# ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Έστω [α,β ] ένα κλειστό διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

**Διαμέριση $P_\nu$** του [α, β] λέγεται κάθε διατεταγμένο πεπερασμένο υποσύνολο του [α,β] με πρώτο στοιχείο το α και τελευταίο το β.

$$\mathbf{P_\nu} : \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

Η διαφορά $\Delta\chi_\kappa = \chi_\kappa - \chi_{\kappa-1}$ λέγεται πλάτος του κ υποδιαστήματος.

**Λεπτότητα της διαμέρισης λ($P_\nu$** ) λέμε τον αριθμό max{ $\chi_\kappa - \chi_{\kappa-1}$, με κ= 0, 1, …ν}

Έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο [α, β] και $P_\nu$ μια διαμέριση του [α,β].

Θέτουμε για κάθε I = 1,2,3, …ν :

$$m = \inf\{ f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i \}$$

$$M = \sup\{ f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i \}$$

Το **κάτω άθροισμα Darboux L( f, $P_\nu$ )** της συνάρτησης για την διαμέριση $P_\nu$

Ορίζεται ως : **L( f, $P_\nu$ ) =** $\sum_{i=1}^{\nu} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \Delta x_i$

Το **άνω άθροισμα Darboux U( f, $P_\nu$ )** της συνάρτησης για την διαμέριση $P_\nu$

Ορίζεται ως : **U( f, $P_\nu$ ) =** $\sum_{i=1}^{\nu} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\nu} M_i \Delta x_i$

Προφανώς **L( f, $P_\nu$ ) ≤ U( f, $P_\nu$ ).**

**Άνω ολοκλήρωμα :** $\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \inf\{$ U( f, $P_\nu$ ), με $P_\nu$ μια διαμέριση του [α,β]}

**Κάτω ολοκλήρωμα :** $\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \sup\{$ L( f, $P_\nu$ ), με $P_\nu$ μια διαμέριση του [α,β]}

**Ορισμός:** Μία συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη στο [α, β] λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** όταν και μονο όταν $\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx = \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f(x)dx$ και η κοινή τιμή αυτή λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα ή ολοκλήρωμα Riemann** της f στο [α,β] και συμβολίζεται με $\int_{a}^{\beta} f(x)dx$.

**Το Άθροισμα Riemann S( f, $P_\nu$ )** (ενδιάμεσο άθροισμα) της συνάρτησης για την διαμέριση $P_\nu$ , ορίζεται ως :

$$\mathbf{S(\, f, P_\nu\,) =} \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x_k = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots f(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1})$$

Όταν για οποιαδήποτε διαμέριση $P_\nu$ του[α,β] και για οποιαδήποτε εκλογή των σημείων $\xi_\nu$ και όταν όλα τα Δχ τείνουν στο 0, και το παραπάνω άθροισμα τείνει στον ίδιο πραγματικό αριθμό τότε η συνάρτηση λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemann.**

**Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας:**

Μία συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ορισμένη και φραγμένη στο [α, β] είναι **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** όταν και μονο όταν για κάθε ε>0 υπάρχει μια διαμέριση $P_\nu$ του[α,β] τέτοια, ώστε U( f, $P_\nu$ ) - L( f, $P_\nu$ ) < ε.

**ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ**

Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] με παράγωγο $f'$ ολοκληρώσιμη στο [α, β] Τότε,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = f(\beta)-f(a)$$

## ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αν $f:D\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα D τότε **αρχική συνάρτηση της f** ( ή αντιπαράγωγος) λέγεται κάθε συνάρτηση $F:D\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο D και αληθεύει $F'(x)=f(x)\ \forall x\in D$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f σε διάστημα D. Τότε η συνάρτηση G είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα D, όταν και μόνο όταν η G έχει την μορφή $G(x)=F(x)+c,\quad \forall x\in D$ όπου c είναι μια σταθερά.

Το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων $F:D\to\mathbb{R}$ μιας συνάρτησης $f:D\to\mathbb{R}$ σε ένα διάστημα Dονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο D και συμβολίζεται με

$\int f(x)dx$. Ισχύει $\int f(x)dx=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$.

Μπορούμε να γράψουμε : $\int F'(x)dx=F(x)+c$

## ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=Arc\tan x+c \qquad \int\frac{1}{k^2+x^2}dx=\frac{1}{k}Arc\tan\frac{x}{k}+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=Arc\sin x+c_1=-Arc\cos x+c_2$$

## ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

**ΘΕΩΡΗΜΑ** Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα D (φραγμένο ή όχι) υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Τότε, αληθεύει η σχέση: $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)$.