Y)^2]-2\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}E[X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]\\&=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2)\,.\end{aligned}$$

Ορισμός 6.2. *Έστω (X,Y) μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με*

$$E(X)=\mu_X,\ E(Y)=\mu_Y,\ V(X)=\sigma_X^2,\ V(Y)=\sigma_Y^2,\ \rho(X,Y)=\rho_{X,Y}\,.$$

Η ευθεία γραμμή

$$x=\mu_X+\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)$$

καλείται ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y. Η ελάχιστη μέση τετραγωνική απόκλιση

$$E\{[X-(\alpha Y+\beta)]^2\}=\sigma_X^2(1-\rho_{X,Y}^2)$$

καλείται μέσο τετραγωνικό σφάλμα της γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y ή υπόλοιπο διασποράς.

Παράδειγμα 6.1. Έστω (X,Y) μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy\,,\ 0 \le x \le y \le 1\,.$$

Να υπολογισθούν (α) οι καμπύλες (μέσης) παλινδρόμησης και (β) οι ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y και της Y στη X και (γ) να συγκριθούν

(α) Οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας της X δεδομένης της $Y = y$ και της Y δεδομένης της $X = x$ δίδονται από τις (βλ. Παράδειγμα 3.2)

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{2x}{y^2}\,,\ 0 \le x \le y\,,\ f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{2y}{1-x^2}\,,\ x \le y \le 1\,.$$

Επομένως

$$E(X \mid y) = \frac{2}{y^2}\int_0^y x^2 dx = \frac{2y}{3},$$

$$E(Y \mid x) = \frac{2}{1-x^2}\int_x^1 y^2 dy = \frac{2(1-x^3)}{1-x^2} = \frac{2(x^2+x+1)}{3(x+1)}$$

και οι καμπύλες (μέσης) παλινδρόμησης της X στην Y και της Y στη X είναι οι

$$x = \frac{2y}{3} \text{ και } y = \frac{2(x^2+x+1)}{3(x+1)},$$

αντίστοιχα.

(β) Ο μέσες τιμές, οι διασπορές και ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίδονται από τις (βλ. Παράδειγμα 5.2)

$$\mu_X = 8/15\,,\ \mu_Y = 4/5\,,\ \sigma_X^2 = 11/225\,,\ \sigma_Y^2 = 2/75\,,\ \rho_{X,Y} = 4\sqrt{66}\,.$$

Η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y, $x = \alpha y + \beta$, σύμφωνα με τις (6.8) και (6.9) έχει κλίση

$$\alpha = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{2}{3}$$

και τέμνει τον άξονα των x στο σημείο

$$\beta = \mu_X - \rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y = \mu_X - \alpha\mu_Y = \frac{8}{15} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = 0\,.$$

Επομένως η ευθεία αυτή είναι

$$x = \frac{2y}{3}\,.$$

Ομοίως για την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X, $y = \gamma X + \delta$, έχουμε

$$Y = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{4}{11}\,,\ \delta = \mu_Y - \gamma\mu_X = \frac{4}{5} - \frac{4}{11}\cdot\frac{8}{15} = \frac{20}{33}$$

και έτσι

$$y = \frac{4(3x+5)}{33}\,.$$

(γ) Η καμπύλη παλινδρόμησης της X στην Y είναι ευθεία και συμπίπτει με την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y ενώ η καμπύλη παλινδρόμησης της Y στη X δεν είναι ευθεία.

6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x,y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίδεται από τις σχέσεις

$$f(1,1)=f(2,1)=\frac{1}{8},\ f(1,2)=\frac{1}{4},\ f(2,2)=\frac{1}{2}.$$

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x), f_Y(y)$ και να εξετασθεί αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες. (β) Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $E(XY)$, $E(X/Y)$ και $E(Y/X)$. (γ) Να βρεθούν οι δεσμευμένες κατανομές της X δεδομένης της Y και της Y δεδομένης της X. Στη συνέχεια να υπολογισθούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές $E(X\mid Y=1)$, $E(X\mid Y=2)$, $E(Y\mid X=1)$ και $E(Y\mid X=2)$.

2. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x,y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίδεται από τις σχέσεις

$$f(0,0)=f(0,1)=f(1,1)=\frac{1}{3}.$$

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x), f_Y(y)$ και να εξετασθεί αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες. (β) Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $E(XY)$, $E((X+1)/(Y+1))$, και $E((Y+1)/(X+1))$.

3. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίδεται από τον τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x-2y} & \text{αν}\quad x>0, y>0\\ 0 & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x), f_Y(y)$ και να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X>1)$, $P(X<3)$, $P(X>2, Y<1)$ $P(X>2\mid Y<1)$, και $P(X<Y)$. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

4. Από ένα δοχείο που περιέχει 3 άσπρα, 4 μαύρα και 5 κόκκινα σφαιρίδια εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 σφαιρίδια. Έστω X ο αριθμός των εξαγομένων άσπρων και Y ο αριθμός των εξαγομένων μαύρων σφαιριδίων. Να υπολογισθούν (α) η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις των X και Y. (β) οι μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$ και οι διασπορές $V(X)$, $V(Y)$ και (γ) η συνδιακύμανση $\sigma_{X,Y}=C(X,Y)$ και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{X,Y}=\rho(X,Y)$

5. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f(x,y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίδεται από τον επόμενο πίνακα

X \ Y	0	100	200

100	0,20	0,10	0,20
250	0,05	0,15	0,30

(α) Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$, $f_Y(x)$ και να εξετασθεί αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες. Επίσης να υπολογισθούν (β) οι πιθανότητες $P(X=Y)$, $P(|X-Y|=100)$ και $P(X+Y\leq 300)$ και (γ) οι $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $C(X,Y)$ και $\rho(X,Y)$.

6. Έστω X ο αριθμός των ετησίων πωλήσεων μιας εταιρείας κατασκευής ιατρικών οργάνων υψηλής τεχνολογίας και Y ο αριθμός των ετησίων πωλήσεων μιας άλλης ανταγωνιστικής εταιρείας που απευθύνεται στον ίδιο χώρο (π.χ. μια συγκεκριμένη χώρα) με την πρώτη. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y περιγράφεται από τον επόμενο πίνακα

X \ Y	0	1	2	3
0	0,08	0,07	0,04	0
1	0,06	0,15	0,05	0,04
2	0,05	0,04	0,10	0,06
3	0	0,03	0,04	0,07
4	0	0,01	0,05	0,06

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) οι ετήσιες πωλήσεις των δύο εταιρειών να είναι οι ίδιες, (β) μια από τις δύο εταιρείες να ξεπεράσει την άλλη στις ετήσιες πωλήσεις κατά 2 ακριβώς μονάδες, (γ) ο συνολικός αριθμός πωλήσεων των δύο εταιρειών να είναι (i) ακριβώς 4 και (ii) τουλάχιστον 2. (δ) Επίσης να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y και οι μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$ και $E(X+Y)$.

7. Μια φαρμακευτική εταιρεία διανέμει στο εμπόριο κουτιά βάρους 1 kg τα οποία περιέχουν 3 διαφορετικές βιταμίνες B_1, B_2, και B_3. Το βάρος X των βιταμινών τύπου B_1 και το βάρος Y των βιταμινών τύπου B_2 που περιέχονται στο κουτί είναι τυχαίες μεταβλητές (το βάρος της B_3 είναι $Z=1-X-Y$) με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy, & 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ x+y\leq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η τιμή της σταθερής c και (β) το ποσοστό των κουτιών που περιέχουν τουλάχιστον 500 gr βιταμίνες B_3. (γ) Να προσδιορισθεί οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας και οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών X και Y. (δ) Αν το κόστος παρασκευής των τριών βιταμινών ανά kgr είναι 1, 2 και 3 ευρώ,. αντίστοιχα, πόσο είναι το μέσο κόστος ενός κουτιού; (ε) Να βρεθούν οι συνδιακυμάνσεις $C(X,Y)$, $C(Y,Z)$, $C(X,Z)$ και οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(X,Y)$, $\rho(Y,Z)$, $\rho(X,Z)$.

8. Έστω X και Y δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

Y / X	0	1	2
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	

(α) Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$, $f_Y(x)$ και να δειχθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* δεν είναι ανεξάρτητες. (β) Να δειχθεί ότι $E(XY) = E(X)E(Y)$ παρά το ότι οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* δεν είναι ανεξάρτητες.

9. Έστω ότι το 15% των οικογενειών ενός πληθυσμού δεν έχουν παιδιά, το 20% έχουν 1, το 35% έχουν 2 και το 30% έχουν 3. Ας υποθέσουμε επί πλέον ότι σε κάθε οικογένεια η πιθανότητα ένα παιδί να είναι αγόρι είναι $1/2$. Αν *X* είναι ο αριθμός αγοριών και *Y* ο αριθμός των κοριτσιών σε μια οικογένεια του πληθυσμού, (α) να υπολογισθούν η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των *X* και *Y* και (β) να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες μεταβλητές *X* και *Y* είναι ανεξάρτητες. (γ) Να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y)$.

10 Δύο ιατροί α και β πρόκειται να ξεκινήσουν την εξέταση των ασθενών της κλινικής τους στις 9.00 π.μ. Έστω ότι κάθε ένας από τους ιατρούς φτάνει στον τόπο έναρξης της εξέτασης ανεξάρτητα από τον άλλο και σε χρόνο που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα από 8:45 π.μ. μέχρι 9:15 π.μ. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) ο ιατρός α να χρειαστεί να περιμένει περισσότερο από 5 λεπτά για την έναρξη της εξέτασης (η εξέταση αρχίζει αφού φτάσουν και οι δύο ιατροί) και (β) ο ιατρός που φτάνει πρώτος στον τόπο της εξέτασης να χρειαστεί να περιμένει τον δεύτερο περισσότερο από 5 λεπτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ ΚΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ

Η στατιστική ασχολείται με τη μεθοδολογία συλλογής δεδομένων (σχεδιασμός στατιστικών πειραμάτων, δειγματοληψία), τη συνοπτική παρουσίασή τους (περιγραφική στατιστική) και την εξαγωγή συμπερασμάτων (στατιστική συμπερασματολογία). Τα στατιστικά δεδομένα εκφράζουν ποσοτικά ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά των στοιχείων ενός υποσυνόλου το οποίο εκλέγεται κατάλληλα από το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων. Σχετικά εισάγουμε τις βασικές στατιστικές έννοιες του πληθυσμού και του τυχαίου δείγματος.

Το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων, σε μία στατιστική μελέτη, καλείται πληθυσμός. Το χαρακτηριστικό ή τα χαρακτηριστικά των στοιχείων (μονάδων) ενός πληθυσμού εκφράζονται ποσοτικά από μία μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή X. Ακριβέστερα, και υπό την έννοια αυτή, (στατιστικός) *πληθυσμός* καλείται το σύνολο των τιμών της τυχαίας μεταβλητής X. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μία κατανομή με συνάρτηση κατανομής $F(x\,|\,\theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$. Το σύνολο Θ των δυνατών τιμών της παραμέτρου θ καλείται *παραμετρικός χώρος*. Έτσι σε μία στατιστική εξέταση της απόδοσης των φοιτητών του Τμήματος Μαθηματικών στο μάθημα των Πιθανοτήτων, το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων είναι το σύνολο των φοιτητών που εγγράφονται στο μάθημα αυτό. Το υπό μελέτη χαρακτηριστικό των στατιστικών μονάδων (φοιτητών) είναι ο βαθμός (επίδοση) αυτών. Το σύνολο των βαθμών των φοιτητών στο μάθημα των Πιθανοτήτων αποτελεί τον (στατιστικό) πληθυσμό. Ο βαθμός X θεωρείται ως τυχαία μεταβλητή της οποίας η κατανομή είναι (κατά προσέγγιση) η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Το ζεύγος $\theta = (\mu, \sigma)$ είναι μια διδιάστατη παράμετρος του πληθυσμού με παραμετρικό χώρο $\Theta = \{(\mu, \sigma) : -\infty < \mu < \infty,\ 0 < \sigma < \infty\}$.

Ένα υποσύνολο ενός πληθυσμού καλείται *δείγμα* από τον πληθυσμό αυτό. Η λήψη ενός δείγματος από τον πληθυσμό γίνεται σε γενικές γραμμές ως εξής: Ακολουθώντας μία κατάλληλη μέθοδο εκλέγουμε από το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων (μονάδων) ένα υποσύνολο ν στοιχείων και παρατηρούμε τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ του υπό εξέταση χαρακτηριστικού των στοιχείων αυτών. Έστω X_κ η τυχαία μεταβλητή της οποίας οι δυνατές τιμές είναι οι τιμές x_κ του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού του κ-οστού στοιχείου, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$, στα δυνατά υποσύνολα ν στοιχείων τα οποία εκλέγονται από το σύνολο των υπό εξέταση στοιχείων με τη συγκεκριμένη μέθοδο. Έτσι ένα δείγμα από τον πληθυσμό στον οποίο το υπό εξέταση χαρακτηριστικό των στατιστικών μονάδων του εκφράζεται ποσοτικά από την τυχαία μεταβλητή X, καθορίζεται από το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$. Οι παρατηρούμενες τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ των τυχαίων μεταβλητών αποτελούν συγκεκριμένο δείγμα.

Στη στατιστική συμπερασματολογία αντί ενός οποιουδήποτε δείγματος χρησιμοποιείται ένα δείγμα, το τυχαίο δείγμα, η συμπερίληψη στο οποίο ενός στοιχείου του πληθυσμού είναι ανεξάρτητη από και εξ ίσου πιθανή με τη συμπερίληψη σ' αυτό οποιουδήποτε άλλου στοιχείου του πληθυσμού. Συγκεκριμένα θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1. *Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής* $F(x\,|\,\theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$. *Τυχαίο δείγμα μεγέθους ν από τον πληθυσμό αυτό καλείται ένα σύνολο ν ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών* $X_1, X_2, ..., X_\nu$ *με κοινή συνάρτηση κατανομής την* $F(x\,|\,\theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, ..., X_\nu$ δίδεται από την

$$F(x_1, x_2, ..., x_\nu \,|\, \theta) = F(x_1 \,|\, \theta) F(x_2 \,|\, \theta) \cdots F(x_\nu \,|\, \theta),$$

για $x_\kappa \in R$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$, $\theta \in \Theta$. Στις περιπτώσεις που η κατανομή του πληθυσμού είναι διακριτή ή συνεχής με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x\,|\,\theta)$, η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας του τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, ..., X_\nu$ δίδεται από την

$$f(x_1, x_2, ..., x_\nu \,|\, \theta) = f(x_1 \,|\, \theta) f(x_2 \,|\, \theta) \cdots f(x_\nu \,|\, \theta),$$

για $x_\kappa \in R$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$, $\theta \in \Theta$.

Παράδειγμα 1.1. Από το σύνολο των *N* φοιτητών που προσήλθαν στις τελευταίες εξετάσεις στο μάθημα των Πιθανοτήτων εκλέγεται τυχαία ένα υποσύνολο *ν* φοιτητών. Το ποσοστό, έστω *p*, των φοιτητών που πέτυχαν στις εξετάσεις αποτελεί το αντικείμενο της στατιστικής έρευνας. Το χαρακτηριστικό των στατιστικών μονάδων (φοιτητών) το οποίο είναι επιτυχία ή αποτυχία στις εξετάσεις εκφράζεται ποσοτικά από δίτιμη τυχαία μεταβλητή *X* που ορίζεται ως εξής:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{αν ένας φοιτητής απέτυχε στις εξετάσεις} \\ 1, & \text{αν ένας φοιτητής πέτυχε στις εξετάσεις.} \end{cases}$$

Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής *X* (η οποία είναι και η κατανομή του πληθυσμού) έχει συνάρτηση πιθανότητας τη δίτιμη Bernoulli,

$$f(x\,|\,p) = p^x (1-p)^{1-x}, \; x = 0, 1, \; 0 < p < 1.$$

Έστω

$$X_i = \begin{cases} 0, \text{ αν ο } i \text{ φοιτητής που εκλέγεται απέτυχε στις εξετάσεις} \\ 1, \text{ αν ο } i \text{ φοιτητής που εκλέγεται πέτυχε στις εξετάσεις.} \end{cases}$$

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, ..., X_\nu$ είναι η

$$f(x_1, x_2, ..., x_\nu \,|\, p) = p^{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu} (1-p)^{\nu - (x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu)},$$

για $x_i = 0, 1$, $i = 1, 2, ..., \nu$, $0 < p < 1$.

1. ΔΕΙΓΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η στατιστική συμπερασματολογία, με αφετηρία ένα τυχαίο δείγμα από τον υπό εξέταση πληθυσμό, έχει ως σκοπό τη συναγωγή συμπερασμάτων που αφορούν τον γεννήτορα αυτό πληθυσμό. Η απαιτούμενη για το σκοπό αυτό εξέταση και μελέτη ενός τυχαίου δείγματος επιτυγχάνεται με τη χρησιμοποίηση των κατά περίπτωση πιο κατάλληλων συναρτήσεων του τυχαίου αυτού δείγματος. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1. *Έστω* $X_1, X_2, ..., X_\nu$ *τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής* $F(x \mid \theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$. *Μία συνάρτηση* $T = T(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ *των τυχαίων μεταβλητών* $X_1, X_2, ..., X_\nu$, *η οποία δεν περιέχει την άγνωστη παράμετρο θ, καλείται δειγματοσυνάρτηση ή στατιστική συνάρτηση.*

Ας σημειωθεί ότι μία δειγματοσυνάρτηση *T*, ως συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών, είναι επίσης τυχαία μεταβλητή. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες δειγματο-συναρτήσεις είναι τα μέτρα (α) θέσης ή κεντρικής τάσης και (β) συγκεντρωτικότητας ή μεταβλητότητας του τυχαίου δείγματος τα οποία ορίζονται κατ’ αναλογία με τα αντίστοιχα (θεωρητικά) μέτρα της κατανομής του πληθυσμού. Έτσι, ο *δειγματικός μέσος* ενός τυχαίου δείγματος $X_1, X_2, ..., X_\nu$, συμβολιζόμενος με $\overline{X}$, ορίζεται από την

$$\overline{X} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i \tag{2.1}$$

και η *δειγματική διασπορά*, συμβολιζόμενη με S^2, ορίζεται από τη σχέση

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2 . \tag{2.2}$$

Ας σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις δειγμάτων με μικρό μέγεθος *ν* χρησιμοποιείται η ακόλουθη τροποποιημένη δειγματική διασπορά

$$S_A^2 = \frac{1}{\nu - 1}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2 . \tag{2.3}$$

Σε οποιαδήποτε περίπτωση η $S = \sqrt{S^2}$ καλείται *δειγματική τυπική απόκλιση*.

Ας θεωρήσουμε μία στατιστική έρευνα η οποία αφορά την από κοινού εξέταση δύο χαρακτηριστικών των στατιστικών μονάδων ενός πληθυσμού. Ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό είναι ένα σύνολο *ν* ανεξαρτήτων και ισονόμων ζευγών τυχαίων μεταβλητών $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_\nu, Y_\nu)$. Στην περίπτωση αυτή η *δειγματική συνδιακύμανση*, συμβολιζόμενη με S_{XY}, ορίζεται από την

$$S_{XY} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}). \tag{2.4}$$

και ο *δειγματικός συντελεστής συσχέτισης*, συμβολιζόμενος με *r*, ορίζεται από την

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(Y_i - \overline{Y})^2}} . \tag{2.5}$$

Ο υπολογισμός μέτρων αξιολόγησης των συμπερασμάτων, στα οποία καταλήγει μία στατιστική έρευνα με τη χρησιμοποίηση κατάλληλης συνάρτησης του τυχαίου δείγματος, απαιτεί τη γνώση της κατανομής της δειγματοσυνάρτησης αυτής. Μία περιληπτική περιγραφή της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς μιας δειγματοσυνάρτησης παρέχεται από τις παραμέτρους θέσης, συγκεντρωτικότητας, συμμετρίας ή ασυμμετρίας και κυρτότητας της κατανομής της. Στο εδάφιο αυτό περιοριζόμαστε στην παράθεση της μέσης τιμής και διασποράς των βασικών δειγματοσυναρτήσεων $\overline{X}$ και S^2 ενώ στο επόμενο εδάφιο παρουσιάζουμε τις σημαντικότερες δειγματικές κατανομές.

Θεώρημα 2.1. *Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Τότε*

$$E(\overline{X}) = \mu\,,\ V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{\nu} \tag{2.6}$$

και

$$E(S^2) = \frac{\nu-1}{\nu}\sigma^2\,. \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_\nu$ και το ότι $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$, $i = 1,2,...,\nu$, παίρνουμε

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i) = \frac{1}{\nu}\nu\mu = \mu\,,$$

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} V(X_i) = \frac{1}{\nu^2}\nu\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\nu}\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}X_i^2 - \overline{X}^2$$

και έτσι

$$E(S^2) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}E(X_i^2) - E(\overline{X}^2) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\{V(X_i) + [E(X_i)]^2\} - \{V(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2\}$$

$$= \frac{1}{\nu}\nu(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{\nu} + \mu^2\right) = \frac{\nu-1}{\nu}\sigma^2\,.$$

Παρατήρηση 2.1. (α) Συγκρίνοντας τις (2.2) και (2.3) συνάγουμε τη σχέση

$$S_A^2 = \frac{\nu}{\nu-1}S^2$$

και έτσι

$$E(S_A^2) = \frac{\nu}{\nu-1}E(S^2)\,.$$

Επομένως σύμφωνα με τη (2.7)

$$E(S_A^2) = \sigma^2\,. \tag{2.8}$$

(β) Αν $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους *κ* από έναν πληθυσμό με μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2 και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους *ν* από ένα άλλο ανεξάρτητο πληθυσμό με μέση τιμή μ_Y και διασπορά σ_Y^2, τότε σύμφωνα με τις (2.6),

$$E(\overline{X} \pm \overline{Y}) = \mu_X \pm \mu_Y \,,\; V(\overline{X} \pm \overline{Y}) = \frac{\sigma_X^2}{\kappa} + \frac{\sigma_Y^2}{\nu}.$$

3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Οι κατανομές χ^2 (χι τετράγωνον), *t* (του Student) και *F* (του Snedecor) είναι οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ως δειγματικές κατανομές. Στοιχεία των κατανομών αυτών παραθέτουμε στο εδάφιο αυτό (παραλείποντας αποδείξεις τις οποίες ο αναγνώστης δύναται να αναζητήσει σε βιβλία της Θεωρίας Πιθανοτήτων).

Ορισμός 3.1. *Η κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_\nu(u) = \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} u^{(\nu/2)-1} e^{-u/2} \,,\; 0 < u < \infty$$

καλείται χ^2 *(χι τετράγωνο) κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.*

Για τη διευκόλυνση των εφαρμογών της χ^2 κατανομής η συνάρτηση κατανομής αυτής,

$$F_\nu(u) = \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \int_0^u x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2} dx \,,$$

έχει πινακοποιηθεί για διάφορες τιμές $F_\nu(u) = \alpha$ και για $\nu = 1, 2, ..., 35$. Για $\nu > 35$ χρησιμοποιείται η προσέγγιση της κατανομής αυτής από την κανονική κατανομή $N(\nu, 2\nu)$.

Θεώρημα 3.1. *Έστω* $Z_1, Z_2, ..., Z_\nu$ *ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τυποποιημένη κανονική κατανομή* $N(0,1)$. *Τότε η τυχαία μεταβλητή*

$$U_\nu = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_\nu^2$$

ακολουθεί τη χ^2*-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.*

Ορισμός 3.2. *Η κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu} B(1/2, \nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} ,\; -\infty < t < \infty$$

καλείται κατανομή του Student ή t-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.

Η συνάρτηση κατανομής της *t* κατανομής,

$$F_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu} B(1/2, \nu/2)} \int_{-\infty}^t (1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2} dx \,,$$

έχει πινακοποιηθεί για διάφορες τιμές $F_\nu(t) = \alpha$ και $\nu = 1, 2, ..., 35$. Για $\nu > 35$ χρησιμοποιείται η προσέγγιση της κατανομής αυτής από την κανονική $N(0, \nu/(\nu-2))$.

Θεώρημα 3.2. *Έστω Z και U_ν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομές την τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$ και τη χ^2-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα. Τότε η τυχαία μεταβλητή*

$$T_\nu = \frac{Z}{\sqrt{U_\nu/\nu}}$$

ακολουθεί την t-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.

Ορισμός 3.3. *Η κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_{\kappa,\nu}(w) = \frac{\kappa^{\kappa/2}\nu^{\nu/2}}{B(\kappa/2,\nu/2)}\frac{w^{(\kappa/2)-1}}{(\nu+\kappa w)^{(\kappa+\nu)/2}},\ 0 < w < \infty$$

καλείται κατανομή του Snedecor ή F-κατανομή με κ και ν βαθμούς ελευθερίας.

Για τη διευκόλυνση των εφαρμογών η συνάρτηση κατανομής

$$F_{\kappa,\nu}(w) = \frac{\kappa^{\kappa/2}\nu^{\nu/2}}{B(\kappa/2,\nu/2)}\int_0^w \frac{x^{(\kappa/2)-1}}{(\nu+\kappa x)^{(\kappa+\nu)/2}}dx$$

έχει πινακοποιηθεί για διάφορες τιμές των *w*, $F_{\kappa,\nu}(w) = \alpha$ για $\kappa,\nu = 1,2,\ldots$.

Θεώρημα 3.3. *Έστω U_κ και U_ν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν τη χ^2-κατανομή με κ και ν βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα. Τότε η τυχαία μεταβλητή*

$$W_{\kappa,\nu} = \frac{U_\kappa/\kappa}{U_\nu/\nu}$$

ακολουθεί την F-κατανομή με κ και ν βαθμούς ελευθερίας.

Οι σημαντικότερες δειγματικές κατανομές είναι οι ακριβείς ή κατά προσέγγιση κατανομές (α) του δειγματικού μέσου (β) της δειγματικής διασποράς και (γ) του πηλίκου του τυποποιημένου δειγματικού μέσου και της δειγματικής τυπικής απόκλισης τυχαίων δειγμάτων προερχομένων από πληθυσμούς με κανονική ή με οποιαδήποτε κατανομή. Συγκεκριμένα παραθέτουμε τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.4. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$. Τότε*

(α) ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2/\nu)$,

(β) η τυχαία μεταβλητή $\nu S^2/\sigma^2$ ακολουθεί τη χ^2-κατανομή με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας και

(γ) οι τυχαίες μεταβλητές $\overline{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες και η τυχαία μεταβλητή

$$T_{\nu-1} = \frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{\nu-1}}{S}$$

ακολουθεί την t-κατανομή με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Θεώρημα 3.5. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$ ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κανονικές κατανομές $N(\mu_X,\sigma_X^2)$ και $N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$, αντίστοιχα. Τότε* (α) *η διαφορά των δειγματικών μέσων* $\overline{X}-\overline{Y}$ *ακολουθεί την κανονική κατανομή* $N(\mu_X-\mu_Y,(\sigma_X^2/\kappa)+(\sigma_Y^2/\nu))$.

(β) *το πηλίκο των δειγματικών διασπορών*

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$$

ακολουθεί την F *-κατανομή με* $\kappa-1$ *και* $\nu-1$ *βαθμούς ελευθερίας.*

(γ) *με την προϋπόθεση ότι* $\sigma_X^2=\sigma_Y^2\equiv\sigma^2$, *η τυχαία μεταβλητή*

$$T_{\kappa+\nu-2}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\kappa S_X^2+\nu S_Y^2}{\kappa+\nu-2}\left(\dfrac{1}{\kappa}+\dfrac{1}{\nu}\right)}},$$

ακολουθεί t-κατανομή με $\kappa+\nu-2$ *βαθμούς ελευθερίας.*

Θεώρημα 3.6. (*Νόμος μεγάλων αριθμών*). *Έστω* $X_1,X_2,...,X_\nu$ *τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά* σ^2. *Τότε ο δειγματικός μέσος* $\overline{X}$ *για μεγάλο ν είναι κατά προσέγγιση ίσος με τον θεωρητικό μέσο μ,*

$$\overline{X}\cong\mu .$$

Θεώρημα 3.7. (*Κεντρικό οριακό θεώρημα*). *Έστω* $X_1,X_2,...,X_\nu$ *τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά* σ^2. *Τότε ο τυποποιημένος δειγματικός μέσος*

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}},$$

για μεγάλο ν, ακολουθεί κατά προσέγγιση την τυποποιημένη κανονική κατανομή,

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\le z\right)\cong\Phi(z).$$

4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $X_1,X_2,...,X_\nu$ τυχαίο δείγμα πληθυσμού με κατανομή

(α) την Bernoulli με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x\mid p)=p^x(1-p)^{1-x},\ x=0,1,\ 0<p<1,$$

(β) τη γεωμετρική με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x\mid p)=pq^x,\ x=0,1,2,...,\ q=1-p,\ 0<p<1.$$

(γ) την Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x\mid\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x=0,1,2,...,\ 0<\lambda<\infty.$$

Να βρεθεί σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές η συνάρτηση πιθανότητας της στατιστικής συνάρτησης $T=\sum_{i=1}^{\nu}X_i$.

2. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή

$$f(x \mid N) = \frac{1}{N}, \; x = 1, 2, ..., N.$$

Δείξετε ότι η στατιστική συνάρτηση $T = \max\{X_1, X_2, ..., X_\nu\}$ ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$g(t \mid N) \equiv P(T = t) = \frac{t^\nu - (t-1)^\nu}{N^\nu}, \; t = 1, 2, ..., N.$$

3. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με την εκθετική κατανομή:

$$f(x \mid \theta) = \theta\, e^{-\theta x}, \; 0 < x < \infty, \; 0 < \theta < \infty.$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της στατιστικής συνάρτησης $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$.

4. (*Συνέχεια*). Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $Z = 2\theta \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ ακολουθεί τη χ^2 κατανομή με 2ν βαθμούς ελευθερίας.

5. (*Συνέχεια*). Ας θεωρήσουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ από την εκθετική κατανομή:

$$f_X(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, \; 0 < x < \infty, \; 0 < \theta < \infty$$

και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ από την εκθετική κατανομή:

$$f_Y(y \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}, \; 0 < y < \infty, \; 0 < \lambda < \infty.$$

Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $W = (\theta \overline{X})/(\lambda \overline{Y})$ ακολουθεί την *F*-κατανομή με 2κ και 2ν βαθμούς ελευθερίας.

6. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή,

$$f(x \mid \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, \; \theta_1 \le x \le \theta_2, \; 0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty.$$

Να βρεθούν οι περιθώριες και η από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας των στατιστικών συναρτήσεως $T_1 = \min\{X_1, X_2, ..., X_\nu\}$ και $T_2 = \max\{X_1, X_2, ..., X_\nu\}$.

7. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή U_ν ακολουθεί τη χ^2-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f_{W_\nu}(w)$ της τυχαίας μεταβλητής $W_\nu = (U_\nu - \nu)/\sqrt{2\nu}$ συγκλίνει, για $\nu \to \infty$, στη συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

8. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή T_ν ακολουθεί την *t*-κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας $f_{W_\nu}(w)$ της τυχαίας μεταβλητής $W_\nu = \sqrt{\nu - 2}\; T_\nu / \sqrt{\nu}$ συγκλίνει, για $\nu \to \infty$, στη συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

1. ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥΣ

Στη στατιστική συμπερασματολογία η κατανομή του υπό εξέταση πληθυσμού δύναται να είναι μία γνωστή οικογένεια κατανομών $F(x\,|\,\theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$ με μόνη άγνωστη τη μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη παράμετρο θ. Για παράδειγμα αυτή δύναται να είναι η οικογένεια των κατανομών Bernoulli με

$$F(x\,|\,p) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1-p, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

στην οποία άγνωστη παράμετρος είναι η πιθανότητα επιτυχίας p με παραμετρικό χώρο το διάστημα $(0,1)$ ή η οικογένεια των κανονικών κατανομών με

$$F(x\,|\,\mu,\sigma^2) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} du\,,\; z = (x-\mu)/\sigma\,,\; -\infty < x < \infty$$

στην οποία άγνωστη παράμετρος είναι το ζεύγος $\theta = (\mu,\sigma^2)$, όπου μ είναι η μέση τιμή και σ^2 η διασπορά της κατανομής. Η στατιστική συμπερασματολογία αφορά, στην περίπτωση αυτή, την άγνωστη παράμετρο θ και γι' αυτό χαρακτηρίζεται ως *παραμετρική*. Στοιχεία της παραμετρικής στατιστικής συμπερασματολογίας παρουσιάζουμε στη συνέχεια. Σημειώνουμε μόνο ότι η *απαραμετρική* στατιστική συμπερασματολογία ασχολείται με πληθυσμούς των οποίων η κατανομή είναι εντελώς άγνωστη. Τα στατιστικά συμπεράσματα δύναται να είναι είτε της μορφής της εκχώρησης μιας τιμής ή ενός διαστήματος τιμών στην άγνωστη παράμετρο (εκτιμητική) ή της μορφής της απόφασης για την απόρριψη ή μη μιας υπόθεσης που αφορά την άγνωστη παράμετρο (έλεγχος στατιστικών υποθέσεων). Σχετικά με τη σημειακή εκτίμηση παραμέτρου θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1 *Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής $F(x\,|\,\theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$. Εκτιμήτρια της παραμέτρου θ καλείται μία δειγματοσυνάρτηση $T(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ με πεδίο τιμών τον παραμετρικό χώρο Θ. Η τιμή $T(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ για συγκεκριμένο τυχαίο δείγμα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ καλείται εκτίμηση της θ.*

Σημειώνουμε ότι η εκτιμήτρια μιας παραμέτρου είναι τυχαία μεταβλητή ενώ η εκτίμηση αυτής είναι ένας σταθερός αριθμός.

Η δυνατότητα εύρεσης περισσοτέρων της μιας εκτιμητριών για την ίδια παράμετρο θέτει το πρόβλημα της αξιολόγησής τους για την επιλογή της κατά περίπτωση καταλληλότερης. Δύο από τα σημαντικότερα στοιχεία αξιολόγησης εκτιμητριών είναι το μέτρο της μεροληψίας τους και το μέτρο της διασποράς τους. Σχετικά θέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.2. *Έστω* $X_1, X_2, ..., X_\nu$ *τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής* $F(x \mid \theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$ *και* $T = T(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ *μια εκτιμήτρια της παραμέτρου* θ.

(α) Η εκτιμήτρια $T = T(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ *καλείται αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ αν και μόνο αν*

$$E(T) = \theta \text{ για κάθε } \theta \in \Theta \tag{1.1}$$

(β) Η διαφορά

$$b_T(\theta) = E(T) - \theta \, , \; \theta \in \Theta \tag{1.2}$$

καλείται μεροληψία της εκτιμήτριας T της παραμέτρου θ.

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό αυτό η μεροληψία μιας αμερόληπτης εκτιμήτριας είναι μηδενική.

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από πληθυσμό με οποιαδήποτε κατανομή της οποίας η μέση τιμή είναι μ και η διασπορά είναι σ^2. Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ και η δειγματική διασπορά S^2 είναι εκτιμήτριες του μέσου μ και της διασποράς σ^2, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 του Κεφαλαίου 6, ισχύουν οι σχέσεις

$$E(\overline{X}) = \mu \, , \; E(S^2) = \frac{\nu - 1}{\nu} \sigma^2 \, .$$

Επομένως ο $\overline{X}$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του μ είναι η S^2 δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2. Η μεροληψία της S^2 είναι ίση με

$$b_{S^2}(\sigma^2) = E(S^2) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{\nu} \, .$$

Η τροποποιημένη δειγματική διασπορά S_A^2, η οποία δίδεται από τη (2.3) του Κεφαλαίου 6 και συνδέεται με την S^2 με τη σχέση

$$S_A^2 = \frac{\nu}{\nu - 1} S^2 \, ,$$

έχει μέση τιμή

$$E(S_A^2) = \frac{\nu}{\nu - 1} E(S^2) = \frac{\nu}{\nu - 1} \cdot \frac{\nu - 1}{\nu} \sigma^2 = \sigma^2$$

και επομένως είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2.

Ένα μέτρο της απόκλισης (σφάλματος) μιας εκτιμήτριας *T* από την εκτιμουμένη παράμετρο *θ* αποτελεί το *μέσο τετραγωνικό σφάλμα* $E[(T - \theta)^2]$. Στην περίπτωση που η *T* είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου *θ*, $\mu_T = E(T) = \theta$, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αυτής συμπίπτει με τη διασπορά της

$$E[(T - \theta)^2] = E[(T - \mu_T)^2] = V(T) \, .$$

Για το λόγο αυτό η τυπική απόκλιση $\sigma_T = \sqrt{V(T)}$ μιας αμερόληπτης εκτιμήτριας T της παραμέτρου θ καλείται και *τυπικό σφάλμα* της εκτιμήτριας T. Η ευνόητη προτίμηση σε εκτιμήτριες με όσο το δυνατό μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα συνδυαζομένη με την απαίτηση για αμερόληπτες εκτιμήτριες οδηγεί στην αναζήτηση *αμερολήπτων εκτιμητριών ελαχίστης διασποράς*. Σχετικά σημειώνουμε ότι η διασπορά μιας αμερόληπτης εκτιμήτριας T της παραμέτρου θ δεν μπορεί να είναι μικρότερη από ένα κατώτερο φράγμα σύμφωνα με την *ανισότητα Cramér-Rao* (η οποία ισχύει κάτω από πολύ γενικές συνθήκες):

$$V(T) \geq \frac{1}{\nu I(\theta)}, \tag{1.3}$$

όπου

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X \mid \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] \tag{1.4}$$

με $f(x \mid \theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$ τη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας της κατανομής του πληθυσμού και ν το μέγεθος του τυχαίου δείγματος. Η ποσότητα (1.4) καλείται (κατά Fisher) *πληροφορία* της X για το θ. Έτσι αν μία εκτιμήτρια T της παραμέτρου θ είναι αμερόληπτη και η διασπορά της είναι ίση με

$$V(T) = \frac{1}{\nu I(\theta)}, \tag{1.5}$$

το κατώτερο φράγμα της ανισότητας Cramér-Rao, τότε η T είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια ελαχίστης διασποράς.

Παράδειγμα 1.2. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από ένα πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας τη δίτιμη Bernoulli (πρβ. Παράδειγμα 1.1 του Κεφαλαίου 6)

$$f(x \mid p) = p^x (1-p)^{1-x}, \; x = 0,1.$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής του πληθυσμού αυτού είναι

$$\mu = E(X) = p, \; \sigma^2 = V(X) = p(1-p).$$

Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου p

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i) = \frac{1}{\nu}\nu p = p$$

και η διασπορά του ισούται με

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i\right) = \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu} V(X_i) = \frac{1}{\nu^2}\nu p(1-p) = \frac{p(1-p)}{\nu}.$$

Επίσης έχουμε

$$\log f(x \mid p) = x \log p + (1-x)\log(1-p)$$

και έτσι

$$\frac{\partial \log f(x \mid p)}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{1-x}{1-p}$$

οπότε

$$\left(\frac{\partial \log f(x\,|\,p)}{\partial p}\right)^2 = \frac{x^2}{p^2} - \frac{2x(1-x)}{p(1-p)} + \frac{(1-x)^2}{(1-p)^2}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$E(X^2) = p\,,\; E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X) = p - p = 0\,,$$

$$E[(X-1)^2] = E(X^2) - 2E(X) + 1 = p - 2p + 1 = 1 - p\,,$$

συνάγουμε την

$$I(p) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X\,|\,p)}{\partial p}\right)^2\right] = \frac{1}{p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}$$

και έτσι το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér-Rao ισούται με

$$\frac{1}{\nu I(p)} = \frac{p(1-p)}{\nu}.$$

Συνεπώς η αμερόληπτη εκτιμήτρια $\overline{X}$ της παραμέτρου p η οποία έχει διασπορά $V(\overline{X}) = p(1-p)/\nu$, ίση με το κάτω φράγμα της ανισότητας Cramér-Rao, είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια ελαχίστης διασποράς για την παράμετρο θ.

2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

Η σημειακή εκτίμηση παραμέτρων με τη μέθοδο των ροπών είναι η παλαιότερη και απλούστερη τεχνική εκτίμησης. Σχετικά με την παρουσίαση της μεθόδου ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x\,|\,\theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$ και έστω

$$\mu'_r = E(X^r)\,,\; r = 1,2,... \tag{2.1}$$

η r-τάξης ροπή της κατανομής αυτής περί την αρχή. Είναι φανερό ότι η ροπή αυτή είναι συνάρτηση της παραμέτρου θ, $\mu'_r = \mu'_r(\theta)$, $\theta \in \Theta$. Σημειώνουμε ότι η παράμετρος αυτή δύναται να είναι είτε μονοδιάστατη είτε κ-διάστατη, $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\kappa)$, $\kappa = 1,2,...$. Επίσης, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από τον ανωτέρω πληθυσμό και έστω

$$m'_r = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^r\,,\; r = 1,2,... \tag{2.2}$$

η r-τάξης δειγματική ροπή αυτού περί την αρχή. Με τη μέθοδο των ροπών (α) η r-τάξης ροπή της κατανομής του πληθυσμού περί την αρχή εκτιμάται από την αντίστοιχη r-τάξης δειγματική ροπή,

$$\hat{\mu}'_r = m'_r\,,\; r = 1,2,... \tag{2.3}$$

και (β) η εκτιμήτρια της παραμέτρου θ ή οι εκτιμήτριες των παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\kappa$ προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης

$$\mu'_1(\hat{\theta}) = m'_1 = \overline{X} \tag{2.4}$$

ή του συστήματος των εξισώσεων

$$\mu_r'(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_\kappa) = m_r', \ r = 1, 2, ..., \kappa . \qquad (2.5)$$

Ας σημειωθεί ότι για την εκτίμηση των ροπών μ_r' της κατανομής του πληθυσμού με την μέθοδο αυτή δεν απαιτείται η γνώση της συγκεκριμένης συνάρτησης πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x|\theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$. Προφανώς, η γνώση της $f(x|\theta)$ είναι απαραίτητη για την εκτίμηση της παραμέτρου θ ή των παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\kappa$.

Παράδειγμα 2.1. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με την ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, \theta]$ κατανομή:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \ 0 \le x \le \theta, \ (0 < \theta < \infty).$$

Η μέση τιμή της κατανομής αυτής είναι

$$\mu = E(X) = \int_0^\theta x f(x|\theta) dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x dx = \left[\frac{x^2}{2\theta}\right]_0^\theta = \frac{\theta}{2}.$$

Η ροποεκτιμήτρια της παραμέτρου θ συνάγεται από την εξίσωση $\mu = \overline{X}$ και είναι η

$$\hat{\theta} = 2\overline{X}.$$

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Να εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ροπών οι θεωρητικές ροπές μ και σ^2.

Οι ροποεκτιμήτριες των μ και σ^2 συνάγονται από τις εξισώσεις

$$\mu_1' = m_1', \ \mu_2' = m_2'.$$

Χρησιμοποιώντας το ότι

$$\mu_1' = E(X) = \mu, \ \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

οι εξισώσεις αυτές γίνονται

$$\hat{\mu} = m_1', \ \hat{\sigma}^2 = m_2' - \overline{X}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \overline{X})^2 = S^2 .$$

3. ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας ως γενική μέθοδος σημειακής εκτίμησης παραμέτρων προτάθηκε από τον R.A. Fisher, πατέρα της σύγχρονης στατιστικής. Βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής είναι η εξέταση της πιθανότητας του ενδεχομένου λήψης συγκεκριμένου τυχαίου δείγματος και η εκλογή των τιμών των αγνώστων παραμέτρων που μεγιστοποιούν αυτή. Συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x|\theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_\nu$ δίδεται από την

$$f(x_1, x_2, ..., x_\nu | \theta) = f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \cdots f(x_\nu|\theta), \ x_i \in R_X, \ i = 1, 2, ..., \nu, \ \theta \in \Theta .$$

Στην περίπτωση συγκεκριμένων τιμών $x_1, x_2, ..., x_\nu$ τυχαίου δείγματος, αυτή είναι συνάρτηση μόνο της παραμέτρου θ, συμβολίζεται με

$$L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = f(x_1 \mid \theta) f(x_2 \mid \theta) \cdots f(x_\nu \mid \theta), \ \theta \in \Theta$$

και καλείται *συνάρτηση πιθανοφανείας*.

Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφανείας συνίσταται στην εκλογή της τιμής $\hat{\theta}$ της άγνωστης παραμέτρου $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\kappa)$ η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφανείας,

$$L(\hat{\theta} \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu).$$

Η τιμή $\hat{\theta}$ καλείται *εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας* της θ.

Υπό ορισμένες συνθήκες ύπαρξης, η τιμή $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_\kappa)$ η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφανείας ευρίσκεται με λύση των εξισώσεων πιθανοφανείας,

$$\frac{\partial \log L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}{\partial \theta_r} = 0, \ r = 1, 2, ..., \kappa.$$

Σημειώνουμε ότι το μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφανείας δεν ευρίσκεται πάντοτε με παραγώγιση.

Παράδειγμα 3.1. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό του οποίου η κατανομή είναι η Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x \mid \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!, \ x = 0, 1, ..., \ (\lambda > 0).$$

Να ευρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου λ.

Η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι η

$$L(\lambda \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = \prod_{i=1}^{\nu} e^{-\lambda} \lambda^{x_i} / x_i! = e^{-\nu\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1! x_2! ... x_\nu!}$$

και έτσι

$$\log L(\lambda \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = -\nu\lambda + \nu\bar{x} \log \lambda - \sum_{i=1}^{\nu} \log x_i!$$

Επομένως

$$\frac{\partial \log L(\lambda \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}{\partial \lambda} = -\nu + \frac{\nu\bar{x}}{\lambda}$$

και

$$\hat{\lambda} = \bar{x}.$$

Η δειγματοσυνάρτηση $\hat{\lambda} = \bar{X}$ είναι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου λ.

Παράδειγμα 3.2. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με την ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, \theta]$ κατανομή:

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta}, \ 0 \le x \le \theta, \ (0 < \theta < \infty).$$

Να ευρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου θ.

Η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι η

$$L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = \frac{1}{\theta^\nu},\ 0 \le x_i \le \theta < \infty,\ i = 1,2,...,\nu .$$

Το μέγιστο της συνάρτησης αυτής δεν μπορεί να βρεθεί με παραγώγιση. Παρατηρούμε όμως ότι η συνάρτηση αυτή αυξάνει όταν η παράμετρος θ μειώνεται. Επειδή $x_i \le \theta$ για κάθε $i = 1,2,...,\nu$, οπότε $x_{(\nu)} \equiv \max\{x_1, x_2, ..., x_\nu\} \le \theta$, η συνάρτηση πιθανοφανείας παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο

$$\hat{\theta} = x_{(\nu)} \equiv \max\{x_1, x_2, ..., x_\nu\} .$$

Η δειγματοσυνάρτηση $\hat{\theta} = X_{(\nu)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_\nu\}$ είναι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου θ.

Παράδειγμα 3.3. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να ευρεθούν οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφανείας των παραμέτρων μ και σ^2.

Η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι η

$$L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 \right]$$

και έτσι

$$\log L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = -\frac{\nu}{2}\log 2\pi - \frac{\nu}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2$$

Επομένως

$$\frac{\partial \log L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}{\partial \mu} = \frac{\nu}{\sigma^2}(\bar{x} - \mu),$$

$$\frac{\partial \log L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}{\partial \sigma^2} = -\frac{\nu}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2$$

και

$$\bar{x} - \hat{\mu} = 0,\ -\nu + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

οπότε

$$\hat{\mu} = \bar{x},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \bar{x})^2 = s^2 .$$

Οι δειγματοσυναρτήσεις $\hat{\mu} = \overline{X}$ και $\hat{\sigma}^2 = S^2$ είναι οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφανείας των παραμέτρων μ και σ^2.

4. ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x \mid \theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$. Μία εκτιμήτρια $T = T(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ της παραμέτρου θ οποιεσδήποτε ιδιότητες και αν έχει, δίδει για συγκεκριμένο δείγμα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ως εκτίμηση της θ μία συγκεκριμένη τιμή $T(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ η οποία πιθανόν να διαφέρει από την αληθή αλλά άγνωστη τιμή της θ. Η σημειακή εκτίμηση παραμέτρου δεν παρέχει καμμιά πληροφορία για το μέγεθος και την πιθανότητα απόκλισης της εκτιμήτριας από την υπό εκτίμηση παράμετρο. Η έλλειψη αυτή καθιστά χρήσιμη την εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου από ένα διάστημα τιμών το οποίο περιέχει την αληθή τιμή αυτής με προκαθορισμένη πιθανότητα. Τα άκρα ενός τέτοιου διαστήματος ως δειγματοσυναρτήσεις είναι τυχαίες μεταβλητές καθιστώντας τούτο ένα τυχαίο διάστημα. Συγκεκριμένα θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1. *Έστω* $X_1, X_2, ..., X_\nu$ *τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής* $F(x \mid \theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$. *Το τυχαίο διάστημα* $[L, U]$, $L \le U$, *του οποίου τα άκρα* $L = L(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ *και* $U = U(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ *είναι δειγματοσυναρτήσεις με τιμές στον παραμετρικό χώρο Θ καλείται διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ με συντελεστή εμπιστοσύνης* $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$ *αν για κάθε* $\theta \in \Theta$ *ισχύει η σχέση*

$$P(L \le \theta \le U) = 1 - \alpha .$$

Μία γενική μέθοδος κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης, η οποία στις κλασικές κατανομές δύναται να εφαρμοσθεί με απόλυτη επιτυχία, συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα.

(α) Προσδιορίζουμε μία σημειακή εκτιμήτρια $T = T(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ της παραμέτρου θ και κατασκευάζουμε μία συνάρτηση των T και θ,

$$Y = g(T, \theta),$$

της οποίας η συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$, $y \in R$, είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ (και άλλων τυχόν αγνώστων παραμέτρων).

(β) Χρησιμοποιώντας την κατανομή $F_Y(y)$, $y \in R$, υπολογίζουμε δύο σταθερές c_1 και c_2 με $c_1 \le c_2$ τέτοιες ώστε

$$P(c_1 \le Y \le c_2) = 1 - \alpha$$

ή ισοδύναμα

$$P(Y < c_1) + P(Y < c_2) = \alpha .$$

Συνήθως λαμβάνουμε

$$P(Y < c_1) = P(Y > c_2) = \alpha / 2 .$$

(γ) Λύνοντας τη διπλή ανισότητα $c_1 \le g(T, \theta) \le c_2$ ως προς θ συνάγουμε τη διπλή ανισότητα $L \le \theta \le U$, όπου $L = L(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ και $U = U(X_1, X_2, ..., X_\nu)$ με

$$P(L \le \theta \le U) = P(c_1 \le Y \le c_2) = 1 - \alpha .$$

Το τυχαίο διάστημα $[L, U]$ είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Όπως και στην περίπτωση των σημειακών εκτιμητριών, υπάρχουν διάφορα κριτήρια αξιολόγησης των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Σχετικά σημειώνεται ότι είναι επιθυμητό όπως το μήκος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης με δεδομένο συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$ είναι όσο το δυνατό πιο μικρό. Επίσης είναι επιθυμητό όπως το μέσο μήκος του είναι όσο το δυνατό πιο μικρό. Η ανωτέρω μέθοδος εξασφαλίζει, στις περισσότερες περιπτώσεις, την ελαχιστοποίηση του μέσου μήκους του προκύπτοντος διαστήματος εμπιστοσύνης.

Παράδειγμα 4.1. *Διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διασπορά.* Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ της οποίας η διασπορά σ^2 είναι γνωστή. Ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τον άγνωστο μέσο μ δύναται να κατασκευασθεί σύμφωνα με τη γενική μέθοδο κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης ως εξής:

Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ είναι μία εκτιμήτρια του μέσου μ και ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2/\nu)$ (βλ. Θεώρημα 3.4 του Κεφαλαίου 6). Επομένως ο τυποποιημένος δειγματικός μέσος

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}$$

ο οποίος είναι συνάρτηση των $\overline{X}$ και μ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$, οπότε

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} \le z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha,$$

όπου $z_{\alpha/2}$ είναι το άνω $\alpha/2$ σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής,

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = 1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2,$$

και λόγω συμμετρίας, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, είναι

$$P(Z < -z_{\alpha/2}) = \Phi(-z_{\alpha/2}) = 1 - \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2.$$

Λύνοντας τη διπλή ανισότητα παίρνουμε

$$P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \right) = 1 - \alpha$$

και έτσι το τυχαίο διάστημα

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \right]$$

είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο μ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Σημειώνουμε ότι το μήκος του διαστήματος αυτού,

$$l = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}},$$

δεν είναι τυχαία μεταβλητή.

Παράδειγμα 4.2. *Διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διασπορά.* Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ είναι μία εκτιμήτρια του μέσου μ του πληθυσμού και ο τυποποιημένος δειγματικός μέσος

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}$$

ακολουθεί, όπως και στο Παράδειγμα 4.1, την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Όμως η συνάρτηση αυτή των $\overline{X}$ και μ, επειδή περιέχει την άγνωστη παράμετρο σ^2, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για το μέσο μ. Αντικαθιστώντας την άγνωστη διασπορά σ^2 με την αμερόληπτη δειγματική διασπορά $S_A^2 = \frac{\nu}{\nu-1}S^2$ παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$$T_{\nu-1} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu-1}}$$

ακολουθεί την t-κατανομή με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας (βλ. Θεώρημα 3.4 του Κεφαλαίου 6), οπότε

$$P\left[-t_{\nu-1}(\alpha/2) \le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{\nu-1}} \le t_{\nu-1}(\alpha/2)\right] = 1-\alpha\,,$$

όπου $t_{\nu-1}(\alpha/2)$ είναι το άνω $\alpha/2$ σημείο της t-κατανομής με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας,

$$P[T_{\nu-1} > t_{\nu-1}(a/2)] = \alpha/2\,,$$

και λόγω συμμετρίας

$$P[T_{\nu-1} < -t_{\nu-1}(\alpha/2)] = P[T_{\nu-1} > t_{\nu-1}(\alpha/2)] = \alpha/2\,.$$

Λύνοντας τη διπλή ανισότητα παίρνουμε

$$P\left[\overline{X} - t_{\nu-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{\nu-1}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\nu-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{\nu-1}}\right] = 1-\alpha$$

και έτσι το τυχαίο διάστημα

$$\left[\overline{X} - t_{\nu-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{\nu-1}},\ \overline{X} + t_{\nu-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{\nu-1}}\right]$$

είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο μ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με οποιαδήποτε κατανομή και $p = P(X \le \alpha) > 0$. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση

$$T(X_1, X_2, ..., X_\nu) = \frac{1}{\nu}[\text{αριθμός των } X_\kappa,\ \kappa = 1,2,...,\nu \text{ με } X_\kappa \le \alpha]$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου p.

2. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N(0,\sigma^2)$. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa^2$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς σ^2 ενώ η στατιστική συνάρτηση $S = \sqrt{S^2}$ δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

3. (*Συνέχεια*). Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση

$$T = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{\kappa=1}^{\nu}|X_\kappa|$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

4. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με συνεχή ομοιόμορφη κατανομή:

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta}, \; 0 \le x \le \theta .$$

Να υπολογισθεί η μεροληψία της εκτιμήτριας $T = \max\{X_1, X_2, ..., X_\nu\}$ της παραμέτρου *θ*.

5. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με εκθετική κατανομή:

$$f(x \mid \theta) = \theta e^{-\theta x}, \; 0 < x < \infty, \; 0 < \theta < \infty .$$

Να δειχθεί ότι η ροποεκτιμήτρια της παραμέτρου *θ* συμπίπτει με την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας αυτής.

6. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta+1}\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^x, \; x = 0,1,2,..., \; 0 < \theta < \infty .$$

Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου *θ* και να δειχθεί ότι αυτή είναι αμερόληπτη.

7. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1}, \; 0 < x < 1, \; 0 < \theta < \infty .$$

Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας και να εξετασθεί κατά πόσον είναι αμερόληπτη.

8. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N(0, \sigma^2)$. Να προσδιορισθεί διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά σ^2 με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

9. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με εκθετική κατανομή

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \; 0 < x < \infty, \; 0 < \theta < \infty .$$

Να προσδιορισθεί διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο *θ* με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

10. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις $N(\mu_X, 1)$ και $N(\mu_Y, 1)$ αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΕΛΕΓΧΟΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

1. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΟΥΣ

Στην παραμετρική στατιστική συμπερασματολογία *στατιστική υπόθεση* είναι μία εικασία που αφορά άγνωστη παράμετρο της κατανομής του υπό εξέταση πληθυσμού. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από έναν πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής $F(x\,|\,\theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$. Η εικασία ότι $\theta \in \Theta_0$, όπου $\Theta_0 \subset \Theta$, συμβολιζομένη με H_0, είναι μία στατιστική υπόθεση. Επίσης η εικασία ότι $\theta \in \Theta_1$, όπου $\Theta_1 \subset \Theta$ με $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$, συμβολιζομένη με H_1, είναι επίσης μία στατιστική υπόθεση, η οποία είναι εναλλακτική της H_0.

Η υπό εξέταση στατιστική υπόθεση παρουσιάζεται στη μορφή ενός ισχυρισμού για την παράμετρο θ, την απόδειξη της ορθότητας του οποίου έχει ως σκοπό η στατιστική έρευνα. Στο πλαίσιο αυτό η υπόθεση $H_0 : \theta \in \Theta_0$ είναι μία εικασία η οποία ακυρώνει (μηδενίζει) τον υπό εξέταση ισχυρισμό και καλείται *μηδενική υπόθεση*. Η υπό εξέταση υπόθεση $H_1 : \theta \in \Theta_1$ καλείται *εναλλακτική υπόθεση*.

Μία στατιστική υπόθεση $H_i : \theta \in \Theta_i$ καλείται *απλή υπόθεση* αν το υποσύνολο Θ_i του παραμετρικού χώρου Θ είναι μονοσύνολο, δηλαδή $\Theta_i = \{\theta_i\}$, ενώ καλείται *σύνθετη υπόθεση* αν το Θ_i περιέχει περισσότερα από ένα σημεία, $i = 0,1$.

Ο στατιστικός έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta \in \Theta_0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta \in \Theta_1$ είναι μία διαδικασία, η οποία χρησιμοποιώντας τις παρατηρούμενες τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ του τυχαίου δείγματος, καταλήγει είτε στην απόφαση απόρριψης της H_0 και αποδοχής της H_1 είτε στην απόφαση αποδοχής (ή καλύτερα μη απόρριψης) της H_0. Απαραίτητο στοιχείο της διαδικασίας αυτής είναι ο καθορισμός μιας δειγματοσυνάρτησης ελέγχου η οποία να διαμερίζει το δειγματικό χώρο $R_X^\nu = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : x_i \in R_X,\ i = 1,2,...,\nu\}$ σε δύο περιοχές K και A. Η περιοχή K καλείται *κρίσιμη περιοχή* ή *περιοχή απόρριψης* και περιλαμβάνει τα δειγματικά σημεία $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ στα οποία η H_0 απορρίπτεται. Η περιοχή A καλείται *περιοχή αποδοχής* (ή *μη απόρριψης*) και περιλαμβάνει τα δειγματικά σημεία $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ στα οποία η H_0 γίνεται αποδεκτή (ή δεν απορρίπτεται).

Ένας στατιστικός έλεγχος μιας μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta \in \Theta_0$ έναντι μιας εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta \in \Theta_1$ δύναται να οδηγήσει στη λήψη ορθής απόφασης ή στη λήψη μιας από τις ακόλουθες δύο λανθασμένες αποφάσεις: (α) Απόρριψη της H_0 όταν στην πραγματικότητα αυτή είναι αληθής, απόφαση που συνιστά *σφάλμα* *τύπου I* και (β) αποδοχής (ή μη απόρριψης) της H_0 όταν στην πραγματικότητα αυτή είναι αναληθής (εσφαλμένη), απόφαση που συνιστά *σφάλμα τύπου II*.

Ας θεωρήσουμε τη πιθανότητα απόρριψης της υπόθεσης H_0:

$$\alpha(\theta) = P_\theta[(X_1, X_2, ..., X_\nu) \in K], \ \theta \in \Theta,$$

οπότε η πιθανότητα αποδοχής (ή μη απόρριψης) της υπόθεσης αυτής είναι

$$1 - \alpha(\theta) = 1 - P_\theta[(X_1, X_2, ..., X_\nu) \in K] = P_\theta[(X_1, X_2, ..., X_\nu) \in A], \ \theta \in \Theta.$$

Η πιθανότητα $\alpha(\theta)$ εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου θ της κατανομής $F(x \mid \theta)$, $x \in R$, $\theta \in \Theta$ του πληθυσμού και επίσης από το μέγεθος ν του δείγματος και την κρίσιμη περιοχή K. Έτσι η $\alpha(\theta)$ με περιορισμό της παραμέτρου θ στα υποσύνολα Θ_0 και Θ_1 του Θ, δύναται να εκφράσει τις πιθανότητες λανθασμένης ή ορθής απόφασης απόρριψης της H_0.

Η $\alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$ είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0 υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι αληθής, δηλαδή είναι η *πιθανότητα σφάλματος τύπου I*. Το $\sup\{\alpha(\theta), \theta \in \Theta_0\}$ καλείται *μέγεθος του ελέγχου*.

Η $1 - \alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ είναι η πιθανότητα αποδοχής (ή μη απόρριψης) της H_0 υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι αναληθής (εσφαλμένη), δηλαδή είναι η *πιθανότητα σφάλματος τύπου II*.

Η $\alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0 υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι αναληθής, δηλαδή είναι η πιθανότητα ορθής απόφασης απόρριψης της H_0. Η συνάρτηση $\alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ καλείται *συνάρτηση ισχύος του ελέγχου* και η τιμή αυτής $\alpha(\theta)$ σε συγκεκριμένο σημείο $\theta \in \Theta_1$ καλείται *ισχύς του ελέγχου* στο σημείο $\theta \in \Theta_1$.

Σ' ένα στατιστικό έλεγχο είναι βεβαίως επιθυμητό όπως οι πιθανότητες των σφαλμάτων τύπου I και τύπου II είναι όσο το δυνατό μικρές. Τούτο όμως δεν είναι γενικά εφικτό. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που το μέγεθος ν του τυχαίου δείγματος είναι δεδομένο, όταν η μία από τις πιθανότητες σφάλματος ελαττώνεται η άλλη κατά κανόνα αυξάνεται. Στην κλασική θεωρία ελέγχου υποθέσεων συνήθως εκλέγεται ένα *επίπεδο σημαντικότητας* α με $0 < \alpha < 1$ και μεταξύ των ελέγχων των οποίων το μέγεθος είναι

$$\sup\{\alpha(\theta), \ \theta \in \Theta_0\} = \alpha,$$

προσδιορίζεται εκείνος που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος τύπου II ή ισοδύναμα μεγιστοποιεί την ισχύ,

$$\alpha(\theta), \ \theta \in \Theta_1.$$

Η εκλογή του επιπέδου σημαντικότητας α εξαρτάται από το ποσό είναι ανεκτή η εσφαλμένη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0. Συνήθως το επίπεδο σημαντικότητας εκλέγεται ίσο με $\alpha = 0{,}05$. Η εκλογή $\alpha = 0{,}01$ είναι αρκετά συντηρητική ενώ η εκλογή $\alpha = 0{,}10$ είναι αρκετά ανεκτική στην εσφαλμένη απόρριψη της H_0.

Στις εφαρμογές, αντί να εξετάζεται κατά πόσον η παρατηρηθείσα τιμή $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ του τυχαίου δείγματος οδηγεί στην απόφαση απόρριψης ή στην απόφαση μη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης H_0 στο καθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α, δύναται να υπολογίζεται το μικρότερο επίπεδο σημαντικότητας $p = p(x_1, x_2, ..., x_\nu)$, καλούμενο *κρίσιμο μέγεθος* (ή *p-τιμή*), στο οποίο το συγκεκριμένο δείγμα $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ οδηγεί στην απόρριψη της H_0 υπό την υπόθεση ότι η H_0 είναι αληθής. Προφανώς, η παρατηρηθείσα τιμή $(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ του τυχαίου δείγματος αποτελεί ισχυρή μαρτυρία εναντίον της H_0 αν το κρίσιμο μέγεθος $p = p(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ είναι πολύ μικρό, ενώ συνηγορεί υπέρ της μη απόρριψης (ή αποδοχής) της H_0 αν το p δεν είναι πολύ μικρό. Έτσι αν $p \le \alpha$ η H_0 απορρίπτεται και αν $p > \alpha$ η H_0 δεν δύναται να απορριφθεί.

2. ΕΛΕΓΧΟΙ ΑΠΛΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥΣ

Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x \mid \theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$ και έστω προς έλεγχο η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta = \theta_1$. Σχετικά, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από τον πληθυσμό αυτό και τη συνάρτηση πιθανοφανείας

$$L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = f(x_1 \mid \theta) f(x_2 \mid \theta) \cdots f(x_\nu \mid \theta),\ x_i \in R_X,\ i = 1, 2, ..., \nu,\ \theta \in \Theta .$$

Διαισθητικά, αν η πιθανοφάνεια $L(\theta_0 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)$ της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta = \theta_0$ είναι πολύ μικρότερη από την πιθανοφάνεια $L(\theta_1 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)$ της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta = \theta_1$, τότε πρέπει να απορριφθεί η H_0 και να γίνει δεκτή η H_1. Έτσι, χρησιμοποιώντας το λόγο πιθανοφανειών

$$g(x_1, x_2, ..., x_\nu \mid \theta_0, \theta_1) = \frac{L(\theta_0 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}{L(\theta_1 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)} \tag{2.1}$$

η κρίσιμη περιοχή είναι

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : g(x_1, x_2, ..., x_\nu \mid \theta_0, \theta_1) < c\}$$

ή ισοδύναμα

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \log g(x_1, x_2, ..., x_\nu \mid \theta_0, \theta_1) < c_\alpha\}, \tag{2.2}$$

όπου η σταθερή c_α εξαρτάται από το επίπεδο σημαντικότητας α και προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\alpha(\theta_0) = P_{\theta_0}[\log g(X_1, X_2, ..., X_\nu \mid \theta_0, \theta_1) < c_\alpha] = \alpha . \tag{2.3}$$

Η ισχύς του ελέγχου αυτού είναι

$$\alpha(\theta_1) = P_{\theta_1}[\log g(X_1, X_2, ..., X_\nu \mid \theta_0, \theta_1) < c_\alpha]. \tag{2.4}$$

Ο έλεγχος της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta = \theta_1$, με κρίσιμη περιοχή οριζόμενη από τις (2.2) και (2.3) και ισχύ την (2.4), κάτω από ορισμένες προυποθέσεις δύναται να επεκταθεί

(α) στον έλεγχον τόσο της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta = \theta_0$ όσο και της σύνθετης μονόπλευρης μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta \le \theta_0$ έναντι της σύνθετης μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta > \theta_0$, (β) στον έλεγχον τόσο της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta = \theta_0$ όσο και της σύνθετης μονόπλευρης μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta \geq \theta_0$ έναντι της σύνθετης μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta < \theta_0$ και

(γ) στον έλεγχον της σύνθετης μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ή $\theta \geq \theta_1$, με $\theta_0 < \theta_1$, έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta_0 < \theta < \theta_1$.

Αντί της γενικής θεωρίας περιοριζόμαστε στην παρουσίαση σχετικών παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2.1. *Έλεγχος για το ποσοστό διχοτομημένου πληθυσμού.* Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό του οποίου τα στοιχεία εκφράζονται ποσοτικά από μια δίτιμη τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι η δίτιμη αυτή τυχαία μεταβλητή, η οποία διχοτομεί τον πληθυσμό, ακολουθεί τη δίτιμη κατανομή Bernoulli με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x \mid p) = p^x (1-p)^{1-x}, \ x = 0, 1, \ 0 < p < 1.$$

Να ελεχθεί η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : p = p_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : p = p_1$ με $p_0 < p_1$.

Αν $X_1, X_2, ..., X_\nu$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό, τότε η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι:

$$L(p \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = p^t (1-p)^{\nu - t}, \ t = \sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

και ο λογάριθμος του λόγου πιθανοφανειών (2.1) παίρνει τη μορφή:

$$\log g(x_1, x_2, ..., x_\nu \mid p_0, p_1) = t \log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} + \nu \log \frac{1-p_1}{1-p_0}.$$

Επειδή $0 < p_0 < p_1 < 1$, οπότε $1 - p_1 < 1 - p_0$ και $p_0(1-p_1) < p_1(1-p_0)$, είναι

$$\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} > 0$$

και έτσι η κρίσιμη περιοχή γίνεται

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : t > c_\alpha\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας *α*, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{p_0}(T > c_\alpha) \leq a.$$

Παρατηρούμε ότι αν η $H_0 : p = p_0$ είναι αληθής τότε το άθροισμα $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους *ν* και *p* και έτσι

$$P_{p_0}(T > c_\alpha) = 1 - F_\nu(c_\alpha \mid p_0) \leq a,$$

όπου

$$F_\nu(x \mid p) = \sum_{k=0}^{[x]} \binom{\nu}{\kappa} p^\kappa (1-p)^{\nu - \kappa}.$$

Η ισχύς του ελέγχου αυτού είναι

$$\alpha(p_1) = P_{p_1}(T > c_\alpha) = 1 - F_\nu(c_\alpha \mid p_1).$$

Ομοίως συνάγεται ότι για τον έλεγχο της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0 : p = p_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : p = p_1$ με $p_0 > p_1$, η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : t < c_\alpha\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{p_0}(T < c_\alpha) = F_\nu(c_\alpha - \mid p_0) \leq a.$$

Η ισχύς του ελέγχου αυτού είναι

$$\alpha(p_1) = P_{p_1}(T < c_\alpha) = F_\nu(c_\alpha - \mid p_1).$$

Παράδειγμα 2.2. *Έλεγχος για τον μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διασπορά.* Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ της οποίας η διασπορά σ^2 είναι γνωστή και έστω προς έλεγχο η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu = \mu_1$ με $\mu_0 < \mu_1$. Αν $X_1, X_2, ..., X_\nu$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό, τότε

$$L(\mu \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \mu)^2\right]$$

και

$$\begin{aligned}\log g(x_1, x_2, ..., x_\nu \mid \mu_0, \mu_1) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \mu_0)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \mu_1)^2 \\ &= \frac{\nu(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma^2}\overline{x} - \frac{\nu(\mu_0^2 - \mu_1^2)}{2\sigma^2}.\end{aligned}$$

Η κρίσιμη περιοχή

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \log g(x_1, x_2, ..., x_\nu \mid \theta_0, \theta_1) < c\},$$

επειδή $\mu_0 < \mu_1$ είναι

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \overline{x} > c_\alpha\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{\mu_0}(\overline{X} > c_\alpha) = a.$$

Παρατηρούμε ότι αν η $H_0 : \mu = \mu_0$ είναι αληθής τότε ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma^2 / \nu)$ και έτσι η

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}$$

ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επομένως

$$P_{\mu_0}(\overline{X} > c_\alpha) = P_{\mu_0}\left(Z > \frac{c_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{c_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right) = \alpha .$$

Συμβολίζοντας με z_α το άνω α-σημείο της τυποποιημένης κανονικής $N(0,1)$, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$P(Z > z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha ,$$

παίρνουμε

$$c_\alpha = \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}$$

και έτσι

$$K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}\right\} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_\nu) : \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_\alpha \right\}.$$

Η ισχύς του ελέγχου αυτού είναι

$$\alpha(\mu_1) = P_{\mu_1}(\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}),$$

όπου η $\overline{X}$, αν η $H_1 : \mu = \mu_1$ είναι αληθής, ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu_1, \sigma/\sqrt{\nu})$. Επομένως

$$\alpha(\mu_1) = P_{\mu_1}(\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}) = P\left(Z > z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right).$$

Κατά τον ίδιο τρόπο συνάγεται ότι για τον έλεγχο της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu = \mu_1$ με $\mu_0 > \mu_1$, η κρίσιμη περιοχή απλοποιείται διαδοχικά ως εξής:

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \overline{x} < c_\alpha\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{\mu_0}(\overline{X} < c_\alpha) = a .$$

Έτσι

$$c_\alpha = \mu_0 - z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}$$

και

$$K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \overline{x} < \mu_0 - z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}\right\} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_\nu) : \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} < -z_\alpha \right\}.$$

Η ισχύς του ελέγχου αυτού είναι

$$\alpha(\mu_1) = P_{\mu_1}(\overline{X} < \mu_0 - z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}) = P\left(Z < -z_\alpha - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right).$$

Παράδειγμα 2.3. *Έλεγχος για τον μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διασπορά* (*Συνέχεια*). Να ελεχθεί (α) η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της σύνθετης μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu > \mu_0$ και (β) η σύνθετη μονόπλευρη μηδενική υπόθεση $H_0:\mu \le \mu_0$ έναντι της σύνθετης μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\mu > \mu_0$.

(α) Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0:\mu = \mu_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\mu = \mu_1$, με $\mu_1 > \mu_0$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.2, είναι

$$K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu): \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}\right\} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu): \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_\alpha\right\}$$

και δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τιμή μ_1 αλλά μόνο από το ότι $\mu_1 > \mu_0$. Έτσι η κρίσιμη αυτή περιοχή παραμένει αμετάβλητη και για τον έλεγχο της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0:\mu = \mu_0$ έναντι της σύνθετης μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\mu > \mu_0$. Η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου αυτού δίδεται από την

$$\alpha(\mu) = P_\mu(\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}) = P\left(Z > z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right), \ \mu > \mu_0$$

και είναι αύξουσα συνάρτηση του μ.

(β) Ας θεωρήσουμε τον έλεγχο με κρίσιμη περιοχή

$$K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu): \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}\right\} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu): \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}} > z_\alpha\right\}.$$

Επειδή η πιθανότητα απόρριψης της $H_0:\mu \le \mu_0$,

$$\alpha(\mu) = P_\mu(\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{\nu}) = P\left(Z > z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right) = 1 - \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right),$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του μ, για κάθε $\mu \le \mu_0$, το μέγεθος του ελέγχου αυτού είναι

$$\sup\{\alpha(\mu), \ \mu \le \mu_0\} = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$$

όπως ακριβώς και των ελέγχων της απλής μηδενικής υπόθεσης $H_0:\mu = \mu_0$ τόσο έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\mu = \mu_1$, με $\mu_1 > \mu_0$, όσο και έναντι της σύνθετης μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\mu > \mu_0$.

3. ΕΛΕΓΧΟΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΛΟΓΟΥ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΩΝ

Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f(x \mid \theta)$, $x \in R_X$, $\theta \in \Theta$ και έστω προς έλεγχο η μηδενική υπόθεση $H_0:\theta \in \Theta_0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\theta \in \Theta_1$. Σχετικά, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_\nu$ από τον πληθυσμό αυτό. Στην περίπτωση απλών υποθέσεων, όπου $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ και $\Theta_1 = \{\theta_1\}$, ο λόγος πιθανοφανειών

$$\frac{L(\theta_0 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}{L(\theta_1 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)}$$

καθορίζεται πλήρως και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν αυτός είναι πολύ μικρός (βλ. σχετικά Εδάφιο 2). Στην περίπτωση συνθέτων υποθέσεων, όπου τα σύνολα Θ_0 και Θ_1 περιέχουν περισσότερα από ένα σημεία, χρησιμοποιείται ως κριτήριο ο λόγος μεγίστων πιθανοφανειών

$$\frac{\sup\{L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ \theta \in \Theta_0\}}{\sup\{L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ \theta \in \Theta_1\}}$$

και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν αυτός είναι πολύ μικρός. Στην πράξη χρησιμοποιείται ευχερέστερα ο τροποποιημένος λόγος μεγίστων πιθανοφανειών

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, ..., x_\nu) = \frac{\sup\{L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ \theta \in \Theta_0\}}{\sup\{L(\theta \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ \theta \in \Theta\}}. \tag{3.1}$$

Σημειώνουμε ότι $0 < \lambda \leq 1$ εφ΄όσον $\Theta_0 \subset \Theta$. Έτσι, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο λόγο πιθανοφανειών $\lambda = \lambda(x_1, x_2, ..., x_\nu)$, η κρίσιμη περιοχή είναι

$$K = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \lambda < c_\alpha\}, \tag{3.2}$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sup\{\alpha(\theta),\ \theta \in \Theta_0\} = a,\ \alpha(\theta) = P_\theta(\lambda < c_\alpha). \tag{3.3}$$

Η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου αυτού είναι

$$\alpha(\theta) = P_\theta(\lambda < c_\alpha),\ \theta \in \Theta_1. \tag{3.4}$$

Παράδειγμα 3.1. *Έλεγχος για τον μέσο κανονικού πληθυσμού με γνωστή διασπορά.* Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ της οποίας η διασπορά σ^2 είναι γνωστή και έστω προς έλεγχο η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Αν $X_1, X_2, ..., X_\nu$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό, τότε η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι

$$L(\mu \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \mu)^2\right]$$

και

$$\sup\{L(\mu \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ \mu = \mu_0\} = L(\mu_0 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu).$$

Επίσης

$$\sup\{L(\mu \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ -\infty < \mu < \infty\} = L(\hat{\mu} \mid x_1, x_2, ..., x_\nu)$$

όπου $\hat{\mu} = \bar{x}$ είναι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου μ. Επομένως

$$\log \lambda(x_1, x_2, ..., x_\nu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \mu_0)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 = -\frac{\nu}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu_0)^2$$

και έτσι η κρίσιμη περιοχή γίνεται

$$K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{\nu}}\right| > c_\alpha\right\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right| > c_\alpha\right) = a .$$

Παρατηρούμε ότι αν η $H_0 : \mu = \mu_0$ είναι αληθής τότε η

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}$$

ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επομένως χρησιμοποιώντας και τη συμμετρικότητα της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής, $\Phi(-z) = 1-\Phi(z)$, συνάγουμε την

$$P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right| > c_\alpha\right) = P_{\mu_0}(|Z| > c_\alpha) = 1-[\Phi(c_\alpha)-\Phi(-c_\alpha)] = 2[1-\Phi(c_\alpha)] = a .$$

Συμβολίζοντας με $z_{\alpha/2}$ το άνω $\alpha/2$-σημείο της τυποποιημένης κανονικής $N(0,1)$, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = 1-\Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 ,$$

παίρνουμε

$$c_\alpha = z_{\alpha/2}$$

και έτσι

$$K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : \left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right| > z_{\alpha/2}\right\}.$$

Η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου αυτού δίδεται από την

$$\alpha(\mu) = P_\mu(\overline{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{\nu}) + P_\mu(\overline{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{\nu}),\ \mu \neq \mu_0 .$$

όπου η $\overline{X}$, για κάθε $\mu \neq \mu_0$, ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma/\sqrt{\nu})$ και έτσι η

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}$$

ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επομένως

$$\alpha(\mu) = P_\mu\left(Z < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} - z_\alpha\right) + P_\mu\left(Z > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} + z_\alpha\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} - z_\alpha\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{\nu}} + z_\alpha\right) + 1,\ \mu \neq \mu_0 .$$

Παράδειγμα 3.2. *Έλεγχος για τον μέσο κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διασπορά.* Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και έστω προς έλεγχο η σύνθετη μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Αν $X_1, X_2, ..., X_\nu$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό, τότε η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι

$$L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu) = (2\pi\sigma^2)^{-\nu/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu)^2 \right]$$

και

$$\sup\{L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ \mu = \mu_0, 0 < \sigma^2 < \infty\} = L(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),$$

όπου

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu_0)^2 .$$

είναι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας της παραμέτρου σ^2 της κανονικής κατανομής με γνωστό μέσο μ_0. Επίσης

$$\sup\{L(\mu, \sigma^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),\ -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\} = L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 \mid x_1, x_2, ..., x_\nu),$$

όπου

$$\hat{\mu} = \overline{x},\ \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2$$

είναι οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφανείας των παραμέτρων μ και σ^2 της κανονικής κατανομής. Παρατηρούμε ότι

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \mu_0)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - \overline{x})^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2 = s^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2$$

και έτσι ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών είναι

$$\lambda = \left(\frac{s^2 + (\overline{x} - \mu_0)^2}{s^2} \right)^{-\nu/2} = \left(1 + \frac{t^2}{\nu - 1} \right)^{-\nu/2},$$

όπου

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{\nu - 1}} .$$

Επομένως η κρίσιμη περιοχή είναι

$$K = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_\nu) : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{\nu - 1}} \right| > c_\alpha \right\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{\mu_0}\left(\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{\nu - 1}} \right| > c_\alpha \right) = a .$$

Παρατηρούμε ότι αν η $H_0 : \mu = \mu_0$ είναι αληθής τότε η

$$T_{\nu-1} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{\nu - 1}}$$

ακολουθεί την t-κατανομή με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, χρησιμοποιώντας και τη συμμετρικότητα της συνάρτησης κατανομής της t-κατανομής με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας, $F_{\nu-1}(-t)=1-F_{\nu-1}(t)$, συνάγουμε την

$$P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{\nu-1}}\right|>c_\alpha\right)=P_{\mu_0}(|T_{\nu-1}|>c_\alpha)$$

$$=1-[F_{\nu-1}(c_\alpha)-F_{\nu-1}(-c_\alpha)]=2[1-F_{\nu-1}(c_\alpha)]=a\,.$$

Συμβολίζοντας με $t_{\nu-1,\alpha/2}$ το άνω $\alpha/2$-σημείο της t-κατανομής με $\nu-1$ βαθμούς ελευθερίας, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$P(T_{\nu-1}>t_{\nu-1,\alpha/2})=1-F_{\nu-1}(t_{\nu-1,\alpha/2})=\alpha/2\,,$$

παίρνουμε

$$c_\alpha=t_{\nu-1,\alpha/2}$$

και έτσι

$$K=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_\nu):\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{\nu-1}}\right|>t_{\nu-1,\alpha/2}\right\}.$$

Παράδειγμα 3.3. *Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων δύο ομοσκεδαστικών κανονικών πληθυσμών με άγνωστη διασπορά.* Ας θεωρήσουμε δύο ανεξάρτητους ομοσκεδαστικούς πληθυσμούς με κανονική κατανομή $N(\mu_X,\sigma^2)$ και $N(\mu_Y,\sigma^2)$. Έστω προς έλεγχο η σύνθετη μηδενική υπόθεση $H_0:\mu_X=\mu_Y$ έναντι της σύνθετης εναλλακτικής υπόθεσης $H_1:\mu_X\neq\mu_Y$. Αν $X_1,X_2,\ldots,X_\kappa$ και $Y_1,Y_2,\ldots,Y_\nu$ είναι δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κανονικές κατανομές $N(\mu_X,\sigma^2)$ και $N(\mu_Y,\sigma^2)$, αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση πιθανοφανείας είναι

$$L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)\equiv L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2\mid x_1,x_2,\ldots,x_\kappa,y_1,y_2,\ldots,y_\nu)$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-(\kappa+\nu)/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu_X)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu_Y)^2\right]$$

$$\sup\{L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2),\,\mu_X=\mu_Y\equiv\mu,\ -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\}=L(\widetilde{\mu},\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma}^2)\,.$$

'Ομως

$$L(\mu,\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-(\kappa+\nu)/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu)^2\right]$$

και έτσι

$$\log L(\mu,\mu,\sigma^2)=-\frac{\kappa+\nu}{2}\log 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu)^2\,.$$

Επομένως

$$\frac{\partial\log L(\mu,\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\frac{\kappa}{\sigma^2}(\overline{x}-\mu)+\frac{\nu}{\sigma^2}(\overline{y}-\mu)\,,$$

$$\frac{\partial \log L(\mu,\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{\kappa+\nu}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu)^2$$

και

$$\tilde{\mu} = \frac{\kappa\bar{x}+\nu\bar{y}}{\kappa+\nu},$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\kappa+\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\tilde{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\tilde{\mu})^2\right] = \frac{1}{\kappa+\nu}\left[\kappa s_X^2 + \nu s_Y^2 + \frac{\kappa\nu(\bar{x}-\bar{y})^2}{\kappa+\nu}\right]$$

οπότε

$$L(\tilde{\mu},\tilde{\mu},\tilde{\sigma}^2) = \left(\frac{2\pi}{\kappa+\nu}\left[\kappa s_X^2 + \nu s_Y^2 + \frac{\kappa\nu(\bar{x}-\bar{y})^2}{\kappa+\nu}\right]\right)^{-(\kappa+\nu)/2} \times \exp\left(-\frac{\kappa+\nu}{2}\right).$$

Επίσης

$$\sup\{L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2), -\infty<\mu_X<\infty,\ -\infty<\mu_Y<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\} = L(\hat{\mu}_X,\hat{\mu}_Y,\hat{\sigma}^2)$$

'Ομως

$$L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-(\kappa+\nu)/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu_X)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu_Y)^2\right]$$

και έτσι

$$\log L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2) = -\frac{\kappa+\nu}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu_X)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu_Y)^2.$$

Επομένως

$$\frac{\partial \log L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)}{\partial \mu_X} = \frac{\kappa}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu_X),\ \frac{\partial \log L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)}{\partial \mu_X} = \frac{\nu}{\sigma^2}(\bar{y}-\mu_Y)$$

$$\frac{\partial \log L(\mu_X,\mu_Y,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{\kappa+\nu}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\mu_X)^2 + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\mu_Y)^2$$

και

$$\hat{\mu}_X = \bar{x},\ \hat{\mu}_Y = \bar{y},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\kappa+\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{\nu}(y_j-\bar{y})^2\right] = \frac{\kappa s_X^2+\nu s_Y^2}{\kappa+\nu},$$

οπότε

$$L(\hat{\mu}_X,\hat{\mu}_Y,\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{2\pi}{\kappa+\nu}\left[\kappa s_X^2+\nu s_Y^2\right]\right)^{-(\kappa+\nu)/2} \times \exp\left(-\frac{\kappa+\nu}{2}\right).$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφανειών είναι

$$\lambda = \left(\frac{\kappa s_X^2+\nu s_Y^2+\kappa\nu(\bar{x}-\bar{y})^2/(\kappa+\nu)}{\kappa s_X^2+\nu s_Y^2}\right)^{-(\kappa+\nu)/2} = \left(1+\frac{t^2}{\kappa+\nu-2}\right)^{-(\kappa+\nu)/2},$$

όπου

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\kappa\nu/(\kappa+\nu)}}{\sqrt{(\kappa s_X^2 + \nu s_Y^2)/(\kappa+\nu-2)}}.$$

Επομένως η κρίσιμη περιοχή είναι

$$K = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_\kappa, y_1, y_2, ..., y_\nu) : \left| \frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\kappa\nu/(\kappa+\nu)}}{\sqrt{(\kappa s_X^2 + \nu s_Y^2)/(\kappa+\nu-2)}} \right| > c_\alpha \right\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας *α*, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{\mu_X=\mu_Y}\left(\left| \frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\kappa\nu/(\kappa+\nu)}}{\sqrt{(\kappa s_X^2 + \nu s_Y^2)/(\kappa+\nu-2)}} \right| > c_\alpha \right) = a.$$

Παρατηρούμε ότι αν η $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ είναι αληθής τότε η

$$T_{\kappa+\nu-2} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})\sqrt{\kappa\nu/(\kappa+\nu)}}{\sqrt{(\kappa S_X^2 + \nu S_Y^2)/(\kappa+\nu-2)}}$$

ακολουθεί την *t*-κατανομή με $\kappa+\nu-2$ βαθμούς ελευθερίας. Επομένως, χρησιμοποιώντας και τη συμμετρικότητα της συνάρτησης κατανομής της *t*-κατανομής με $\kappa+\nu-2$ βαθμούς ελευθερίας, $F_{\kappa+\nu-1}(-t) = 1 - F_{\kappa+\nu-1}(t)$, συνάγουμε την

$$P_{\mu_X=\mu_Y}\left(\left| \frac{(\bar{X}-\bar{Y})\sqrt{\kappa\nu/(\kappa+\nu)}}{\sqrt{(\kappa S_X^2 + \nu S_Y^2)/(\kappa+\nu-2)}} \right| > c_\alpha \right) = P_{\mu_X=\mu_Y}(|T_{\kappa+\nu-1}| > c_\alpha)$$

$$= 1 - [F_{\kappa+\nu-1}(c_\alpha) - F_{\kappa+\nu-1}(-c_\alpha)] = 2[1 - F_{\kappa+\nu-1}(c_\alpha)] = a.$$

Συμβολίζοντας με $t_{\kappa+\nu-2,\alpha/2}$ το άνω $\alpha/2$-σημείο της *t*-κατανομής με $\kappa+\nu-2$ βαθμούς ελευθερίας, το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$P(T_{\kappa+\nu-2} > t_{\kappa+\nu-2,\alpha/2}) = 1 - F_{\kappa+\nu-2}(t_{\kappa+\nu-2,\alpha/2}) = \alpha/2,$$

παίρνουμε

$$c_\alpha = t_{\kappa+\nu-2,\alpha/2}$$

και έτσι

$$K = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_\kappa, y_1, y_2, ..., y_\nu) : \left| \frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{\kappa\nu/(\kappa+\nu)}}{\sqrt{(\kappa s_X^2 + \nu s_Y^2)/(\kappa+\nu-2)}} \right| > t_{\kappa+\nu-2,\alpha/2} \right\}.$$

4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ

Η κατανομή της συνάρτησης ελέγχου (δειγματοσυνάρτησης) στατιστικών υποθέσεων για τις παραμέτρους πληθυσμών των οποίων η κατανομή δεν είναι κανονική, όταν το μέγεθος *ν* του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο (θεωρητικά όταν

$\nu \to \infty$), δύνανται να προσεγγισθεί, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, από την κανονική κατανομή.

Παράδειγμα 4.1. *Έλεγχος για το ποσοστό διχοτομημένου πληθυσμού με μεγάλου μεγέθους δείγμα.* Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από τη δίτιμη κατανομή Bernoulli με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x \mid p) = p^x (1-p)^{1-x}, \ x = 0, 1, \ 0 < p < 1.$$

Να ελεχθεί η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : p = p_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : p = p_1$ με $p_0 < p_1$.

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.1, η συνάρτηση ελέγχου (δειγματοσυνάρτηση) των στατιστικών αυτών υποθέσεων είναι το άθροισμα $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν $t > c$. Αν το μέγεθος ν του δείγματος είναι μεγάλο (θεωρητικά αν $\nu \to \infty$) η κατανομή του T δύνανται να προσεγγισθεί, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, από την κανονική κατανομή $N(\nu p, \nu p(1-p))$. Στην περίπτωση αυτή η κρίσιμη περιοχή γίνεται

$$K = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_\nu) : \left| \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} \right| > c_\alpha \right\},$$

όπου η σταθερή c_α, για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α, υπολογίζεται από τη σχέση

$$P_{p_0}\left(\left| \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} \right| > c_\alpha \right) = a.$$

Παρατηρούμε ότι αν η $H_0 : p = p_0$ είναι αληθής τότε η

$$Z = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}}$$

ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$ και έτσι $c_\alpha = z_\alpha$.

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την Poisson με συνάρτηση πιθανότητας:

$$f(x \mid \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, ..., \ 0 < \lambda < \infty.$$

Να ελεγχεί, σε επίπεδο σημαντικότητας α, η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \lambda = \lambda_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \lambda = \lambda_1$, με $\lambda_0 < \lambda_1$, και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου αυτού.

2. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Να ελεχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας α, η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$, με $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$, και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου αυτού.

3. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x \mid \theta) = \theta e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty,\ 0 < \theta < \infty .$$

Να ελεγχεί, σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta = \theta_1$, με $\theta_0 > \theta_1$, και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου αυτού.

4. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta - 1},\ 0 < x < 1,\ 0 < \theta < \infty .$$

Να ελεγχεί, σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, η απλή μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta = \theta_1$, με $\theta_0 > \theta_1$.

5. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με την κανονική κατανομή $N(\mu, 1)$. Να ελεχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu \le \mu_0$ ή $\mu \ge \mu_1$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu_0 < \mu < \mu_1$ και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου αυτού.

6. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με την κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Να ελεχθούν, σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, τα ζεύγη των υποθέσεων (i) $H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$ έναντι της $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ και (ii) $H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$ ή $\sigma_0^2 \ge \sigma_1^2$ έναντι της $H_1 : \sigma_0^2 < \sigma^2 < \sigma_1^2$.

7. (*Συνέχεια*). Να ελεχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2$.

8. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να ελεχθεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ και να υπολογισθεί η ισχύς του ελέγχου αυτού.

9. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κανονικές κατανομές $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, αντίστοιχα, όπου οι διασπορές σ_X^2 και σ_Y^2 είναι γνωστές. Να ελεχθεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \mu_X \ne \mu_Y$.

10. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κανονικές κατανομές $N(0, \sigma_X^2)$ και $N(0, \sigma_Y^2)$, αντίστοιχα. Να ελεχθεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και σε επίπεδο σημαντικότητας *α*, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \sigma_X^2 \ne \sigma_Y^2$.

11. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κανονικές κατανομές $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, αντίστοιχα. Να ελεχθεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και σε επίπεδο σημαντικότητας α, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

12. Έστω $X_1, X_2, ..., X_\kappa$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_\nu$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις εκθετικές κατανομές με μέσους θ_1 και θ_2, αντίστοιχα. Να ελεγχεί, με τη βοήθεια του κριτηρίου του γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και σε επίπεδο σημαντικότητας α, η μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$.