ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι - 30/6/2011

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

$$α)\ a_n = \frac{n^5 + 2(3n)^3 + 2}{2n^5 + 5(n+2)^2 + 6}\ , \quad β)\ b_n = \left(\frac{n-2}{n+4}\right)^{n+4}.\ \text{Δίνεται: } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$α)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 2(3n)^3 + 2}{2n^5 + 5(n+2)^2 + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1 + 54/n^2 + 2/n^5\right)}{2n^5\left(1 + 5(n+2)^2/2n^5 + 3/n^5\right)} = \frac{1}{2}$$

β) Θέτουμε: $t = n + 4$. Άρα:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-6}{t}\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{6}{t}\right)^t = e^{-6}.$$

ΘΕΜΑ 2

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$α)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}\ , \quad β)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο της σύγκρισης. Έχουμε: $\frac{1}{n^2+3^n} < \frac{1}{3^n}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$.

β) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου των όρων της σειράς. Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{[(n+1)!]^2(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}{(n!)^2(n+1)^2(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4 > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

ΘΕΜΑ 3

α) Να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x}=0$$

β) Να υπολογιστούν τα $a,\ b$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x), & \text{για } x\le\pi\\ ax+b, & \text{για } \quad x>\pi\end{cases},$$

να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

α) Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα ¨σάντουιτσ¨. Έτσι:

$$0\le\left|\frac{\cos(x)}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}.$$

Επειδή: $\lim_{x\to\infty}(1/|x|)=0$ συνεπάγεται ότι και:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x}=0.$$

β) Για να είναι συνεχής η f, θα πρέπει:

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to\pi^+}(ax+b)=\lim_{x\to\pi^-}\sin(x)\Rightarrow b=-a\pi.$$

Για να είναι παραγωγίσιμη η f θα πρέπει:

$$f'(\pi^+)=f'(\pi^-)\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{\sin(\pi+h)-\sin(\pi)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a\pi+b-a(a\pi-h)-b}{h}\Rightarrow$$

$$\lim_{h\to0}\frac{2\cos(\pi+h/2)\sin(h/2)}{h}=a\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=\pi.$$

ΘΕΜΑ 4

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x)=\sin(\pi+6x^2)$ κατά Taylor γύρω από το $x_0=0$, κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης.

Αναπτύσουμε κατά Taylor γύρω από το $x_0 = 0$ κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ...$$

$f(0) = \sin\pi = 0$

$f'(x) = 12x\cos(\pi + 6x^2) \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 12\cos(\pi + 6x^2) - 144x^2\sin(\pi + 6x^2) \Rightarrow f''(0) = -12$

Άρα:$f(x) = -6x^2 + ...$

ΘΕΜΑ 5

α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}dx.$$

β) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = \frac{x+4}{x^3+2x^2+x}$ και του άξονα x στο διάστημα $1 \leq x \leq 2$.

γ) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx.$$

α) Θέτωντας $y = 1+3\sin^2(x)$, το διαφορικό γίνεται $dy = 6\sin(x)\cos(x)dx$ και τα όρια ολοκλήρωσης είναι: $x = 0 \to y = 1$ και $x = \pi/2 \to y = 4$. Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}dx = \int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}} = [\sqrt{y}]_1^4 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1.$$

β) Το εμβαδό του χωρίου μεταξύ της καμπύλης δίνεται και του άξονα x δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E = \int_1^2 \frac{x+4}{x^3+2x^2+x}dx$$

Το ολοκλήρωμα είναι κλάσμα πολυωνύμων άρα θα σπάσουμε την έκφραση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{x+4}{x^3+2x^2+x} = \frac{x+4}{x(x^2+2x+1)} = \frac{x+4}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}.$$

Εξισώνουμε τους αριθμητές:

$$x+4 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A \Rightarrow A = 4, \quad B = -4 \quad \text{και} \quad C = -3$$

Επομένως:

$$\int_1^2 \frac{x+4}{x^3+2x^2+x}dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}\right)dx = 4\left[\ln|x|\right]_1^2 - 4\left[\ln|x+1|\right]_1^2 + 3\left[\frac{1}{x+1}\right]_1^2 =$$

$$= 4\ln 2 - 4\ln 3 + 4\ln 2 - 1/2 = 4\ln(4/3) - 1/2$$

γ) Για να υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα, υπολογίζουμε πρώτα το:

$$I_b = \int_0^b xe^{-x}dx.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$I_b = -\int_0^b x\left(e^{-x}\right)'dx = -\left[xe^{-x}\right]_0^b + \int_0^b e^{-x}dx = -be^{-b} - \left[e^{-x}\right]_0^b = -be^{-b} - e^{-b} + 1$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$I = \lim_{b\to\infty} I_b = \lim_{b\to\infty}\left(1 - e^{-b} - be^{b}\right) = 1 + \lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b}.$$

Το όριο είναι της μορφής ∞/∞ και επομένως:

$$I = 1 + \lim_{b\to\infty}\frac{b'}{(e^b)'} = 1 + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = 1.$$

ΘΕΜΑ 6

Έστω μιγαδικός αριθμός z. Να δειχθεί ότι ο αριθμός $w = z + (3/z)$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z| = \sqrt{3}$.

Έστω: $z = x + iy$. Θα έχουμε:

$$w = z + \frac{3}{z} = x + iy + \frac{3}{x+iy} = x + iy + \frac{3(x-iy)}{x^2+y^2} = x + \frac{3x}{x^2+y^2} + iy\left(1 - \frac{3}{x^2+y^2}\right).$$

Για να είναι ο w πραγματικός, θα πρέπει:

$$y\left(1 - \frac{3}{x^2+y^2}\right) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow z \in R \quad \text{ή} \quad |z| = \sqrt{3}.$$