Λύσεις σειρά ασκήσεων 1

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

κ) $\sin^2(3x-2) \to f'(x) = 2\sin(3x-2)\,(\sin(3x-2))' = 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)(3x-2)' =$

$$= 6\sin(3x-2)\cos(3x-2) = 3\sin(6x-4).$$

2. Υπάρχει τιμή του b ώστε η

$$g(x) = \begin{cases} x+b, \text{για } x \geq 0 \\ \cos(x), \text{ για } x < 0 \end{cases}, \tag{1}$$

να είναι α) συνεχής στο μηδέν και β) διαφορίσιμη στο μηδέν·

Για να είναι συνεχής θα πρέπει :

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\cos(x) = \lim_{x\to 0}(x+b) \Rightarrow 1 = b.$$

β) Για να είναι διαφορίσιμη στο μηδέν θα πρέπει

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{g(0)-g(x)}{0-x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(0)-\cos(x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x+b-b}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 1.$$

Το όριο είναι απροσδιόριστο (0/0) και εφαρμόζουμε τον κανόνα του l' Hospital για να το βρούμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{1} = 0.$$

Επειδή τα πλευρικά όρια δεν είναι ίδια η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη.

5. Δίνεται η καμπύλη που έχει την παραμετρική μορφή: $x = t^3/3$, $y = t^2/2$ με το t να παίρνει τιμές στο $[0,1]$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας για $t_0 = 1/2$.

Επειδή η καμπύλη είναι σε παραμετρική μορφή θα έχουμε :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(dy/dt)}{(dx/dt)} = \frac{(t^2/2)'}{(t^3/3)'} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}.$$

Για $t_0 = 1/2$, έχουμε $(dy/dx) = f'(x_0) = 2$. Επίσης για $t_0 = 1/2$ έχουμε $x_0 = t_0^3/3 = 1/24$ και $y_0 = f(x_0) = t_0^2/2 = 1/8$. Άρα :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2(x - 1/24) + 1/8 = 2x + 1/24.$$

6. Δίνεται η καμπύλη $x^2 + xy - y^2 = 1$. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x, y) = (2, 3)$.

Θεωρούμε ότι $y = y(x)$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^2\right) = 0 \Rightarrow 2x + y + x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x - 2y}.$$

Για το σημείο $(x, y) = (2, 3)$ είναι :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x - 2y} = \frac{7}{4}.$$

Άρα:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{7}{4}(x - 2) + 3 = \frac{7x}{4} - \frac{1}{2}.$$

7. Δίνεται η καμπύλη $x \sin(2y) = y \cos(2x)$. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x, y) = (\pi/4, \pi/2)$.

Θεωρούμε ότι $y = y(x)$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(x \sin(2y)\right) = \frac{d}{dx}\left(y \cos(2x)\right) \Rightarrow \sin(2y) + x\frac{d}{dx}\sin(2y) = \frac{dy}{dx}\cos(2x) - 2y\sin(2x) \Rightarrow$$

$$\sin(2y) + 2x\cos(2y)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\cos(2x) - 2y\sin(2x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(2y) + 2y\sin(2x)}{2x\cos(2y) - \cos(2x)}.$$

Για το σημείο $(x, y) = (\pi/4, \pi/2)$ είναι :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(2y) + 2y\sin(2x)}{2x\cos(2y) - \cos(2x)} = 2.$$

Άρα:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2(x - \pi/4) + \pi/2 = 2x.$$