**Παράδειγμα 6.4.** *Το πρόβλημα των γενεθλίων*. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο $\kappa$ ατόμων των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Σημειώνουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες εκτός και αν είναι δίσεκτο, οπότε έχει 366 ημέρες. Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των γεννήσεων δεν είναι σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια του έτους. Όμως, σε πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες οι οποίες είναι εξίσου πιθανές ως ημέρες γενεθλίων. Με την παραδοχή αυτή, να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως δύο τουλάχιστο από τα $\kappa$ άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Παρατηρούμε ότι οι ημέρες των γενεθλίων του συνόλου των $\kappa$ ατόμων μπορούν να παρασταθούν από μία διάταξη $(i_1, i_2, ..., i_\kappa)$ του συνόλου των 365 ημερών $\{1, 2, ..., 365\}$ ανά $\kappa$ με επανάληψη, όπου $i_r$ είναι η ημέρα γέννησης του $r$ ατόμου, $r = 1, 2, ..., \kappa$. Ο δειγματικός χώρος $\Omega$, ο οποίος περιλαμβάνει τις διατάξεις αυτές, έχει $N(\Omega) = 365^\kappa$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία. Έστω $A$ το ενδεχόμενο όπως δύο τουλάχιστο από τα $\kappa$ άτομα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Το συμπληρωματικό του ενδεχομένου $A$ είναι το ενδεχόμενο $A'$ όπως τα $\kappa$ άτομα έχουν διαφορετικές ημέρες γενεθλίων. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $P(A')$ υπολογίζεται πιο εύκολα από την πιθανότητα $P(A)$. Συγκεκριμένα, το ενδεχόμενο $A'$ περιλαμβάνει τις διατάξεις $(i_1, i_2, ..., i_\kappa)$ του συνόλου των 365 ημερών $\{1, 2, ..., 365\}$ ανά $\kappa$ (χωρίς επανάληψη) και έτσι $N(A') = (365)_\kappa$. Εφαρμόζοντας την (6.1), συνάγουμε την πιθανότητα

$$P(A') = \frac{(365)_\kappa}{365^\kappa}$$

και σύμφωνα με την (6.5) συμπεραίνουμε τη ζητουμένη πιθανότητα:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(365)_\kappa}{365^\kappa}.$$

Σημειώνουμε ότι για $\kappa = 23$, έχουμε $P(A) > 1/2$.

**Παράδειγμα 6.5.** Έστω ότι από μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 10 σφαιρίδια αριθμημένα από το 0 μέχρι το 9 κληρώνεται κάθε εβδομάδα ένας αριθμός. Μετά από κάθε κλήρωση το εξαγόμενο σφαιρίδιο επανατοποθετείται στην κληρωτίδα. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα 3 (διαδοχικών) κληρώσεων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι το 5.

Το ενδεχόμενο όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι το 5 δύναται να παρασταθεί ως διαφορά $A - B$ του ενδεχομένου $A$ όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι ένας από τους αριθμούς $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και του ενδεχομένου $B$ όπως ο μεγαλύτερος αριθμός που θα κληρωθεί είναι ένας από τους αριθμούς $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq A$ και σύμφωνα με την (6.5)

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Ο αριθμός των στοιχείων του δειγματικού χώρου $\Omega$ των 3 διαδοχικών κληρώσεων είναι ίσος με $N(\Omega) = 10^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 10 αριθμών $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ ανά 3 με επανάληψη, ενώ ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου $A$ είναι ίσος με $N(A) = 6^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 6 αριθμών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ανά 3 με επανάληψη. Ομοίως $N(B) = 5^3$ και έτσι

$$P(A-B)=\frac{6^3}{10^3}-\frac{5^3}{10^3}=0{,}091\,.$$

**Παράδειγμα 6.6.** (*Συνέχεια*). Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου να κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1 (από μία τουλάχιστο φορά ο καθένας).

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ να μη κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1, αντίστοιχα. Τότε $A'B'$ είναι το ενδεχόμενο να κληρωθούν οι αριθμοί 0 και 1 (από μία τουλάχιστο φορά ο καθένας) και σύμφωνα με την (6.7),

$$P(A'B')=1-P(A)-P(B)+P(AB)\,.$$

Ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου $A$ είναι ίσος με $N(A)=9^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 9 αριθμών $\{1,2,...,9\}$ ανά 3 με επανάληψη, ο αριθμός των στοιχείων του $B$ είναι ίσος με $N(B)=9^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 9 αριθμών $\{0,2,3,...,9\}$ ανά 3 με επανάληψη και ο αριθμός των στοιχείων του $AB$ είναι ίσος με $N(AB)=8^3$, τον αριθμό των διατάξεων των 8 αριθμών $\{2,3,...,9\}$ ανά 3 με επανάληψη. Επομένως

$$P(A'B')=1-2\frac{9^3}{10^3}+\frac{8^3}{10^3}=0{,}054\,.$$

## 7. ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας αναφύεται στις περιπτώσεις όπου μία μερική γνώση ως προς την έκβαση ενός τυχαίου (στοχαστικού) πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο $\Omega$ και πιθανότητα $P(A)$ για κάθε ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο εκτέλεσής του πραγματοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο $A\subseteq\Omega$. Τότε, όσον αφορά την τελική του έκβαση, ο δειγματικός χώρος συρρικνώνεται στο σύνολο $A$ και ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο $B$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega$) συρρικνώνεται στο ενδεχόμενο $\Gamma = AB$ το οποίο συμβολίζεται με $B\mid A$ και διαβάζεται: το ενδεχόμενο $B$ δεδομένου του (ενδεχομένου) $A$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου $B$ δεδομένου του $A$, η οποία συμβολίζεται με $P(B\mid A)$, $B\subseteq\Omega$ και καλείται δεσμευμένη πιθανότητα (δεδομένου του $A$), συνδέεται, όπως είναι φυσικό, με τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(AB)$. Το επόμενο παράδειγμα χρησιμεύει στην καλύτερη κατανόηση του πλαισίου στο οποίο τοποθετείται η δεσμευμένη πιθανότητα.

**Παράδειγμα 7.1.** Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το 5. Τα σφαιρίδια 1 και 2 είναι άσπρα ενώ τα σφαιρίδια 3, 4 και 5 είναι μαύρα.

(α) Έστω ότι σε μία πρώτη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο $A$ εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο δειγματικός χώρος του τυχαίου αυτού πειράματος περιλαμβάνει τα ισοπίθανα δειγματικά σημεία: $\Omega_1=\{1,2,3,4,5\}$ και το ενδεχόμενο της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου περιλαμβάνει τα σημεία: $A=\{1,2\}$. Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(A')=\frac{3}{5}.$$

(β) Έστω ότι, χωρίς επανάθεση στην κληρωτίδα του σφαιριδίου που εξάγεται στην πρώτη κλήρωση, σε μία δεύτερη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο $B$ εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(B)$ απαιτεί τη γνώση της σύνθεσης των σφαιριδίων στην κληρωτίδα τη στιγμή της εξαγωγής του δευτέρου σφαιριδίου. Συγκεκριμένα, η γνώση της πραγματοποίησης ή μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου $A$ κατά την πρώτη εξαγωγή επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(B)$, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας το οποίο εξετάζουμε πιο κάτω. Το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει την ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B \mid A)$, του ενδεχομένου $B$ δεδομένου του $A$. Περαιτέρω, η σύνδεση της πιθανότητας $P(B \mid A)$ με τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(AB)$, η οποία συνάγεται από τη σύνθεση των δύο κληρώσεων στο ακόλουθο (σύνθετο) τυχαίο πείραμα, υποδεικνύει τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας μέσω της (μη δεσμευμένης) πιθανότητας.

(γ) Έστω ότι από την ανωτέρω κληρωτίδα εξάγονται τυχαία δύο σφαιρίδια, το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση. Ο δειγματικός χώρος $\Omega$ του σύνθετου αυτού τυχαίου πειράματος περιλαμβάνει τα εξής $N \equiv N(\Omega) = (5)_2 = 20$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία:

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),$$
$$(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}.$$

Το ενδεχόμενο $A$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega$), εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην πρώτη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα $N(A) = 8$ δειγματικά σημεία:

$$A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\},$$

ενώ το ενδεχόμενο $B$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega$), εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην δεύτερη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα $N(B) = 8$ δειγματικά σημεία:

$$B = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}.$$

Έτσι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $A$ είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα της περίπτωσης του τυχαίου πειράματος της μιας (πρώτης) κλήρωσης.

Ας υποθέσουμε ότι στην πρώτη κλήρωση του συνθέτου τυχαίου πειράματος πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο $A$, της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου. Η γνώση της πραγματοποίησης του $A$ μειώνει την αβεβαιότητα ως προς την τελική έκβαση του συνθέτου τυχαίου πειράματος συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο $\Omega$ στο σύνολο $A$ και το ενδεχόμενο $B$ στο ενδεχόμενο

$$AB = \{(1,2),(2,1)\}$$

με $N(AB) = 2$. Επομένως η δεσμευμένη πιθανότητα του $B$ δεδομένου του $A$ είναι ίση με

$$P(B \mid A) = \frac{N(AB)}{N(A)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$P(AB) = \frac{N(AB)}{N}, \; P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

συνάγουμε για τη δεσμευμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, η (μη δεσμευμένη) πιθανότητα του $B$ είναι ίση με

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Η πιθανότητα αυτή, τόσο στην παρούσα περίπτωση του πεπερασμένου δειγματικού χώρου $\Omega$ με ισοπίθανα δειγματικά σημεία όσο και σε οποιαδήποτε γενικότερη περίπτωση, όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, δύναται να υπολογισθεί με τη χρήση του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας (βλ. Παράδειγμα 7.3).

Ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας που ακολουθεί αξιοποιεί τα συμπεράσματα της προηγηθείσας ανάλυσης.

**Ορισμός 7.1.** *Έστω $\Omega$ ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο με $P(A) > 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου του A, είναι μία συνάρτηση $P(B \mid A)$, $B \subseteq \Omega$, η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \; B \subseteq \Omega. \tag{7.1}$$

*Όταν $P(A) = 0$, η $P(B \mid A)$ δεν ορίζεται. Για συγκεκριμένο ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$ η $P(B \mid A)$ καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A.*

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ικανοποιεί τα αξιώματα,

(α) *μη αρνητικότητας*: $P(B \mid A) \geq 0$ *για κάθε ενδεχόμενο* $B \subseteq \Omega$,

(β) *νορμαλισμού*: $P(\Omega \mid A) = 1$,

(γ) *αριθμήσιμης προσθετικότητας*:

$$P(B_1 + B_2 + \cdots + B_\nu + \cdots \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) + \cdots + P(B_\nu \mid A) + \cdots$$

*για οποιαδήποτε ακολουθία κατά ζεύγη ξένων ενδεχομένων* $B_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$,

και έτσι είναι μια γνήσια πιθανότητα. Σημειώνουμε ότι από την ιδιότητα (γ) συνάγεται ως μερική περίπτωση η σχέση

$$P(B_1 + B_2 + \cdots + B_\nu \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) + \cdots + P(B_\nu \mid A)$$

για κατά ζεύγη ξένα (αμοιβαίως αποκλειόμενα) ενδεχόμενα $B_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Η δεσμευμένη πιθανότητα ως γνήσια πιθανότητα ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της πιθανότητας. Για παράδειγμα, αν $B'$ είναι το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου $B$, η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B' \mid A) = P(AB')/P(A)$, επειδή $P(AB') = P(A) - P(AB)$, εκφράζεται συναρτήσει της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B \mid A) = P(AB)/P(A)$ ως

$$P(B' \mid A) = 1 - P(B \mid A).$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την έκφραση της πιθανότητας της τομής ενδεχομένων. Σχετικά αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα

**Θεώρημα 7.1.** (*Πολλαπλασιαστικό θεώρημα*). *Έστω* $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, ..., \nu$, *ενδεχόμενα με* $P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) > 0$. *Τότε*

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\nu) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_\nu \mid A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) . \qquad (7.2)$$

**Απόδειξη**. Παρατηρούμε ότι

$$A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1} \subseteq A_1 A_2 \cdots A_{\nu-2} \subseteq \cdots \subseteq A_1 A_2 \subseteq A_1 ,$$

οπότε

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) \le P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-2}) \le \cdots \le P(A_1 A_2) \le P(A_1)$$

και επειδή $P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) > 0$, έπεται ότι

$$P(A_1) > 0 ,\ P(A_1 A_2) > 0, ..., P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) > 0 ..$$

Επομένως οι δεσμευμένες πιθανότητες στο δεξιό μέλος της (7.2) έχουν έννοια (ορίζονται). Σύμφωνα με τον ορισμό (7.1) έχουμε

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} ,\ P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} , \ldots ,$$

$$P(A_\nu \mid A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) = \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1} A_\nu)}{P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1})}$$

και επομένως

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\nu) = P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \cdots \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_\nu)}{P(A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1})}$$

$$= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_\nu \mid A_1 A_2 \cdots A_{\nu-1}) .$$

**Παράδειγμα 7.3.** Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει $\nu$ σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το $\nu$ και έστω ότι $r$ από τα σφαιρίδια αυτά είναι άσπρα. Εξάγουμε τυχαία και χωρίς επανάθεση το ένα μετά το άλλο $\kappa$ σφαιρίδια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως και τα $\kappa$ εξαγόμενα σφαιρίδια είναι άσπρα.

Έστω $A_j$ το ενδεχόμενο εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην $j$ εξαγωγή $j = 1, 2, ..., \nu$. Τότε $A_1 A_2 \cdots A_\kappa$ είναι το ενδεχόμενο όπως και τα $\kappa$ εξαγόμενα σφαιρίδια είναι άσπρα και η ζητουμένη πιθανότητα, σύμφωνα με την (7.2), είναι

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\kappa) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_\kappa \mid A_1 A_2 \cdots A_{\kappa-1})$$

$$= \frac{r}{\nu} \cdot \frac{r-1}{\nu-1} \cdots \frac{r-\kappa+1}{\nu-\kappa+1} = \frac{(r)_\kappa}{(\nu)_\kappa} .$$

Στην περίπτωση του Ελληνικού Lotto η κληρωτίδα περιέχει $\nu = 49$ σφαιρίδια και κληρώνονται $\kappa = 6$ αριθμοί. Τα $r$ σφαιρίδια φέρουν τους αριθμούς στους οποίους στοιχηματίζει κάποιος. Έτσι αν στοιχηματίσει σε $r = 6$ αριθμούς, η πιθανότητα να πετύχει και τους 6 αριθμούς που κληρώνονται είναι

$$p = \frac{1}{13.998.816} \cong 0{,}00000007 .$$

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα πιθανοτήτων με τη χρησιμοποίηση δεσμευμένων πιθανοτήτων του ενδεχομένου αυτού. Η ανάλυση αυτή απαιτεί την έννοια της διαμέρισης του δειγματικού χώρου $\Omega$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Μία συλλογή $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ $\nu$ ενδεχομένων $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, ..., \nu$, τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, και η ένωσή τους είναι το $\Omega$, $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = \Omega$, καλείται *διαμέριση* του $\Omega$.

**Θεώρημα 7.2.** (*Θεώρημα ολικής πιθανότητας*). *Αν τα ενδεχόμενα* $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ *αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου* $\Omega$ *με* $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ *και* $B$ *είναι ένα ενδεχόμενο στον* $\Omega$, *τότε*

$$P(B) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa). \tag{7.3}$$

**Απόδειξη**. Παρατηρούμε ότι

$$B = \Omega B = (A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu)B = A_1 B + A_2 B + \cdots + A_\nu B,$$

όπου τα ενδεχόμενα $\Gamma_\kappa = A_\kappa B$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ είναι κατά ζεύγη ξένα μεταξύ τους επειδή για $i \neq j$ $\Gamma_i \Gamma_j = (A_i A_j) B = \varnothing$. Επομένως, σύμφωνα με την προσθετική ιδιότητα της πιθανότητας, έχουμε

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \cdots + P(A_\nu B).$$

Επειδή $P(A_\kappa) > 0$, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έπεται ότι

$$P(A_\kappa B) = P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa), \ \kappa = 1, 2, ..., \nu,$$

οπότε

$$P(B) = P(A_1) P(B \mid A_1) + P(A_2) P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_\nu) P(B \mid A_\nu).$$

**Παρατήρηση 7.1.** Η δεσμευμένη πιθανότητα όπως έχουμε ήδη σημειώσει ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (απόλυτης) πιθανότητας. Ο τύπος της ολικής πιθανότητας διατυπώνεται συναρτήσει της δεσμευμένης πιθανότητας ως εξής:

Έστω $A$ ένα ενδεχόμενο στο δειγματικό χώρο $\Omega$ με $P(A) > 0$. Αν τα ενδεχόμενα $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ αποτελούν μία διαμέριση του $\Omega$ με $P(A_\kappa \mid A) > 0$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ και $B$ είναι ένα ενδεχόμενο στον Ω, τότε

$$P(B \mid A) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa \mid A) P(B \mid A A_\kappa). \tag{7.4}$$

**Θεώρημα 7.3.** (*Τύπος του Bayes*). *Αν τα ενδεχόμενα* $\{A_1, A_2, ..., A_\nu\}$ *αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου* $\Omega$ *με* $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, ..., \nu$ *και* $B$ *είναι ένα ενδεχόμενο στον* $\Omega$ *με* $P(B) > 0$, *τότε*

$$P(A_r \mid B) = \frac{P(A_r) P(B \mid A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa)}, \ r = 1, 2, ..., \nu. \tag{7.5}$$

**Απόδειξη**. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το θεώρημα της ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$P(A_r \mid B) = \frac{P(A_r B)}{P(B)} = \frac{P(A_r)P(B \mid A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} P(A_\kappa)P(B \mid A_\kappa)},\ r = 1,2,\ldots,\nu .$$

**Παρατήρηση 7.2.** Οι πιθανότητες $P(A_\kappa)$, $\kappa = 1,2,\ldots,\nu$, που γνωρίζουμε πριν από την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος, καλούνται και “εκ των προτέρων” (a priori) πιθανότητες, ενώ οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(A_r \mid B)$, $r = 1,2,\ldots,\nu$, που υπολογίζουμε με δεδομένη την πραγματοποίηση του ενδεχομένου *B* και επομένως μετά την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος, καλούνται και “εκ των υστέρων” (a posteriori) πιθανότητες.

**Παράδειγμα 7.3.** Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 25 λαμπτήρων. Ας υποθέσουμε ότι από ένα χαρτοκιβώτιο που περιέχει 2 ελαττωματικούς λαμπτήρες εξάγονται χωρίς επανάθεση 2 λαμπτήρες. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα εξαγωγής ελαττωματικού λαμπήρα στη δεύτερη εξαγωγή και (β) η δεσμευμένη πιθανότητα να είχε εξαχθεί ελαττωματικός λαμπήρας στην πρώτη εξαγωγή δεδομένου ότι εξήχθει ελαττωματικός λαμπήρας στη δεύτερη εξαγωγή.

(α) Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα *A* και *B* εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα στην πρώτη και δεύτερη εξαγωγή, αντίστοιχα. Τότε, η πιθανότητα του ενδεχομένου εξαγωγής ελαττωματικού λαμπήρα στη δεύτερη εξαγωγή υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας ως εξής:

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A') = \frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24} + \frac{22}{25}\cdot\frac{3}{24} = \frac{3}{25}.$$

(β) Η δεσμευμένη πιθανότητα να είχε εξαχθεί ελαττωματικός λαμπήρας στην πρώτη εξαγωγή δεδομένου ότι εξήχθει ελαττωματικός λαμπήρας στη δεύτερη εξαγωγή υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση του τύπου του Bayes ως εξής:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A')P(B \mid A')} = \frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24}\Big/\left(\frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24} + \frac{22}{25}\cdot\frac{3}{24}\right) = \frac{1}{12}.$$

**Παράδειγμα 7.4.** Ας θεωρήσουμε ένα τηλεπικοινωνικό σύστημα αποτελούμενο από έναν πομπό, έναν αναμεταδότη και ένα δέκτη. Ο πομπός στέλλει τα σήματα στο δυαδικό σύστημα, στο οποίο τα γράμματα του αλφαβήτου είναι ακολουθίες από 0 και 1. Ο αναμεταδότης και ο δέκτης, λόγω θορύβου, λαμβάνουν το σήμα 0 ως σήμα 1 με πιθανότητα 0,02 και το σήμα 1 ως σήμα 0 με πιθανότητα 0,03. Να υπολο-γισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες λήψης από το δέκτη (α) του σήματος 0 και (β) του σήματος 1 δεδομένης, σε αμφότερες τις περιπτώσεις, της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0.

(α) Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο $A_0$ αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, το ενδεχόμενο $A_1$ λήψης από τον αναμεταδότη του σήματος 0 και $A_2$ το ενδεχόμενο λήψης από το δέκτη του σήματος 0. Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_2 \mid A_0)$, λήψης από το δέκτη του σήματος 0 δεδομένης της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, σύμφωνα με τον τύπο της ολικής πιθανότητας (7.4), δίδεται απότην:

$$P(A_2 \mid A_0) = P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_0 A_1) + P(A_1' \mid A_0)P(A_2 \mid A_0 A_1')$$

και επειδή $P(A_2 \mid A_0 A_1) = P(A_2 \mid A_1)$, $P(A_2 \mid A_0 A_1') = P(A_2 \mid A_1')$,

$$P(A_2 \mid A_0) = P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_1) + P(A_1' \mid A_0)P(A_2 \mid A_1')$$
$$= 0{,}98 \cdot 0{,}98 + 0{,}02 \cdot 0{,}03 = 0{,}961 .$$

(β) Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_2' \mid A_0)$, λήψης από το δέκτη του σήματος 1 δεδομένης της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, δίδεται από την

$$P(A_2' \mid A_0) = 1 - P(A_2 \mid A_0) = 1 - 0{,}961 = 0{,}039 .$$

## 8. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega$ και δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας συνάγουμε ότι (α) αν τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι ξένα μεταξύ τους, $AB = \varnothing$, τότε $P(B \mid A) = 0$, επειδή δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου $A$ αποκλείεται η πραγματοποίηση του ενδεχομένου $B$, ενώ (β) αν το ενδεχόμενο $A$ είναι υποενδεχόμενο του ενδεχομένου $B$, $A \subseteq B$, τότε $P(B \mid A) = 1$, επειδή η πραγματοποίηση του ενδεχομένου $A$ συνεπάγεται την πραγματοποίηση και του ενδεχομένου $B$. Αυτές είναι οι δύο ακραίες περιπτώσεις όπου η γνώση της πραγματοποίησης του ενδεχομένου $A$ μας παρέχει μία πολύ θετική πληροφορία για την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $B$. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες η γνώση της πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου $A$ δεν έχει καμμιά επίδραση στην πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου $B$, δηλαδή

$$P(B \mid A) = P(B) .$$

Στην περίπτωση αυτή το ενδεχόμενο $B$ καλείται στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου $A$. Επειδή, σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστικό τύπο, ισχύει

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) ,$$

στην περίπτωση που το ενδεχόμενο $B$ είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου $A$ έπεται ότι

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = P(A) ,$$

δηλαδή και το ενδεχόμενο $A$ είναι στοχαστικώς ανεξάρτητο του ενδεχομένου $B$ και επιπλέον

$$P(AB) = P(A)P(B) .$$

Με τη χρησιμοποίηση της τελευταίας αυτής σχέσης εισάγεται η έννοια της ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων. Συγκεκριμένα θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 8.1.** *Έστω $\Omega$ ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A, B \subseteq \Omega$. Τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ καλούνται στοχαστικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση*

$$P(AB) = P(A)P(B) . \tag{8.1}$$

**Παρατήρηση 8.1.** Αν δύο ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι ανεξάρτητα, τότε και τα ενδεχόμενα $A$ και $B'$ είναι ανεξάρτητα. Τούτο συνάγεται από το συνδυασμό των εξής παρατηρήσεων: (α) Η ανεξαρτησία των ενδεχομένων $A$ και $B$ συνεπάγεται ότι η γνώση της πραγματοποίησης του $A$ δεν επιδρά στην πραγματοποίηση ή μη του $B$ και (β) η πραγματοποίηση του $B$ αποκλείει την πραγματοποίηση του $B'$. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να διαπιστωθεί με τη χρησιμοποίηση των σχέσεων

$$P(AB') = P(A) - P(AB),\ P(B') = 1 - P(B)$$

και της υπόθεσης της ανεξαρτησίας των $A$ και $B$,

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

ως εξής:

$$P(AB') = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B').$$

Ανάλογα διαπιστώνεται ότι, στην περίπτωση αυτή, και τα ενδεχόμενα $A'$ και $B$, όπως επίσης και τα ενδεχόμενα $A'$ και $B'$, είναι ανεξάρτητα.

**Παράδειγμα 8.1.** Έστω ότι μία οικογένεια με 3 παιδιά επιλέγεται τυχαία. Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο $A$ όπως η επιλεγόμενη οικογένεια έχει παιδιά και των δύο φύλων και το ενδεχόμενο $B$ όπως έχει το πολύ ένα κορίτσι. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι ανεξάρτητα.

Παρατηρούμε ότι η τομή $AB$ είναι το ενδεχόμενο η επιλεγόμενη οικογένεια να έχει ακριβώς ένα κορίτσι. Εύκολα υπολογίζονται οι πιθανότητες:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8},\ P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4},\ P(B) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως ισχύει η σχέση (8.1) και τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι ανεξάρτητα.

Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Ας θεωρήσουμε αρχικά τρία ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$ και ας υποθέσουμε ότι είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα οπότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2), \\ P(A_1A_3) &= P(A_1)P(A_3), \\ P(A_2A_3) &= P(A_2)P(A_3). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Η ανεξαρτησία του $A_1$ τόσο από το $A_2$ όσο και από το $A_3$ δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την ανεξαρτησία του $A_1$ από την τομή $A_2A_3$ (βλ. παράδειγμα 8.2). Παρατηρούμε ότι αν, επιπλέον των (8.2), ισχύει και η σχέση

$$P[A_1(A_2A_3)] = P(A_1)P(A_2A_3), \tag{8.3}$$

τότε ισχύει και η σχέση

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \tag{8.4}$$

Αντίστροφα αν, επιπλέον των (8.2), ισχύει και η (8.4), τότε ισχύει και η (8.3), όπως επίσης και οι σχέσεις

$$P[A_2(A_1A_3)] = P(A_2)P(A_1A_3), \tag{8.5}$$

$$P[A_3(A_1A_2)] = P(A_3)P(A_1A_2). \tag{8.6}$$

Μετά τις προκαταρκτικές αυτές παρατηρήσεις θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων.

**Ορισμός 8.2.** *Έστω $\Omega$ ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού (τυχαίου) πειράματος (ή φαινομένου) και $A_1, A_2, ..., A_\nu \subseteq \Omega$. Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ καλούνται (αμοιβαίως ή πλήρως) στοχαστικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις*

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_\kappa}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_\kappa}) \tag{8.7}$$

*για κάθε συνδυασμό $\{i_1, i_2, ..., i_\kappa\}$ των $\nu$ δεικτών $\{1, 2, ..., \nu\}$ ανά $\kappa$ και για κάθε $\kappa = 2, 3, ..., \nu$.*

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, για την ανεξαρτησία $\nu = 3$ ενδεχομένων απαιτείται να ισχύουν οι σχέσεις (8.2) και (8.4).

**Παράδειγμα 8.2.** *Κατά ζεύγη αλλά όχι πλήρως ανεξάρτητα ενδεχόμενα.* Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους κύβου και έστω $A_1$ το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στην πρώτη ρίψη, $A_2$ το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στη δεύτερη ρίψη και $A_3$ το ενδεχόμενο το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις δύο ρίψεις να είναι άρτιος αριθμός. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα $A_1, A_2$ και $A_3$ είναι ανεξάρτητα.

Ο δειγματικός χώρος $\Omega$ του τυχαίου πειράματος των δύο ρίψεων του κύβου περιλαμβάνει $N(\Omega) = 6^2 = 36$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία, που είναι οι διατάξεις των 6 αριθμών (εδρών) $\{1, 2, ..., 6\}$ ανά 2 με επανάληψη. Επίσης

$$A_1 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(4,1),(4,2),(4,3),$$
$$(4,4),(4,5),(4,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\},$$
$$A_2 = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),$$
$$(4,2),(4,4),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6),(6,2),(6,4),(6,6)\},$$
$$A_3 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),$$
$$(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

και

$$A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3 = A_1A_2A_3$$
$$= \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

και έτσι

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \;\; P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), \;\; P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

ενώ

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)\,.$$

Επομένως τα ενδεχόμενα $A_1, A_2$ και $A_3$ είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα ενώ δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα.

**Παράδειγμα 8.3.** Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τριών ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος. Έστω $A_j$ το ενδεχόμενο της εμφάνισης στην $j$ ρίψη της όψης κεφαλή (κορώνα), $j = 1,2,3$. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα $A_1, A_2$ και $A_3$ είναι ανεξάρτητα.

Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο

$$\Omega = \{(\gamma,\gamma,\gamma),\ (\gamma,\gamma,\kappa),\ (\gamma,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\gamma,\gamma),\ (\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}$$

και

$$A_1 = \{(\kappa,\gamma,\gamma),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,$$

$$A_2 = \{(\gamma,\kappa,\gamma),\ (\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}$$

$$A_3 = \{(\gamma,\gamma,\kappa),\ (\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,.$$

Επίσης

$$A_1A_2 = \{(\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,\ A_1A_3 = \{(\kappa,\gamma,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,$$

$$A_2A_3 = \{(\gamma,\kappa,\kappa),\ (\kappa,\kappa,\kappa)\}\,,\ A_1A_2A_3 = \{(\kappa,\kappa,\kappa)\}\,.$$

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{8}$$

και έτσι

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2),\ \ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)\,,\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)\,,$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\,.$$

Επομένως τα ενδεχόμενα $A_1, A_2$ και $A_3$ είναι πλήρως ανεξάρτητα.

## 9. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΔΟΚΙΜΕΣ

Η έννοια των ανεξαρτήτων δοκιμών ενός τυχαίου πειράματος αποτελεί βασικό στοιχείων των περισσοτέρων στοχαστικών προτύπων (μοντέλων) που μελετά η Θεωρία των Πιθανοτήτων. Για την εισαγωγή της έννοιας αυτής ας θεωρήσουμε αρχικά δύο τυχαία πειράματα με δειγματικούς χώρους $\Omega_1$ και $\Omega_2$. Η διαδοχική (ή και ταυτόχρονη) εκτέλεση των δύο αυτών τυχαίων πειραμάτων ορίζει ένα (*διδιάστατο*) *σύνθετο τυχαίο πείραμα*. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για τη μελέτη του τυχαίου αυτού πειράματος είναι το καρτεσιανό (ή συνδυαστικό) γινόμενο

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\}\,.$$

Ένα διδιάστατο σύνθετο τυχαίο πείραμα το οποίο συνίσταται στη διαδοχική εκτέλεση ενός τυχαίου πειράματος με δειγματικό χώρο $\Omega$ καλείται ειδικότερα *ακολουθία δύο δοκιμών* του τυχαίου αυτού πειράματος. Στην ειδική αυτή περίπτωση, στην οποία $\Omega_1 = \Omega$ και $\Omega_2 = \Omega$, ο δειγματικός χώρος είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega$ με τον εαυτό του,

$$\Omega^2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \Omega,\ i = 1, 2\}.$$

Ας θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega_i$), $i = 1, 2$. Το ενδεχόμενο αυτό ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega_1 \times \Omega_2$, του συνθέτου πειράματος, εκφράζεται από το σύνολο $B_i \in\subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, $i = 1, 2$, όπου $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$. Τα ενδεχόμενα $B_1$ και $B_2$ αναφέρονται ως ενδεχόμενα εξαρτώμενα από το πρώτο και δεύτερο τυχαίο πείραμα, αντίστοιχα. Ειδικότερα, στην περίπτωση που $\Omega_1 = \Omega$ και $\Omega_2 = \Omega$ τα ενδεχόμενα $B_1$ και $B_2$ αναφέρονται ως ενδεχόμενα εξαρτώμενα από την πρώτη και δεύτερη δοκιμή του τυχαίου πειράματος, αντίστοιχα. Η πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου $B_i$ εξαρτάται αποκλειστικά από το αποτέλεσμα του $i$-οστού πειράματος (ή της $i$-οστής δοκιμής), $i = 1, 2$. Η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μεταφέρεται και σε τυχαία πειράματα και κατά συνέπεια και σε δοκιμές τυχαίου πειράματος. Συγκεκριμένα έχουμε:

*Δύο τυχαία πειράματα με δειγματικούς χώρους $\Omega_1$ και $\Omega_2$ καλούνται ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει η σχέση*

$$P(B_1 B_2) = P(B_1) P(B_2) \tag{9.1}$$

*για κάθε $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$ ενδεχόμενα (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega_1 \times \Omega_2$) εξαρτώμενα από το πρώτο και δεύτερο τυχαίο πείραμα, αντίστοιχα.*

Η σημασία των ανεξαρτήτων τυχαίων πειραμάτων και ειδικότερα των ανεξαρτήτων δοκιμών τυχαίου πειράματος, έγκειται κυρίως στο ότι δύνανται να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή χρησίμων στοχαστικών προτύπων (μοντέλων). Στην περίπτωση αυτή δεν αρχίζει κάποιος ορίζοντας αξιωματικά την πιθανότητα $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ και μετά εξετάζοντας κατά πόσον ικανοποιείται η σχέση (9.1) διαπιστώνει την ανεξαρτησία των τυχαίων πειραμάτων (ή των δοκιμών του τυχαίου πειράματος). Αντίθετα μάλιστα, ορίζονται πρώτα οι πιθανότητες $P_i(A_i)$ για κάθε ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ $i = 1, 2$ και μετά υποθέτοντας ότι τα τυχαία πειράματα είναι ανεξάρτητα ορίζεται η πιθανότητα $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (9.1). Σημειώνουμε ότι, από πρακτική άποψη, η υπόθεση της ανεξαρτησίας των τυχαίων πειραμάτων διατυπώνεται μετά την εξέταση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται και σύμφωνα με τα αποτελέσματα σειράς παρατηρήσεων.

Ο ορισμός της πιθανότητας $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ μέσω των πιθανοτήτων $P_i(A_i)$ για κάθε ενδεχόμενο $A_i \subseteq \Omega_i$ $i = 1, 2$, στην περίπτωση που υποθέτουμε ότι τα τυχαία πειράματα είναι ανεξάρτητα, επιτυγχάνεται ως εξής: Αρχικά, χρησιμοποιώντας την (9.1), ορίζεται η πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{(\omega_1, \omega_2)\}$ του δειγματικού χώρου $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\}) P_2(\{\omega_2\}).$$

Η πιθανότητα $P(B)$ για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$, ορίζεται τότε, μέσω της πιθανότητας των στοιχειωδών ενδεχομένων, από τη σχέση

$$P(B) = \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in B} P(\{(\omega_1,\omega_2)\}).$$

Παρατηρούμε ότι αν $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ και $B_2 = \Omega_1 \times A_2$, τότε

$$P(B_1) = P_1(A_1),\ P(B_2) = P_2(A_2).$$

Επίσης

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)$$

και έτσι

$$P(B_1 B_2) = P(B_1)P(B_2).$$

Οι ανωτέρω έννοιες και συμπεράσματα επεκτείνονται, χωρίς καμμιά περαιτέρω δυσκολία, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό $\nu$ τυχαίων πειραμάτων (ή δοκιμών τυχαίου πειράματος).

**Παράδειγμα 9.1.** Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία 5 ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε 2 τουλάχιστο ρίψεις ο αριθμός που εμφανίζει ο δεύτερος κύβος υπερβαίνει τον αριθμό που εμφανίζει ο πρώτος κύβος.

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων με δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{(i,j):\ i = 1,2,...,6,\ j = 1,2,...,6\},$$

ο οποίος περιλαμβάνει $N(\Omega) = 6^2 = 36$ ισοπίθανα δειγματικά σημεία. Το ενδεχόμενο $A$ όπως ο αριθμός που εμφανίζει ο δεύτερος κύβος υπερβαίνει τον αριθμό που εμφανίζει ο πρώτος κύβος,

$$A = \{(i,j):\ j = i+1, i+2,...,6,\ i = 1,2,...,6\},$$

περιλαμβάνει $N(A) = 15$ δειγματικά σημεία. Χαρακτηρίζοντας ως επιτυχία $\varepsilon$ το ενδεχόμενο $A$ και ως αποτυχία $\alpha$ το συμπληρωματικό ενδεχόμενο $A'$, ο δειγματικός χώρος $\Omega$ δύναται να παρασταθεί ως $\Omega_1 = \{\alpha, \varepsilon\}$. Τότε

$$p = P_i(\{\varepsilon\}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12},\ q = P_i(\{\alpha\}) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Περαιτέρω, ο δειγματικός χώρος του τυχαίου πειράματος μιας ακολουθίας 5 ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων είναι το

$$\Omega_5 = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5): \omega_i \in \{\alpha,\varepsilon\},\ i = 1,2,3,4,5\}.$$

Το ενδεχόμενο $B$ πραγματοποίησης $\kappa$ επιτυχιών σε 5 ρίψεις (δοκιμές):

$$B = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5): \omega_i = \varepsilon \text{ για } \kappa \text{ ακριβώς δείκτες } i \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

περιλαμβάνει

$$\binom{5}{\kappa}$$

δειγματικά σημεία, όσα και ο αριθμός των επιλογών των $\kappa$ θέσεων για τις επιτυχίες από τις 5 συνολικά θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο δειγματικό σημείο, το οποίο περιλαμβάνει σε $\kappa$ θέσεις το $\varepsilon$ και σε $5-\kappa$ θέσεις το $\alpha$, έχει πιθανότητα

$$P(\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\})P_3(\{\omega_3\})P_4(\{\omega_4\})P_5(\{\omega_5\})$$

$$= \left(\frac{5}{12}\right)^{\kappa}\left(\frac{7}{12}\right)^{5-\kappa}.$$

Επομένως η πιθανότητα $p_\kappa = P(B)$ δίδεται από την

$$p_\kappa = \binom{5}{\kappa}\left(\frac{5}{12}\right)^{\kappa}\left(\frac{7}{12}\right)^{5-\kappa}, \ \kappa = 0,1,\ldots,5.$$

Η πιθανότητα όπως σε 2 τουλάχιστο ρίψεις ο αριθμός που εμφανίζει ο δεύτερος κύβος υπερβαίνει τον αριθμό που εμφανίζει ο πρώτος κύβος, έστω $Q_2$, η οποία είναι ίση με την πιθανότητα 2 τουλάχιστο επιτυχιών, είναι ίση με

$$Q_2 = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \left(\frac{7}{12}\right)^5 - 5\frac{5}{12}\left(\frac{7}{12}\right)^4 = 1 - 0{,}0675 - 0{,}2412 = 0{,}6913.$$

**Παράδειγμα 9.2.** *Νόμος κληρονομικότητας του Mendel.* Η κληρονομικότητα χαρακτηριστικών οφείλεται σε ειδικούς φορείς καλουμένους γονίδια. Τα κύτταρα ενός οργανισμού, με εξαίρεση τους γαμέτες που είναι τα κύτταρα αναπαραγωγής (σπέρμα ή ωάριο), φέρουν γονίδια κατά ζεύγη τα οποία είναι είτε του τύπου $A$ είτε του τύπου $\alpha$. Έτσι ανάλογα με τα ζεύγη των γονιδίων που φέρουν τα κύτταρα κάθε οργανισμός ανήκει σε ένα από τους τρεις γονότυπους $AA$, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ (δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των $A\alpha$ και $\alpha A$). Οι γαμέτες φέρουν ένα μόνο γονίδιο που στην περίπτωση των γονοτύπων $AA$ και $\alpha\alpha$ είναι του τύπου $A$ και $\alpha$, αντίστοιχα, ενώ στην περίπτωση του γονοτύπου $A\alpha$ είναι εξίσου πιθανόν να είναι του τύπου $A$ ή του τύπου $\alpha$. Τα παιδιά κληρονομούν από τους γονείς τους τα γονίδια ένα από τον καθένα. Έστω ότι οι γονότυποι $AA$, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ εμφανίζονται σε ποσοστά $p$, $2q$ και $r$, αντίστοιχα, με $p+2q+r=1$ ανεξάρτητα φύλου.

Οι πιθανότητες των τριών γονοτύπων $AA$, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ για οποιονδήποτε απόγονο γονέων που εκλέγονται τυχαία δύνανται να υπολογισθούν ως εξής: Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A_1, A_2$ και $A_3$ όπως ένα αρσενικό άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον αρχικό πληθυσμό είναι του γονοτύπου $AA$, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$, αντίστοιχα και τα ενδεχόμενα $B_1, B_2$ και $B_3$ όπως ένα θηλυκό άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον αρχικό πληθυσμό είναι του γονοτύπου $AA$, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$, αντίστοιχα. Επίσης ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ όπως ένας απόγονος ζευγαρώματος δύο ατόμων (αρσενικού και θηλυκού) του αρχικού πληθυσμού κληρονομήσει το γονίδιο $A$ από τον πατέρα και τη μητέρα, αντίστοιχα. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) = p\cdot 1 + 2q\frac{1}{2} = p+q$$

και

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - (p+q) = q + r,$$

εφ' όσον $p+2q+r=1$. Ομοίως

$$P(B) = p+q, \ P(B') = q+r.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα και τα ενδεχόμενα $\Gamma_1, \Gamma_2$ και $\Gamma_3$ όπως ένας απόγονος ζευγαρώματος δύο ατόμων (αρσενικού και θηλυκού) του αρχικού πληθυσμού είναι του γονοτύπου *AA*, *Aα* και *αα*, αντίστοιχα. Τότε $\Gamma_1 = AB$, $\Gamma_2 = AB' + A'B$ και $\Gamma_3 = A'B'$. Τα ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα, οπότε τόσο τα ενδεχόμενα *A* και $B'$ όσο και τα ενδεχόμενα $A'$ και *B* και τα ενδεχόμενα $A'$ και $B'$ είναι ανεξάρτητα (βλ. Παρατήρηση 8.1). Επομένως

$$P(\Gamma_1) = P(AB) = P(A)P(B) = (p+q)^2,$$

$$P(\Gamma_2) = P(AB' + A'B) = P(AB') + P(A'B)$$

$$= P(A)P(B') + P(A')P(B) = 2(p+q)(q+r),$$

$$P(\Gamma_3) = P(A'B') = P(A')P(B') = (q+r)^2.$$

**Παράδειγμα 9.3.** *Κληρονομικότητα χαρακτηριστικών συνδεομένων με το φύλο.* Τα γονίδια κείνται στα χρωματοσώματα. Τα χρωματοσώματα εμφανίζονται κατά ζεύγη και μεταβιβάζονται ως (αδιαίρετες) μονάδες έτσι ώστε τα γονίδια ενός χρωματοσώματος να παραμένουν μαζί. Ο νόμος κληρονομικότητας των γονιδίων εφαρμόζεται και στα χρωματοσώματα ως μονάδες. Το φύλο καθορίζεται από δύο χρωματοσώματα *X* και *Y* και κάθε άτομο φέρει ένα ζεύγος τέτοιων χρωματοσωμάτων. Τα αρσενικά φέρουν το ζεύγος *XY* και θηλυκά το ζεύγος *XX*. Έτσι η μητέρα μεταβιβάζει ένα *X* χρωματόσωμα και το φύλο ενός απογόνου καθορίζεται από το χρωματόσωμα *X* ή *Y* που μεταβιβάζει ο πατέρας.

Τα γονίδια που κείνται στο χρωματόσωμα *X* δεν έχουν αντίστοιχο γονίδιο στο χρωματόσωμα *Y*. Έτσι τα θηλυκά, τα οποία έχουν δύο χρωματοσώματα *X*, έχουν δύο τέτοια γονίδια ενώ στα αρσενικά, τα οποία έχουν ένα χρωματόσωμα *X*, τέτοια γονίδια εμφανίζονται ως μονά. Τα γονίδια που προκαλούν την αχρωματοψία, όπως και τα γονίδια που προκαλούν την αιμοφιλία, αποτελούν χαρακτηριστικά παρα-δείγματα γονιδίων κειμένων στο χρωματόσωμα *X*. Έστω *C* ο δεσπόζων και *c* ο υποχωρητικός τύπος του γονιδίου της αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας). Τα θηλυκά ανήκουν σε ένα από τους τρεις γονοτύπους *CC*, *Cc* και *cc*, ενώ τα αρσενικά σε ένα από τους δύο γονοτύπους *C* και *c*. Ένα θηλυκό του γονότυπου *CC* δεν παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία), του γονοτύπου *Cc* είναι φορέας αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας) και γονοτύπου *cc* παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία). Επίσης, ένα αρσενικό του γονότυπου *C* δεν παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία), και του γονοτύπου *c* παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία).

Έστω *p* το ποσοστό του δεσπόζοντος τύπου *C* και $q = 1 - p$ το ποσοστό του υποχωρητικού τύπου *c* του γονιδίου της αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας), τόσο στα αρσενικά όσο και στα θηλυκά άτομα. Τότε η πιθανότητα ένας άνδρας να μη παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία) είναι ίση με *p* ενώ να παρουσιάζει αχρωματοψία (ή αιμοφιλία) είναι ίση με $q = 1 - p$. Οι πιθανότητες *u*, *2v* και *w* των τριών γονοτύπων *CC*, *Cc* και *cc* του γονιδίου της αχρωματοψίας (ή αιμοφιλίας) στο γυναικείο πληθυσμό, αντίστοιχα, δύνανται να υπολογισθούν ως εξής: Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A_1$ και $A_2$ όπως ένα άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον υποπληθυσμό των αρσενικών είναι του γονοτύπου *C* και *c*, αντίστοιχα και τα ενδεχόμενα $B_1, B_2$ και $B_3$ όπως ένα άτομο το οποίο εκλέγεται τυχαία από τον υποπληθυσμό των θηλυκών είναι του γονοτύπου *CC*, *Cc* και *cc*, αντίστοιχα. Επίσης ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα *A* και *B* όπως ένας θηλυκός απόγονος ζευγαρώματος δύο ατόμων (αρσενικού και θηλυκού) του αρχικού πληθυσμού κληρονομήσει το γονίδιο $C$ από τον πατέρα και τη μητέρα, αντίστοιχα. Τότε

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) = p \cdot 1 = p$$

και

$$P(A') = 1 - P(A) = q\ .$$

Επίσης, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(B) = P(B_1)P(B \mid B_1) + P(B_2)P(B \mid B_2) = u \cdot 1 + 2v\frac{1}{2} = u + v$$

και

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - (u + v) = v + w,$$

εφ' όσον $u + 2v + w = 1$. Παρατηρούμε ότι $B_1 = AB$, $B_2 = AB' + A'B$ και $B_3 = A'B'$. Επίσης τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ είναι ανεξάρτητα, οπότε τόσο τα ενδεχόμενα $A$ και $B'$ όσο και τα ενδεχόμενα $A'$ και $B$ και τα ενδεχόμενα $A'$ και $B'$ είναι ανεξάρτητα. Επομένως

$$u = P(B_1) = P(AB) = P(A)P(B) = p(u + v),$$

$$2v = P(B_2) = P(AB' + A'B) = P(AB') + P(A'B)$$

$$= P(A)P(B') + P(A')P(B) = p(v + w) + q(u + v),$$

$$w = P(B_3) = P(A'B') = P(A')P(B') = q(v + w).$$

Οι δύο πρώτες σχέσεις, χρησιμοποιώντας το ότι $q = 1 - p$ και $v + w = 1 - (u + v)$, μετασχηματίζονται στις

$$qu = pv\ ,\ (2p - 1)u + (2p + 1)v = p$$

και έτσι

$$u = p^2\ ,\ v = pq\ ,\ w = q^2\ .$$

Ας σημειωθεί ότι η πιθανότητα $w$ όπως μια γυναίκα παρουσιάζει αχρωματοψία είναι ίση με το τετράγωνο πιθανότητας $q$ όπως ένας άνδρας παρουσιάζει αχρωματοψία.

## 10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Η σειρά εξέτασης τεσσάρων μαθημάτων $\alpha, \beta, \gamma$ και $\delta$ καθορίζεται με κλήρωση για την αποφυγή διαμαρτυριών είτε από τους εξεταζόμενους είτε από τους επιτηρητές. Να ορισθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για την περιγραφή του τυχαίου αυτού πειράματος. Έστω ότι $A$ είναι το ενδεχόμενο το μάθημα $\alpha$ να εξετασθεί πρώτο και $B$ το ενδεχόμενο το μάθημα $\beta$ να εξετασθεί δεύτερο. Να καταχωρηθούν τα δειγματικά σημεία των ενδεχομένων $A, B, A \cup B$ και $A \cap B$.

**2.** Κατά την τυχαία εκλογή μιας οικογένειας 4 παιδιών ενδιαφερόμαστε για τα ενδεχόμενα: $A$ όπως ο αριθμός των αγοριών ισούται με τον αριθμό των κοριτσιών, $B$ όπως αγόρια και κορίτσια εναλλάσσονται (αναφορικά με τη σειρά γέννησης) και $\Gamma$ όπως τρία παιδιά του ιδίου φύλου γεννούνται διαδοχικά. Ποιος είναι ο καταλληλότερος δειγματικός χώρος $\Omega$ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και ποια τα δειγματικά σημεία που ανήκουν σε κάθε ένα από τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν.

**3.** Έστω ότι δύο παίκτες $\alpha$ και $\beta$ αγωνίζονται σε μια σειρά παιγνιδιών (π.χ. σκάκι, τάβλι, τένις) και νικητής αναδεικνύεται εκείνος που πρώτος κερδίζει τρία παιγνίδια. Να ορισθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος $\Omega$ για την περιγραφή του τυχαίου αυτού πειράματος. Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ όπως ο παίκτης $\alpha$ αναδειχθεί νικητής στο τρίτο και στο τέταρτο παιγνίδι της σειράς, αντιστοχα. Να καταχωρηθούν τα δειγματικά σημεία των ενδεχομένων $A$, $B$, $A \cup B$ και $A \cap B$.

**4.** Έστω ότι ένας αριθμός τηλεφώνου εκλέγεται τυχαία από τον τηλεφωνικό κατάλογο. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως και τα τέσσερα τελευταία ψηφία του είναι διαφορετικά.

**5.** *Αποβιβάσεις ανελκυστήρα.* Έστω ότι ανελκυστήρας πενταόροφης οικοδομής ξεκινά από το ισόγειο με τέσσερα άτομα. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες αποβίβασης (α) και των τεσσάρων ατόμων σε διαφορετικό όροφο, (β) δύο ατόμων στον τρίτο όροφο, ενός ατόμου στον τέταρτο όροφο και ενός ατόμου στον πέμπτο όροφο και (γ) δύο ατόμων στον τρίτο όροφο.

**6.** *Διάδοση ψιθύρων.* Σε μια πόλη $\nu+1$ κατοίκων ένα άτομο μεταδίδει ένα κουτσομπολιό σε ένα δεύτερο άτομο, το οποίο το μεταδίδει σε ένα τρίτο κ.ο.κ. Κάθε άτομο στο οποίο μεταδίδεται το κουτσομπολιό εκλέγεται από το ψιθυριστή τυχαία μεταξύ των $\nu$ κατοίκων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να μεταδοθεί το κουτσομπολιό χωρίς (α) να επιστρέψει στον πρώτο ψιθυριστή και (β) να επαναληφθεί σε οποιοδήποτε άτομο.

**7.** Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο $\kappa+1$ ατόμων $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το άτομο $\alpha_0$ έχει γενέθλια την ίδια μέρα με ένα τουλάχιστο από τα υπόλοιπα $\kappa$ άτομα $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$.

**8.** Έστω ότι μέσα σε $\nu$ διακεκριμένα κελιά $\{c_1, c_2, ..., c_\nu\}$ τοποθετούνται τυχαία το ένα μετά το άλλο σφαιρίδια. Αν η διαδικασία αυτή σταματά (α) όταν τοποθετηθεί ένα σφαιρίδιο στο κελί $c_\nu$ και (β) όταν σε ένα οποιοδήποτε κελί τοποθετηθούν δύο σφαιρίδια, να υπολογισθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες όπως απαιτηθούν περισσότερες από $\kappa$ δοκιμές.

**9.** *Το πρόβλημα του Γαλιλαίου.* Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης τριών κύβων και τα ενδεχόμενα $A$ και $B$ όπως το άθροισμα των ενδείξεων τούτων είναι 9 10 αντίστοιχα. Ένας παρατηρητικός φίλος του Γαλιλαίου διέκρινε ότι η συχνότητα εμφάνισης του ενδεχοένου $A$ είναι μικρότερη από εκείνη του $B$. Τούτο δεν μπορούσε να εξηγήσει σκεπτόμενος ότι καθ΄ένα από τα ενδεχόμενα αυτά περιέχει 6 σημεία:

$$1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3=9,$$

$$1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4=10.$$

Ο Γαλιλαίος στον οποίο απευθύνθηκε μετά από προσεκτική ανάλυση υπολόγισε ορθά τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ απ' όπου προέκυψε ότι $P(A) < P(B)$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

**10.** Από τα $\nu$ κλειδιά που έχει κάποιος μόνο ένα ανοίγει την πόρτα του σπιτιού του. Επειδή δεν θυμάται ποιο είναι το σωστό κλειδί, δοκιμάζει ένα-ένα τα κλειδιά μέχρι να ανοίξει την πόρτα. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να απαιτηθούν $\kappa$ δοκιμές, $\kappa = 1, 2..., \nu$.

**11.** Έστω ότι τρία σφαιρίδια εξάγονται τυχαία το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, από μια κληρωτίδα που περιέχει $\nu$ σφαιρίδια αριθμημένα από το ένα μέχρι το $\nu$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) του ενδεχομένου $A$ όπως ο αριθμός του πρώτου σφαιριδίου είναι μικρότερος από εκείνο του δευτέρου και (β) του ενδεχομένου $B$ όπως όπως ο αριθμός του πρώτου σφαιριδίου είναι μικρότερος από εκείνο του δευτέρου και ο αριθμός του δευτέρου σφαιριδίου είναι μικρότερος από εκείνο του τρίτου.

**12.** Ας θεωρήσουμε ένα τραπέζι το οποίο είναι χωρισμένο σε ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\alpha$. Ένα νόμισμα διαμέτρου $r$ με $r < \alpha$ τοποθετείται τυχαία στο τραπέζι. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως το νόμισμα κείται στο εσωτερικό τριγώνου.

**13.** Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός στοχαστικού πειράματος. Αν $P(\{\omega_i\}) = 2P(\{\omega_{i+1}\})$, $i = 1, 2, ..., \nu - 1$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων $P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, ..., \nu$. Επιπλέον να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}$, $\kappa \leq \nu$.

**14.** Έστω $\Omega$ ο δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος και $A \subseteq \Omega$, ένα ενδεχόμενο σ'αυτόν. Αν $A'$ είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου $A$ και ισχύει $P(A') = 2P(A) + 1/5$ να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A)$.

**15.** (*Συνέχεια*). Αν $3P(A') = 4P(A)$, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(A)$.

**16.** (*Συνέχεια*). Αν $0 < P(A) < 1$, να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{P(A)} + \dfrac{1}{P(A')} \geq 4$.

**17.** Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία τριών ρίψεων ενός κύβου και έστω $A$ το ενδεχόμενο όπως το άθροισμα των ενδείξεων είναι μεγαλύτερο του 10. Δείξετε ότι το ενδεχόμενο $A$ και το συμπληρωματικό του ενδεχόμενο $A'$ είναι ισοδύναμα σύνολα και χρησιμοποιώντας το ότι $N(A) = N(A')$ συμπεράνετε την πιθανότητα $P(A)$.

**18.** Ας θεωρήσουμε το δειγματικό χώρο $\Omega$ ενός στοχαστικού πειράματος και έστω $A, B \subseteq \Omega$ ενδεχόμενα με

$$2P(A) = 3P(B) = 4P(AB)\,,\ P(B - A) = 1/2\,.$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(AB)$ και στη συνέχεια οι πιθανότητες $P(A - B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup B')$, $P(AB' \cup A'B)$.

**19.** Αν $P(A) = 3/4$, $P(B) = 2/3$ και $P(AB) = 3/5$ να υπολογισθούν οι πιθανότητες: $P(A - B)$, $P(A \cup B)$ και $P(A'B')$.

**20.** Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα 5 διαδοχικών ρίψεων δύο διακεκριμένων κύβων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως κάθε ένα από τα ζεύγη $(5,6)$ $(6,5)$ και $(6,6)$ εμφανισθεί μία τουλάχιστο φορά.

**21.** Ας θεωρήσουμε ένα πομπό ο οποίος εκπέμπει με την ίδια αναλογία τα σήματα $\sigma_1$, $\sigma_2$ και $\sigma_3$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες όπως σε 5 εκπομπές παρατηρηθούν μια τουλάχιστον φορά το καθένα (α) τα σήματα $\sigma_1$ και $\sigma_2$ και (β) και τα τρία σήματα $\sigma_1$, $\sigma_2$ και $\sigma_3$.

**22.** Από μια κάλπη που περιέχει $\nu$ άσπρα και $\nu$ μαύρα σφαιρίδια εξάγονται διαδοχικά και χωρίς επανάθεση δύο σφαιρίδια κάθε φορά μέχρι να εξαχθούν όλα τα σφαιρίδια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως όλα τα ζευγάρια αποτελούνται από ένα άσπρο και ένα μαύρο σφαιρίδιο.

**23.** Οι εταιρείες ασφάλισης αυτοκινήτων κατατάσσουν τους οδηγούς σε 10 κατηγορίες ανάλογα με την πιθανότητα που έχουν να προκαλέσουν δυστύχημα. Έστω ότι η πιθανότητα όπως ένας οδηγός της κατηγορίας $\kappa$ έχει σε ένα δωδεκάμηνο ένα τουλάχιστο δυστύχημα είναι $\kappa/100$, $\kappa = 1,2,...,10$. Ας θεωρήσουμε μία ασφαλιστική εταιρεία στην οποία τα $\kappa/55$ των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην $\kappa$ κατηγορία $\kappa = 1,2,...,10$. Αν ένας οδηγός ασφαλισμένος στην εταιρεία αυτή αναφέρει ένα τουλάχιστο δυστύχημα σε ένα δωδεκάμηνο ποιά είναι η πιθανότητα να ανήκει στην $\kappa$ κατηγορία, $\kappa = 1,2,...,10$;

**24.** Έστω ότι το ποσοστό των γυναικών μιας ορισμένης περιοχής που πάσχουν από καρκίνο της μήτρας είναι 0,001. Το τεστ Παπανικολάου κάνει ορθή διάγνωση της ασθένειας με πιθανότητα 0,97. Δεδομένου ότι το τεστ για μια γυναίκα είναι θετικό ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει πραγματικά από καρκίνο;

**25.** Έστω ότι 7% των ανδρών και 2% των γυναικών πάσχουν από αχρωματοψία. Αν το 48% του πληθυσμού αυτού είναι άνδρες και το 52% είναι γυναίκες να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως ένα άτομο που εκλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό να έχει αχρωματοψία.

**26.** Έστω ότι το 50% των γυναικών έχουν το γονίδιο της αιμοφιλίας. Αν μία γυναίκα έχει το γονίδιο η πιθανότητα να το κληρονομήσει στο παιδί της είναι 1/2. Να δειχθεί ότι η πιθανότητα μια γυναίκα να έχει το γονίδιο της αιμοφιλίας δεδομένου ότι απέκτησε υγιή γιό ελαττώνεται κατά 1/3.

**27.** Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη διαδρομή η πιθανότητα όπως οποιοδήποτε φανάρι της τροχαίας να είναι του ιδίου χρώματος με το προηγούμενο είναι 4/5. Αν το πρώτο φανάρι είναι πράσινο με πιθανότητα 3/5 και κόκκινο με πιθανότητα 2/5 να υπολογισθεί η πιθανότητα το τρίτο φανάρι να είναι πράσινο.

**28.** Από μια κληρωτίδα που περιέχει 21 σφαιρίδια φέροντα τους αριθμούς $\{1,2,...,21\}$ εξάγονται διαδοχικά και χωρίς επανάθεση τρία σφαιρίδια. Αν $A_\kappa$ είναι το ενδεχόμενο εξαγωγής αριθμού πολλαπλασίου του 3 στην $\kappa$-οστή εξαγωγή, $\kappa = 1,2,3$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A_2')$, $P(A_1 \mid A_2)$ και $P(A_3)$.

**29.** Ας θεωρήσουμε ένα τηλεπικοινωνικό σύστημα αποτελούμενο από έναν πομπό, $\kappa$ αναμεταδότες και ένα δέκτη. Ο πομπός στέλλει τα σήματα στο δυαδικό σύστημα, στο οποίο τα γράμματα του αλφαβήτου είναι ακολουθίες από 0 και 1. Οι αναμεταδότες και ο δέκτης, λόγω θορύβου, λαμβάνουν το σήμα 0 ως σήμα 1 με πιθανότητα 0,03 και το σήμα 1 ως σήμα 0 με πιθανότητα 0,05. Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες λήψης από το δέκτη (α) του σήματος 0 και (β) του σήματος 1 δεδομένης, σε αμφότερες τις περιπτώσεις, της αποστολής από τον πομπό του σήματος 1.

**30.** Ας θεωρήσουμε έναν πομπό ο οποίος εκπέμπει τα σήματα 0 και 1 σε αναλογία 2 προς 3. Ένας δέκτης των σημάτων αυτών λαμβάνει λανθασμένο σήμα σε 3% των περιπτώσεων και ένας δεύτερος δέκτης σε 4% των περιπτώσεων. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) ο πρώτος δέκτης να λάβει το σήμα 0 και (β) ο δεύτερος δέκτης να λάβει το σήμα 1. (γ) Αν ο πρώτος δέκτης λάβει το σήμα 0 και ο δεύτερος δέκτης το σήμα 1, ποιόν από τους δέκτες πρέπει να εμπιστευθούμε; (δ) Αν ο πρώτος δέκτης λάβει το σήμα 1 και ο δεύτερος δέκτης το σήμα 0, ποιόν από τους δέκτες πρέπει να εμπιστευθούμε;

**31.** Έστω ότι ένα μόριο δύναται να χωρισθεί σε 0 ή 1 ή 2 μόρια με πιθανότητες 1/4, 1/2 και 1/4, αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε τα σύνολα των μορίων της πρώτης και της δεύτερης γενιάς προερχόμενα από το αρχικό μόριο, του προγεννήτορα. Αν $A_\kappa$ είναι το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των μορίων της πρώτης γενιάς είναι *κ*, $\kappa = 0,1,2$ και $B_r$ είναι το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των μορίων της δεύτερης γενιάς είναι *r*, $r = 0,1,\ldots,6$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(B_0)$, $P(B_1)$ και $P(A_2 \mid B_1)$.

**32.** Έστω ότι το ποσοστό των ατόμων μιας ορισμένης περιοχής που πάσχουν από μία σοβαρή ασθένεια είναι 0,01. Ένα άτομο υποβάλλεται σε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους τέστ καθένα από τα οποία κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0,95. Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες να πάσχει το άτομο (α) δεδομένου ότι ένα τουλάχιστο τέστ είναι θετικό και (β) δεδομένου ότι και τα δύο τέστ είναι θετικά.

**33.** Δύο σκοπευτές *α* και *β* ρίχνουν από μία βολή κατά στόχου. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής από τον *α* είναι 0,8 ενώ από τον *β* είναι 0,6. Αν μια από τις δύο σφαίρες κτυπήσει το στόχο, να υπολογισθεί η πιθανότητα να ανήκει στον *α*.

**34.** Στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος δύο φορές ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα όπως εμφανισθεί *A*: η ένδειξη κεφαλή μια τουλάχιστο φορά, *B*: στην πρώτη ρίψη η ένδειξη γράμματα και *Γ*: σε κάθε ρίψη διαφορετική ένδειξη. Υπολογίζοντας τις σχετικές πιθανότητες, δείξετε ότι

$$P(B \mid A) < P(B)\,,\; P(\Gamma \mid A) > P(\Gamma)\,,\; P(\Gamma \mid B) = P(\Gamma)\,.$$

**35.** Έστω ότι τα ενδεχόμενα $A_1$, $A_2$ και $A_3$ είναι ανεξάρτητα. Δείξετε ότι τα ενδεχόμενα (α) $A_1$ και $A_2 \cup A_3$, (β) $A_2$ και $A_1 \cup A_3$ και (γ) $A_3$ και $A_1 \cup A_2$ είναι ανεξάρτητα.

**36.** Αν $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ και $P(A \cup B) = 2/3$ να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα. Ομοίως αν $P(A) = 1/2$ $P(B) = 1/5$ και $P(A'B') = 3/5$.

**37.** Έστω ότι ένα νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά *κ* φορές. Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο *A* εμφάνισης και των δύο όψεων του νομίσματος και το ενδεχόμενο *B* εμφάνισης μια το πολύ φορά της όψης κεφαλή. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα.

**38.** Έστω ότι από μια κληρωτίδα που περιέχει 6 σφαιρίδια $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ εξάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο χωρίς επανάθεση όλα τα σφαιρίδια. Επίσης, έστω $A_1$ το ενδεχόμενο εξαγωγής του σφαιριδίου $\sigma_1$ πριν από την εξαγωγή του σφαιριδίου $\sigma_2$, $A_2$ το ενδεχόμενο εξαγωγής του σφαιριδίου $\sigma_3$ πριν από την εξαγωγή του σφαιριδίου $\sigma_4$ και $A_3$ το ενδεχόμενο εξαγωγής του σφαιριδίου $\sigma_5$ πριν από την εξαγωγή του σφαιριδίου $\sigma_6$. Να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα $A_1$, $A_2$ και $A_3$ είναι ανεξάρτητα.

**39**. Ας θεωρήσουμε έναν αρχικό πληθυσμό στον οποίο οι γονότυποι *AA*, *Aα* και *αα* εμφανίζονται σε ποσοστά *p*, 2*q* και *r* αντίστοιχα με $p + 2q + r = 1$ ανεξάρτητα φύλου. Έστω ότι καθένας από τους γονείς (πατέρας και μητέρα) κληρονομεί, σύμφωνα με το *νόμο κληρονομικότητας του Mendel*, σε κάθε παιδί του ένα από τα γονίδια $A$ και $\alpha$. Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα ο πατέρας να είναι του τύπου $A\alpha$ δεδομένου ότι το παιδί είναι του τύπου $AA$.

**40**. Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό στον οποίο ο λόγος του αριθμού των ανδρών προς τον αριθμό των γυναικών είναι $\theta$. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ένας άνδρας να παρουσιάζει αχρωματοψία είναι $q$, ενώ η πιθανότητα μια γυναίκα να παρουσιάζει αχρωματοψία είναι $q^2$ (βλ. Παράδειγμα 9.3). Έστω ότι ένα άτομο εκλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό αυτό. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων όπως το εκλεγόμενο άτομο (α) είναι γυναίκα παρουσιάζουσα αχρωματοψία και (β) παρουσιάζει αχρωματοψία.