ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΕΙΡΕΣ

1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός 1. Μια ¨1-1¨ (ένα προς ένα) συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο X του $\mathbb{R}$, δηλαδή μία 1-1 συνάρτηση

$$A: \mathbb{N} \longrightarrow X \subseteq \mathbb{R} \qquad (1)$$

λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών ή πραγματική ακολουθία ή ακολουθία και συμβολίζεται ως $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ ή απλά $\{a_n\}$.

Ορισμός 2. Η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται αύξουσα (αντίστοιχα αυστηρώς αύξουσα) αν είναι

$$a_n \leq a_{n+1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\text{αντίστοιχα } a_n < a_{n+1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N})$$

και λέγεται φθίνουσα (αντίστοιχα αυστηρώς φθίνουσα) αν είναι

$$a_n \geq a_{n+1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\text{αντίστοιχα } a_n > a_{n+1}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N})$$

Ορισμός 3. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη εκ των άνω αν

$$\exists\, M \in \mathbb{R}: a_n \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός *M* είναι ένα ανώτερο φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 4. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη εκ των κάτω αν

$$\exists\, m \in \mathbb{R}: a_n \geq m,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός *m* είναι ένα κατώτερο φράγμα της ακολουθίας.

Ορισμός 5. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, αν είναι φραγμένη εκ των άνω και εκ των κάτω, δηλ. αν

$$\exists\ m, M \in \mathbb{R}:\ m \leq\ a_n \leq M, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ορισμός 6. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ ή ότι συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$ και γράφουμε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \text{ή} \quad a_n \longrightarrow \ell, \text{ όταν } n \longrightarrow +\infty,$$

αν $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται μηδενική, αν συγκλίνει στο $0 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 7. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο το $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ \text{ ή } \ a_n \longrightarrow +\infty, \text{ όταν } n \longrightarrow +\infty,$$

αν $\quad \forall\, M > 0\ \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}\colon\ n > n_0 \Rightarrow a_n > M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Ορισμός 8. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ έχει όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \ \text{ ή } \ a_n \longrightarrow -\infty, \text{ όταν } n \longrightarrow +\infty,$$

αν $\quad \forall\, M > 0\ \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}\colon\ n > n_0 \Rightarrow a_n < -M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Ορισμός 9. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται συγκλίνουσα αν έχει όριο ℓ και είναι $\ell \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 10. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται αποκλίνουσα αν δεν έχει όριο ή αν έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Θεώρημα 1. (Κριτήριο σύγκλισης ακολουθίας (Cauchy)). Μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα αν, και μόνο αν,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\ n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 2.

Α. Κάθε αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) και φραγμένη εκ των άνω (αντίστοιχα φραγμένη εκ των κάτω) ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Β. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει ένα και μόνο όριο.

Γ. Μια συγκλίνουσα (αντίστοιχα αποκλίνουσα) ακολουθία παραμένει συγκλίνουσα (αντίστοιχα αποκλίνουσα) αν μεταβληθούν οι k πρώτοι όροι της, όπου $k \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1. Για την ακολουθία $\{a_n\}$ όπου $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ισχύουν:

1) $a_n < a_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$,
2) $2 \le a_n < 3, \forall\, n \in \mathbb{N}$,

Επομένως η ακολουθία αυτή είναι συγκλίνουσα.

Το όριο της παραπάνω ακολουθίας συμβολίζεται με e και λαμβάνεται ως βάση των Νεπέριων Λογαρίθμων. Είναι δηλαδή $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, με $e \cong 2{,}7182818284$.

Θεώρημα 3. Αν οι ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι συγκλίνουσες και $k \in \mathbb{R}$, τότε:

a. Η ακολουθία $\{ka_n\}$είναι επίσης συγκλίνουσα και ισχύει
$$\lim_{n\to+\infty} ka_n = k[\lim_{n\to+\infty} a_n]$$
b. Η ακολουθίες $\{a_n \pm b_n\}$ είναι επίσης συγκλίνουσες και ισχύει
$$\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n$$
c. Η ακολουθία $\{a_n \cdot b_n\}$ είναι επίσης συγκλίνουσα και ισχύει
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n$$

d. Αν είναι $b_n \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, τότε η ακολουθία $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ είναι επίσης συγκλίνουσα και ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.$$

e. Αν είναι $|a| > 1$, τότε είναι και

$$\lim_{n\to+\infty} |a|^n = +\infty$$

f. Αν είναι $|a| < 1$, τότε είναι και

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$$

2. ΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός 1. Θεωρούμε την ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ (1)

και από αυτή κατασκευάζουμε μια νέα ακολουθία $\{s_n\}$ (2)

θέτοντας $s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots\ ,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Η ακολουθία (2) λέγεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας (1) ή άπειρη σειρά ή (απλά) σειρά και συμβολίζεται με $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (3) ή

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ορισμός 2. Όταν η ακολουθία (2) συγκλίνει στο $s \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η σειρά (3) συγκλίνει στο s (ή ότι είναι συγκλίνουσα και έχει άθροισμα s) και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Ορισμός 3. Όταν η ακολουθία (2) έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$ ή όταν το

$$\lim_{n\to+\infty} s_n$$

δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι η σειρά (3) αποκλίνει ή ότι είναι αποκλίνουσα.

Πρόταση 1. Αν μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει, τότε ο γενικός όρος της τείνει στο μηδέν, δηλαδή

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Πόρισμα 1. Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι αν δεν υπάρχει το

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

ή αν υπάρχει και είναι

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0.$$

τότε η σειρά αποκλίνει.

Ορισμός 4. Λέμε ότι μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει απολύτως αν συγκλίνει η σειρά με όρους τις απόλυτες τιμές των όρων της, δηλ. η

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Θεώρημα 1. Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και όπως έχει.

Ορισμός 5. Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

λέγεται τηλεσκοπική σειρά αν υπάρχει ακολουθία $\{b_n\}$ τέτοια ώστε να είναι

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Αξιοσημείωτες σειρές:

a) Η αρμονική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

b) Η *p*-σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

c) Η γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\, \omega^{n-1}$$

όπου $a, \omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, με $a \neq 0, \omega \neq 0.$

3. ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Μια σειρά με θετικούς όρους είναι αυστηρώς αύξουσα.

Θεώρημα 1. (1ο κριτήριο σύγκλισης). Μια σειρά με θετικούς όρους συγκλίνει αν, και μόνο αν, η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη εκ των άνω.

Θεώρημα 2. (2ο κριτήριο σύγκλισης - κριτήριο σύγκρισης). Αν είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

δύο σειρές με θετικούς όρους τέτοιες ώστε $a_n \leq b_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

α) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

β) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, αποκλίνει τότε αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Πρόταση 1. Η p-σειρά συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

Θεώρημα 3. (3ο κριτήριο σύγκλισης - κριτήριο του λόγου ή του D' Alembert). Αν είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,$$

μια σειρά με θετικούς όρους τέτοια ώστε η ακολουθία $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ του πηλίκου των διαδοχικών της όρων να συγκλίνει στο $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$$

α) Αν είναι $\lambda < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

β) Αν είναι $\lambda > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

γ) Αν είναι $\lambda = 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι δυνατό να συγκλίνει αλλά και να αποκλίνει.

Στην περίπτωση γ) το κριτήριο δεν εφαρμόζεται.

Θεώρημα 4. (4^{ο} κριτήριο σύγκλισης - κριτήριο της *n*–οστής ρίζας ή του Cauchy). Αν είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,,$$

μια σειρά με θετικούς όρους τέτοια ώστε η ακολουθία της *n*–οστής ρίζας του γενικού της όρου να συγκλίνει στο $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) = \lambda$$

α) Αν είναι $\lambda < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

β) Αν είναι $\lambda > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

γ) Αν είναι $\lambda = 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι δυνατό να συγκλίνει αλλά και να αποκλίνει,

στην περίπτωση αυτή το κριτήριο του Cauchy δεν εφαρμόζεται.

4. ΣΕΙΡΕΣ ΕΝΑΛΛΑΣΟΜΕΝΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ορισμός 1. Μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \; a_n$$

όπου $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, λέγεται σειρά εναλλασσομένου σημείου.

Θεώρημα 1. (Leibnitz) Αν μια ακολουθία θετικών όρων είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική, δηλαδή αν είναι $a_n > a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$,

τότε η σειρά εναλλασσομένου σημείου $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \; a_n$ συγκλίνει.

5. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ (ΣΕΙΡΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ)

Ορισμός 1. Μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots, (1)$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = 0,1,2,3, \dots$, λέγεται σειρά δυνάμεων του $x - x_0$ ή δυναμοσειρά.

Θεώρημα 1. Για κάθε δυναμοσειρά (1) μία από τις τρεις παρακάτω προτάσεις ισχύει:

i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$. (ακτίνα σύγκλισης ίση με 0)

ii) Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (ακτίνα σύγκλισης ίση με +∞)

iii) Υπάρχει $p \in \mathbb{R},\ p > 0$ τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|\ x - x_0| < p$ και αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|\ x - x_0| > p$. (ακτίνα σύγκλισης ίση με $p > 0$)

Θεώρημα 2. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

τότε η ακτίνα σύγκλισης p της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}$ δίνεται από τον τύπο

$$p = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(Αν $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ τότε $p = +\infty$ και αν $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ τότε $p = 0$)

Παρατήρηση 1. Η δυναμοσειρά (1) για $x_0 = 0$ γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n-1} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots.$$

Παρατήρηση 2. Αν μια δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $p > 0$, τότε συγκλίνει για $x_0 - p < x < x_0 + p$ και αποκλίνει για $x < x_0 - p$ ή για $x > x_0 + p$. Για $x = x_0 \pm p$ η δυναμοσειρά είναι δυνατό να συγκλίνει ή να αποκλίνει.

Παρατήρηση 3. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

τότε η ακτίνα σύγκλισης p της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x - x_0)^{n-1}$ δίνεται από τον τύπο

$$p = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$