6 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

6.1 Ορισμοί

Συναρτήσεις

Γενικά, με τον όρο *συνάρτηση* εννοούμε μια απεικόνιση (αντιστοίχιση σύμφωνα με έναν κανόνα) από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο R, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του D να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του R. Τα D και R ονομάζονται *πεδίο ορισμού* και *πεδίο τιμών* αντίστοιχα και αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του ορισμού της συνάρτησης. Συνήθως τα D και R είναι σύνολα αριθμών (π.χ. ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα δισδιάστατο χωρίο). Μια συνάρτηση αποδίδεται με το συμβολισμό f: $X \to Y$ ή απλούστερα $y = f(x)$, όπου η *ανεξάρτητη* μεταβλητή x μπορεί να περιστάνει μία ή περισσότερες πραγματικές ή μιγαδικές μεταβλητές με y την αντίστοιχη τιμή της *εξαρτημένης μεταβλητής*. Η τιμή x απεικονίζεται *μονοσήμαντα* στην τιμή y.

Όρια

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x έχει όριο το L (ή τείνει στο L) όταν το x τείνει στο x_0, αν για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε η $0 < |x - x_0| < \delta$ να έπεται την $|f(x) - L| < \varepsilon$. Γενικά, το όριο συμβολίζεται με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Ο ορισμός ισχύει και για $x_0 = +\infty$ ή $-\infty$, εφόσον για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε η $x > M$ να έπεται την $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ τείνει στο $+\infty$ (στο $-\infty$) όταν το x τείνει στο x_0, αν για οποιοδήποτε θετικό (αρνητικό) αριθμό M υπάρχει αριθμός δ τέτοιος ώστε η $0 < |x - x_0| < \delta$ να έπεται την $f(x) > M$ $(f(x) < M)$.

Ιδιότητες των ορίων

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [af(x)] = a \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad [\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0]$$

Αξιοσημείωτα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x} = e \cong 2.71828\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x} = \ln c \qquad\qquad \lim_{x\to 0} x^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^a \ln x = \lim_{x\to\infty} x^{-a}\ln x = \lim_{x\to\infty} x^a e^{-x} = 0 \qquad [a>0]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x} = 1$$

Απροσδιόριστες μορφές

Ο υπολογισμός ορίων οδηγεί μερικές φορές σε εκφράσεις χωρίς σαφή σημασία, όπως οι $0/0$, ∞/∞, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$. Μια τέτοια έκφραση μπορεί να αναχθεί στην $0/0$ (με διαίρεση ή λογαρίθμιση) και να υπολογιστεί με τον ακόλουθο *κανόνα του L'Hôpital*:

Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες σ' ένα ανοικτό διάστημα (a, b) που περιλαμβάνει το x_0 και ότι $f(x_0) = g(x_0) = 0$, αλλά $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο του (a, b) εκτός ίσως από το x_0. Τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει. Το ίδιο ισχύει αν το x_0 είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

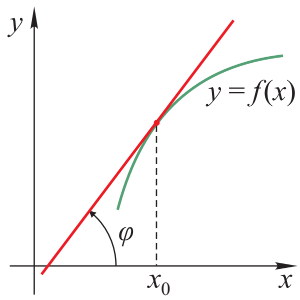
Παράγωγος

Αν $y = f(x)$, η *παράγωγος* της y ή της $f(x)$ ως προς x στο σημείο (x, y) ορίζεται με τη σχέση

$$y' = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

όπου $h = \Delta x$. Η παράγωγος συμβολίζεται ακόμα με $f'(x)$, dy/dx ή df/dx.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)$ σε ένα σημείο $x = x_0$ ισούται με την εφαπτόμενη της γωνίας φ που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο αυτό με τον άξονα x, δηλαδή $y' = \tan\varphi$.



Σχ. 6-1

Από την ιδιότητα αυτή αλλά και τον ορισμό είναι φανερό ότι η y' εκφράζει ουσιαστικά το ρυθμό μεταβολής της y στο σημείο $x = x_0$.

6.2 Γενικοί Κανόνες Παραγώγισης

Στους παρακάτω τύπους α) u, υ, w είναι συναρτήσεις του x, β) c, n είναι σταθερές, γ) e = 2.71828… είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων, δ) ln$u$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του u (όπου δεχόμαστε $u > 0$) και όλες οι γωνίες είναι σε ακτίνια.

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$ [n ακέραιος ή πραγματικός] $$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ $$\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm \upsilon \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{d\upsilon}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u\upsilon) = u\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u\upsilon w) = u\upsilon\frac{dw}{dx} + uw\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon w\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon(du/dx) - u(d\upsilon/dx)}{\upsilon^2}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$ [παράγωγος σύνθετης συνάρτησης]

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$$ [παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$ [αν η συνάρτηση δίνεται σε παραμετρική μορφή $x=x(t),\ y=y(t)$]

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$ [αν η συνάρτηση $y=f(x)$ δίνεται σε πλεγμένη μορφή $F(x,y)=0$]

$$\frac{d}{dx}u^{\upsilon}=\frac{d}{dx}e^{\upsilon\ln u}=e^{\upsilon\ln u}\frac{d}{dx}(\upsilon\ln u)=\upsilon u^{\upsilon-1}\frac{du}{dx}+u^{\upsilon}\ln u\frac{d\upsilon}{dx}$$

Δεύτερη παράγωγος $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=y''$$

Τρίτη παράγωγος $$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)=y'''$$

Παράγωγος τάξης n $$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)=y^{(n)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}x^a=a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$$

6.3 Παράγωγοι Στοιχειωδών Συναρτήσεων

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \qquad \frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x \qquad \frac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [0 \le \cos^{-1}x \le \text{¿}]$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left[-\frac{\text{¿}}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\text{¿}}{2}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2} \qquad [0 < \cot^{-1}x < \text{¿}]$$

[$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ παριστάνουν τους πρωτεύοντες κλαδους.]

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\log_c x = \frac{\log_c e}{x} \qquad c \ne 0, 1$$

$$\frac{d}{dx}c^x = c^x \ln c$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d^n}{dx^n}\ln x = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \cosh^{-1}x > 0, \quad x > 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}} & \cosh^{-1}x < 0, \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2} \qquad x^2 < 1$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}x = \frac{1}{1-x^2} \qquad x^2 > 1$$

6.4 Μερικές Παράγωγοι

Αν $f(x, y)$ είναι μια συνάρτηση ανεξάρτητων μεταβλητών x και y, η *μερική παράγωγος* της $f(x, y)$ ως προς x ορίζεται με τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{με } y = \text{σταθ.}$$

Όμοια, η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς y ορίζεται με τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{με } x = \text{σταθ.}$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης μπορούν να ορισθούν ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, αν η συνάρτηση και οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει σημασία η σειρά παραγώγισης. Γενικά, η μερική παράγωγος ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται με απλή παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή αυτή θεωρώντας τις άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές σαν σταθερές.

Το *διαφορικό* της $f(x, y)$ ορίζεται με τη σχέση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

όπου $dx = \Delta x$ και $dy = \Delta y$. Επέκταση σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών γίνεται εύκολα.

Κανόνες παραγώγισης

Γενικά, για τον υπολογισμό μερικών παραγώγων ισχύουν οι κανόνες παραγώγισης της Παραγ. 6.2. Επιπλέον διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

Αν $y = f(u, \upsilon, \ldots, w)$, όπου $u, \upsilon, \ldots$, είναι συναρτήσεις μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής x, τότε

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon}\frac{d\upsilon}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

Αν $y = f(u, \upsilon, \ldots, w)$, όπου $u, \upsilon, \ldots$, είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots , x_n$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x_k} \quad \text{για } k = 1, 2, \ldots, n$$

6.5 Διαφορικά

Αν $y = f(x)$ είναι μια συνάρτηση, για μια αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά Δx η εξαρτημένη μεταβλητή αυξάνει κατά $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ορίζουμε

Διαφορικό της x: $dx = \Delta x$

Διαφορικό της y: $dy = f'(x)\,dx$

Είναι $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon = \dfrac{dy}{dx} + \varepsilon$

όπου $\varepsilon \to 0$, όταν $\Delta x \to 0$. Συνεπώς

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

$d(u \pm \upsilon \pm w \ldots) = du \pm d\upsilon \pm dw \ldots$

$d(u\upsilon) = u\,d\upsilon + \upsilon\,du$

$d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right) = \dfrac{\upsilon\,du - u\,d\upsilon}{\upsilon^2}$

$d(u^n) = nu^{n-1}du$

$d(\sin u) = \cos u\,du$

$d(\cos u) = -\sin u\,du$