ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο και $f(x,y)$ μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη στο D. Χωρίζουμε το D σε πεπερασμένο αριθμό από τετραγωνίσιμα χωρία D_i για τα οποία ισχύουν $D_i \subseteq D,\ D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i,\quad \mathring{D}_i \cap \mathring{D}_j = \varnothing\ \forall i \neq j$. (Διαμέριση του D)

Σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann $\rho(f, \Delta, E) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ της *f(x,y).*

(E= το σύνολο των ενδιάμεσων σημείων για την διαμέριση Δ)

Εάν $d = (\sup(D_i) : D_i \in \Delta)$, ονομάζουμε **διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης *f(x,y)*** το όριο όταν $d \to 0$ των αθροισμάτων Riemann πάνω στο χωρίο D.

Το D λέγεται το πεδίο ολοκλήρωσης.

Κριτήρια ολοκληρωσιμότητας:

Έστω μια συνάρτηση *f(x,y)* ορισμένη και φραγμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο τετραγωνίσιμο χωρίο D. Εαν είναι συνεχής σχεδόν παντού στο D, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο αυτό.

Κριτήριο του Lebesque : Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και φραγμένη σε ένα τετραγωνίσιμο χωρίο D. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο χωρίο αυτό αν και μόνο αν είναι συνεχής σχεδόν παντού στο D.

Αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε ένα τετραγωνίσιμο χωρίο D τότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε τετραγωνίσιμο υποσύνολο του D.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FUBINI

Έστω ότι η συνάρτηση *f(x,y)* είναι ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα $I = [a, \beta] \times [\gamma, \delta]$ και ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $J(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\ \forall x \in [\alpha, \beta]$.

Τότε, η J(x) είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β] και ισχύει

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx \right) dy$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

<u>Α) Ολοκλήρωση σε ορθογώνιο χωρίο :</u>

Εάν το χωρίο D είναι ένα κλειστό διάστημα $D=[a,\beta]\times[\gamma,\delta]$ τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f(x,y)dy\right)dx=\int_\gamma^\delta\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dx\right)dy,$$

εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη και τα ολοκληρώματα υπάρχουν.

<u>Πρόταση:</u> Εάν η συνάρτηση f(x) είναι ολοκληρώσιμη στο [α,β] και η g(y) είναι ολοκληρώσιμη στο [γ, δ] τότε και η f.g είναι ολοκληρώσιμη στο $I=[a,\beta]\times[\gamma,\delta]$ και ισχύει:

$$\iint_I f(x)g(y)dxdy=\int_a^\beta f(x)dx\int_\gamma^\delta g(y)dy$$