

Wavelets

α. Τι είναι τα wavelets;

Τα wavelets είναι συναρτήσεις που ικανοποιούν συγκεκριμένες απαιτήσεις. Το όνομα προέρχεται από την απαίτηση να ολοκληρώνονται στο μηδέν, “waving” πάνω και κάτω από τον άξονα- x .

Υπάρχουν πολλά είδη από wavelets: smooth, compactly supported, με απλές μαθηματικές εκφράσεις, με απλά επικουρικά φίλτρα κλπ.

Το πιο απλό είναι το Haar. Όπως τα ημίτονα και τα συνημίτονα στην ανάλυση Fourier, τα wavelets χρησιμοποιούνται σαν συναρτήσεις βάσης για την περιγραφή άλλων συναρτήσεων. Όταν ένα wavelet (μητρικό) $\psi(x)$ οριστεί τότε μπορούν να γίνουν συστολές (dilation) και μεταφορές (translation) ως:

$$\left\{ \psi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \right\}$$

Είναι βολικό να διαλέξουμε ειδικές τιμές για το α , β , έτσι: $\alpha=2^j$ και $\beta=k \cdot 2^j$ με k, j ακέραιοι.

Wavelets

α. Τι είναι τα wavelets;

Γιατί χρησιμοποιούμε wavelet και όχι την παραδοσιακή ανάλυση Fourier;

- Οι συναρτήσεις βάσης είναι εντοπισμένες στη συχνότητα αλλά όχι στον χρόνο.
- Μικρές μεταβολές στις συχνότητες θα προκαλέσουν αλλαγές παντού στην *περιοχή χρόνου*.

+ Τα wavelets είναι εντοπισμένα και στη συχνότητα (λόγω των dilations) αλλά και στον χρόνο (λόγω των translations).

+ Η περιγραφή συναρτήσεων σε πολλές περιπτώσεις γίνεται πιο αποτελεσματικά με τα wavelets. Για παράδειγμα συναρτήσεις με ασυνέχειες και συναρτήσεις με αιχμηρές κορυφές απαιτούν δραστικά μικρότερο αριθμό συναρτήσεων βάσης για περιγραφή με wavelets από τη χρήση (συν)ημιτόνων.

Wavelets

α. Τι είναι τα wavelets;

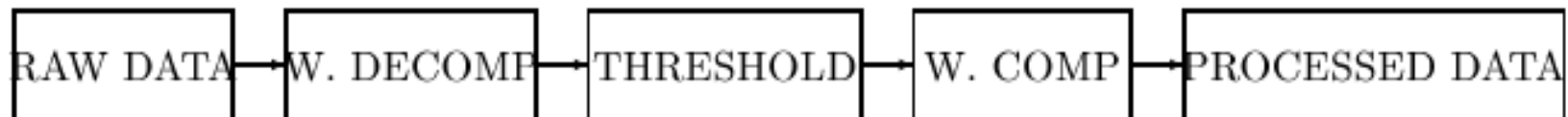
Αυτή η τελευταία ιδιότητα τα καθιστά ένα έξοχο εργαλείο στην συμπίεση δεδομένων. Για παράδειγμα, το FBI χρησιμοποιεί wavelets για την συμπίεση ψηφιακών δεδομένων που αντιστοιχούν σε εικόνες αποτυπωμάτων. Οι λόγοι συμπίεσης είναι της τάξης του 20:1, ενώ η διαφορά ανάμεσα στην πρωτότυπη εικόνα και σε αυτή που προέρχεται από την αποσυμπίεση μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνο από κάποιον ειδικό. Άλλες εφαρμογές τους εντοπίζονται στην απομάκρυνση θορύβου από ηχογραφήσεις, και συγκεκριμένα ηχογραφήσεις του Brahms όπου παίζει στο πιάνο το *First Hungarian Dance*.

Wavelets

α. Τι είναι τα wavelets;

Μπορούμε λοιπόν να καταλάβουμε το όφελος που μπορεί να έχουν οι στατιστικολόγοι στην μετατροπή μεγάλων και με υψηλό θόρυβο δεδομένων. Τα δεδομένα κωδικοποιούνται μέσω των συντελεστών των wavelets. Επίσης το επίθετο “ταχύς” για τον FFT στα wavelets γίνεται “ταχύτερος”: από $O(N \log N)$ σε $O(N)$...

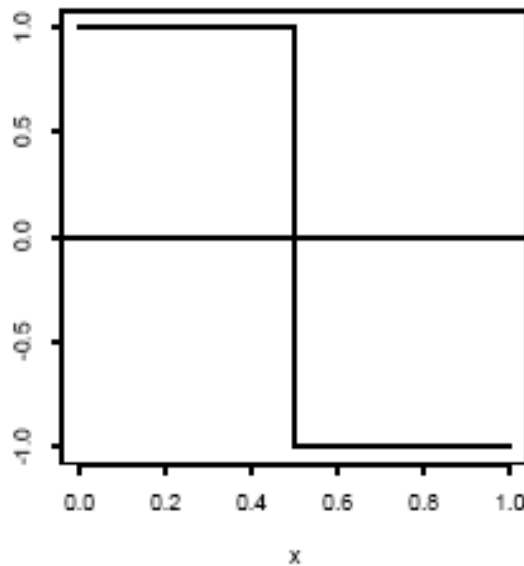
Η επεξεργασία δεδομένων μπορεί να γίνει με την επεξεργασία των αντιστοίχων συντελεστών των wavelets. Για παράδειγμα κάποιος μπορεί να βελτιώσει την ποιότητα των δεδομένων του θέτοντας ένα κατώφλι για τους συντελεστές και στη συνέχεια να χρησιμοποιεί τον φιλτραρισμένο κώδικα στην *περιοχή χρόνου*.



Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

Για να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο τα wavelets δουλεύουν θα δούμε ένα παράδειγμα. Έστω το απλούστερο και παλιότερο wavelet, το Haar wavelet, $\psi(x)$. Είναι μια συνάρτηση βαθμωτή με τιμές 1 και -1 στο $[0, 1/2)$ και $[1/2, 1)$, αντίστοιχα. Η μορφή φαίνεται παρακάτω:



Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

Γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί με συναρτήσεις Haar. Με dilations και translations της συνάρτησης ψ

$$\psi_{jk}(x) = \text{const} \cdot \psi(2^j x - k),$$

ορίζουμε την ορθοκανονική βάση στο $L^2(\mathbb{R})$ (ο χώρος όλων των τετραγωνικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δλδ A function f is in $L^2(S)$ if $\int_S f^2$ is finite).

Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του $L^2(\mathbb{R})$ μπορεί να περιγραφεί ως γραμμικός συνδυασμός (πιθανώς άπειρος) αυτών των συναρτήσεων βάσης.

Η ορθοκανονικότητα της ψ_{jk} αποδεικνύεται ως; $\int \psi_{jk} \cdot \psi_{j'k'} = 0$ όταν τα $j=j'$ και $k=k'$ δεν ισχύουν ταυτόχρονα.

Για $j \neq j'$ ($j < j'$), τότε περιέχονται και μη μηδενικές τιμές για το $\psi_{j'k'}$ ενώ το ψ_{jk} είναι σταθερό. Άρα το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται μηδέν.

Αν $j=j'$ αλλά $k \neq k'$ τότε τουλάχιστο ένας παράγοντας στο γινόμενο είναι μηδέν, οπότε οι συναρτήσεις είναι ορθοκανονικές.

Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

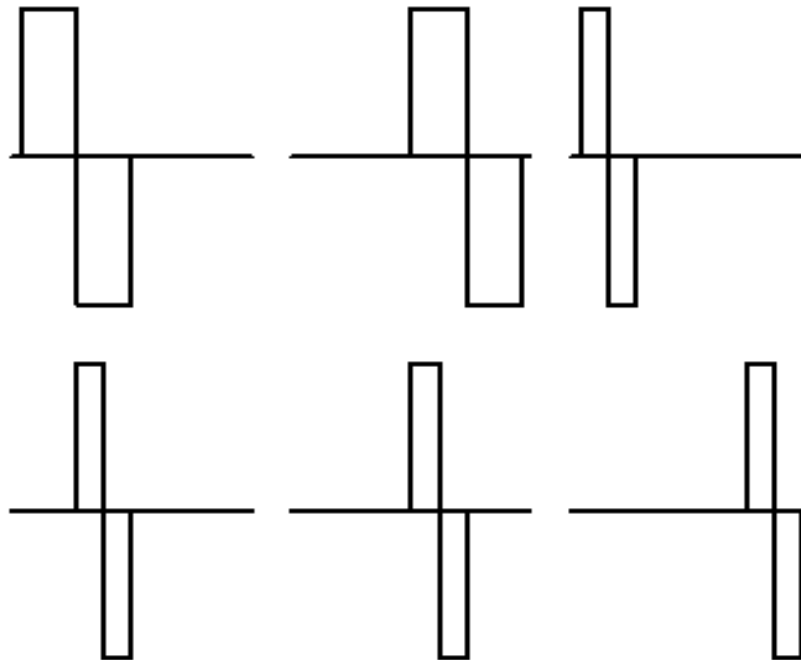
Η σταθερά που είναι υπεύθυνη για την ορθοκανονικότητα είναι η $2^{j/2}$.

Δεδομένου ότι η norm στον L^2 είναι $\|f\|^2 =_{def} \langle f, f \rangle = \int f^2$

ισχύει ότι:

$$1 = (const)^2 \int \psi^2(2^j x - k) dx = (const)^2 \cdot 2^{-j} \int \psi^2(t) dt = (const)^2 \cdot 2^{-j}$$

Οι συναρτήσεις $\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}$ παριστάνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

Το σύνολο $\{\psi_{j,k}, j \in Z, k \in Z\}$ ορίζει μια ορθοκανονική βάση του L^2 . Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε ορθοκανονικές βάσεις της μορφής

$$\{\phi_{j_0,k}, \psi_{jk}, j > j_0, k \in Z\}$$

όπου η ϕ_{j_0} καλείται scaling function και σχετίζεται με την βάση ψ_{jk} . Για το Haar wavelet αυτή η συνάρτηση είναι απλή: είναι μονάδα στο $[0,1)$.

Έστω το διάνυσμα με τα δεδομένα $y = (y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1})$ ιε μέγεθος 2^n . Αυτό το διάνυσμα μπορεί να σχετίζεται με μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση f στο $[0,1)$ που παράγεται από αυτό ως:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k \cdot \mathbf{1}(k2^{-n} \leq x < (k+1)2^{-n})$$

Η f περιγράφεται από τα wavelets ως:

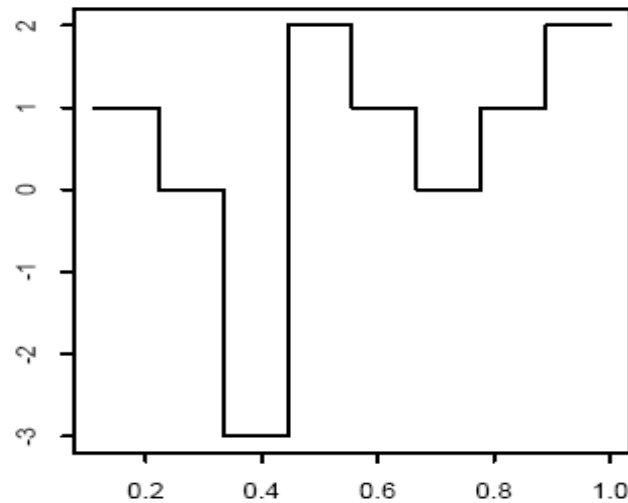
$$f(x) = c_{00}\phi(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}\psi_{jk}(x)$$

Το άθροισμα ως προς το j είναι πεπερασμένο γιατί η f είναι βαθμωτή, και όλα μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια με επίλυση μέχρι το $(n-1)$ -οστό επίπεδο. Για κάθε επίπεδο το άθροισμα ως προς το k είναι επίσης πεπερασμένο γιατί το πεδίο της f είναι και αυτό πεπερασμένο. Ειδικότερα, δεν είναι επιτρεπτές οι translations για την ϕ_{00} .

Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

Βρήκαμε την προσέγγιση του διανύσματος ως γραμμικό συνδυασμό των wavelets. Έστω $y = (1, 0, -3, 2, 1, 0, 1, 2)$ η συνάρτηση f φαίνεται στο σχήμα:



Η σχέση του διανύσματος με τους συντελεστές των wavelets δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

Η σχέση του διανύσματος με τους συντελεστές των wavelets δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{00} \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{20} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε τις τιμές του 2^j για τα επίπεδα 0, 1, 2 ($1, 2^{1/2}, 2^1$) (σημ. Θυμηθείτε ότι η σταθερά ορθοκανονικότητας είναι η $2^{j/2}$).

Wavelets

β. Πώς δουλεύουν τα wavelets;

Η λύση είναι

$$[c_{00} \ d_{00} \ d_{10} \ d_{11} \ d_{20} \ d_{21} \ d_{22} \ d_{23}]^T = [1/2 \ -1/2 \ 1/2\sqrt{2} \ -1/2\sqrt{2} \ 1/4 \ -5/4 \ 1/4 \ -1/4]^T$$

οπότε:

$$f = 1/2\phi - 1/2\psi_{00} + 1/2\sqrt{2}\psi_{10} - 1/2\sqrt{2}\psi_{11} + 1/4\psi_{20} - 5/4\psi_{21} + 1/4\psi_{22} - 1/4\psi_{23}$$

και ελέγχουμε την λύση για $x \in [0, \frac{1}{8})$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

Wavelets

γ. Mallat's multiresolution analysis (MRA), φίλτρα, και ευθύς και ανίστροφος μετασχηματισμός με wavelets.

Ξεκινάμε με τον χώρο L^2 . Η MRA είναι μια αυξανόμενη αλληλουχία απο κλειστούς υποχώρους $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ που προσεγγίζουν τον $L^2(\mathbb{R})$.

Όλα ξεκινάνε με μια σωστή εκλογή της scaling function ϕ . Αυτή εκλέγεται ώστε να ικανοποιεί συνέχεια, ομαλότητα και σωστή περιγραφή στην ουρά. Αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι η οικογένεια $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ ορίζουν μια ορθοκανονική βάση του χώρου V_0 . Έτσι:

$$\text{MRA 1} \quad \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$$

Ο χώρος $L^2(\mathbb{R})$ είναι μια κλειστότητα της ένωσης των υποχώρων V_j . Η τομή όλων των υποχώρων είναι το κενό σύνολο.

$$\text{MRA 2} \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Οι χώροι V_j και V_{j+1} είναι "όμοιοι". Αν ο χώρος V_j περιγράφεται από την $\phi_{jk}(x)$, τότε ο V_{j+1} περιγράφεται από την $\phi_{j+1k}(x)$. Ο V_{j+1} προκύπτει από τις συναρτήσεις $\phi_{j+1k}(x) = \sqrt{2}\phi_{jk}(2x)$.

Wavelets

γ. Mallat's multiresolution analysis (MRA), φίλτρα, και ευθύς και ανίστροφος μετασχηματισμός με wavelets.

Τώρα θα περιγράψουμε πως εισάγονται τα wavelets στα παραπάνω: Αφού το $V_0 \subset V_1$, τότε κάθε συνάρτηση του πρώτου μπορεί να γραφεί σα γραμμικός συνδυασμός των $\sqrt{2}\phi(2x-k)$, δλδ

$$\phi(x) = \sum_k h(k) \sqrt{2} \phi(2x - k)$$

Οι συντελεστές $h(k)$ ορίζονται ως $\langle \phi(x), \sqrt{2}\phi(2x - k) \rangle$

Έστω το ορθογώνιο συμπλήρωμα W_j του V_j στο V_{j+1} ($V_{j+1} = V_j \oplus W_j$).

Ορίζεται $\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^k h(-k + 1) \phi(2x - k)$

Γενικά η $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια βάση του W_j , και η οικογένεια των συναρτήσεων $\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια βάση του $L^2(\mathbb{R})$.

Για μια δεδομένη συνάρτηση f του $L^2(\mathbb{R})$ μπορεί να βρεθεί $f_N \in V_N$ και να προσεγγίζει την f μέχρι μια επιθυμητή ακρίβεια. Έτσι, If $g_i \in W_i$ and $f_i \in V_i$, τότε $f_N = f_{N-1} + g_{N-1} = \sum_{i=1}^M g_{N-M} + f_{N-M}$.

Wavelets

δ. Επεξεργασία σήματος

Θυμηθείτε ότι ισχύουν $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \sqrt{2} \phi(2x - k)$

και $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \sqrt{2} \phi(2x - k)$

Τα g και h συνδέονται ως: $g(n) = (-1)^n h(1-n)$. Η σειρά h είναι ένα low-pass φίλτρο ενώ η g ένα high-pass φίλτρο. Τα φίλτρα περιγράφονται καλύτερα με χρήση τελεστών: Για μια αλληλουχία $a = \{a_n\}$ οι τελεστές H , G ορίζονται ως

$$(Ha)_k = \sum_n h(n - 2k) a_n$$

$$(Ga)_k = \sum_n g(n - 2k) a_n$$

Έστω το πρωτότυπο σήμα $c^{(n)}$, το οποίο αν είναι μήκους 2^n . τότε το σήμα μπορεί να παρασταθεί από μια συνάρτηση $f(x) = \sum_k c_k^{(n)} \phi_{nk}$, $f \in V_n$.

Σε κάθε στάδιο του μετασχηματισμού μετακινούμαστε προς μια “χονδροειδή” προσέγγιση $c^{(\xi-1)} = Hc^{(\xi)}$ και $d^{(\xi-1)} = Gc^{(\xi)}$. Η τελευταία εκφράζει την χαμένη λεπτομέρεια λόγω της προσέγγισης. Έτσι μετασχηματίζουμε σε μια διακριτή σειρά ως: $(\underline{d}^{(n-1)}, \underline{d}^{(n-2)}, \dots, \underline{d}^{(1)}, \underline{d}^{(0)}, \underline{c}^{(0)})$

Wavelets

δ. Επεξεργασία σήματος

Η σε μια γραμμή: $\underline{y} \rightarrow (G\underline{y}, GH\underline{y}, GH^2\underline{y}, \dots, GH^{n-1}\underline{y}, H^n\underline{y})$

Για να επιτύχουμε την αναδόμηση του πρωτότυπου σήματος θα πρέπει να ορίσουμε συζυγής τελεστές H^* , G^* , ως:

$$(H^*a)_n = \sum_k h(n-2k)a_k$$

$$(G^*a)_n = \sum_k g(n-2k)a_k$$

Επαναληπτική εφαρμογή οδηγεί στο:

$$(G\underline{y}, GH\underline{y}, GH^2\underline{y}, \dots, GH^{j-1}\underline{y}, H^j\underline{y}) \rightarrow \underline{y} = \sum_{j=0}^{n-1} (H^*)^j G^* \underline{d}^{(j)} + (H^*)^n \underline{c}^{(0)}$$

Τα φίλτρα παράγονται ως (Haar wavelet):

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x-1),$$

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x-1)$$

και οι συντελεστές είναι:

$$h(0) = h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad g(0) = -g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wavelets

δ. Επεξεργασία σήματος

Η αποσύνθεση στα δεδομένα περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:

$$\underline{y} = c^{(3)} \quad \boxed{1 \quad 0 \quad -3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2}$$

$$\underline{d}^{(2)} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{5}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\underline{c}^{(2)} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$\underline{d}^{(1)} \quad \boxed{1 \quad -1}$$

$$\underline{c}^{(1)} \quad \boxed{0 \quad 2}$$

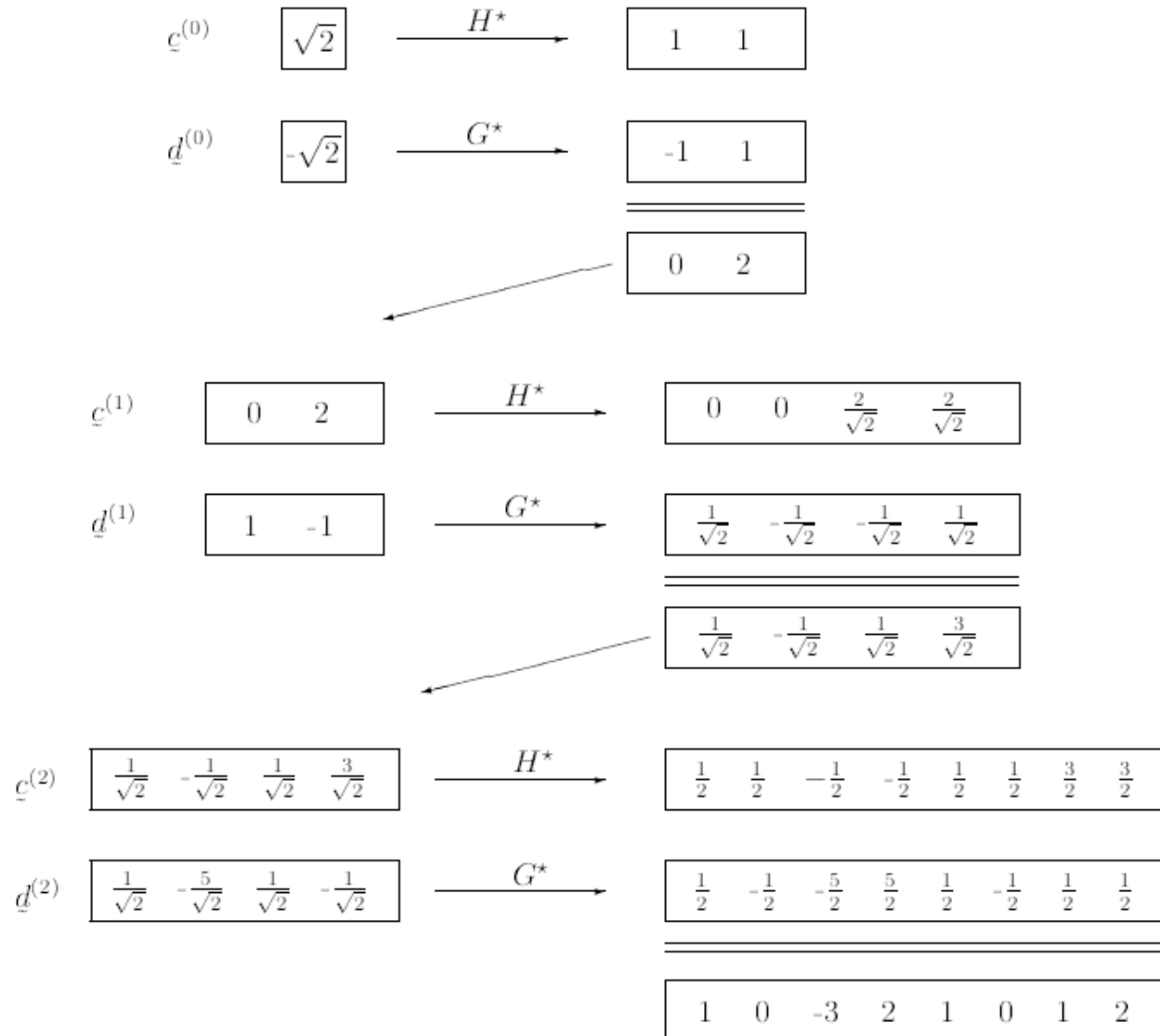
$$\underline{d}^{(0)} \quad \boxed{-\sqrt{2}}$$

$$\underline{c}^{(0)} \quad \boxed{\sqrt{2}}$$

Wavelets

δ. Επεξεργασία σήματος

Ενώ η επανασύνθεση στα δεδομένα περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



Wavelets

ε. Παραδείγματα

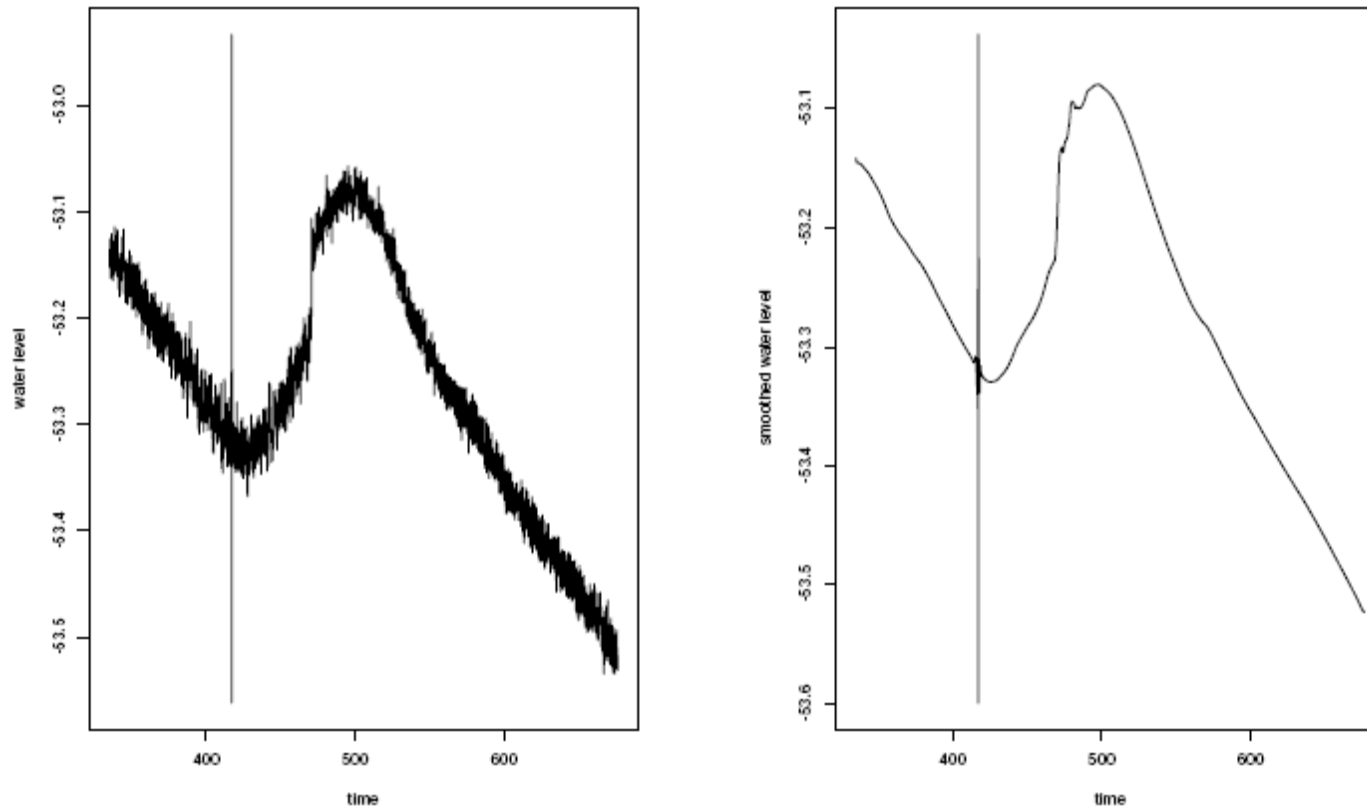
Παράδειγμα: Μία γεωλόγος θέλει να μελετήσει το πόσο εφικτό είναι να προβλέπει σεισμούς από το επίπεδο του νερού σε γειτονικά πηγάδια (φρεάτια). Πραγματοποίησε $8192=2^{13}$ μετρήσεις για τα επίπεδα νερού ανά ώρα και για ένα έτος στην Καλιφόρνια. Το πρόβλημα περιγράφεται ως εξής:

Έχουμε μετρήσεις από 6 πηγάδια στην νότια Καλιφόρνια, για ένα διάστημα 6 χρόνων. Κατά το διάστημα αυτό τουλάχιστο 13 δυνατοί σεισμοί (4.0-6.0) συνέβησαν κοντά σε αυτά τα πηγάδια. Υπάρχει ένα σημαντικό ποσό θορύβου στις μετρήσεις του επιπέδου του νερού, που πρέπει να απομακρυνθεί. Περιβαντολογικοί παράγοντες όπως παλίρροια, και ατμοσφαιρική πίεση δημιουργούν θορύβους με συχνότητες εποχιακές ως και δις ημερησίως. Το ποσοστό βροχόπτωσης επίσης επηρεάζει, η άντληση κλπ. Το καθαρό σήμα μπορεί να μελετηθεί για τις αλλαγές στα επίπεδα νερού ανάλογα με αν το υδροφόρο στρώμα εμφανίζει έκτατη ή συμπιεστική πίεση, ακριβώς πριν από ένα σεισμό.

Wavelets

ε. Παραδείγματα

Τα δεδομένα για ένα χρόνο παριστάνονται στο αριστερό σχήμα ενώ στο δεξί δίδονται τα καθαρισμένα δεδομένα με χρήση του Daub#2 wavelet.



;όπου όταν συμβαίνει σεισμός έχουν χαρακτηριστικά άλματα.

Wavelets

ε. Παραδείγματα

Παράδειγμα: Θα δούμε πόσο καλά δουλεύουν τα wavelets σε επεξεργασία πινάκων. Κάθε ασπρόμαυρη εικόνα μπορεί να περιγραφεί από έναν πίνακα A του οποίου τα στοιχεία a_{ij} αντιστοιχούν σε εντάσεις του γκρι στο pixel (i,j) .

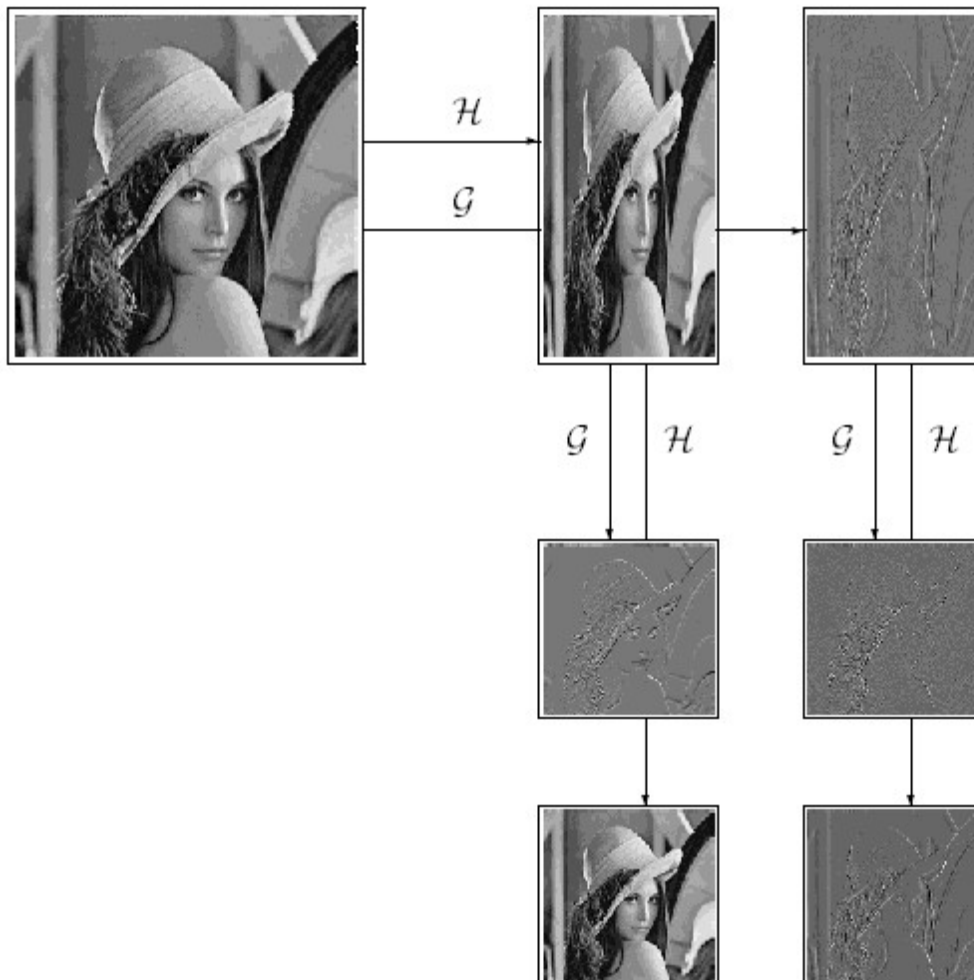
Υποθέτουμε ότι ο A είναι ένας τετραγωνικό πίνακας με διαστάσεις $2^n \times 2^n$.

Η διαδικασία έχει ως εξής: Εφαρμόζονται τα φίλτρα H , G στις γραμμές του A , και προκύπτουν δύο πίνακες $H_r A$, $G_r A$, με διαστάσεις $2^n \times 2^{n-1}$. Στη συνέχεια τα ίδια φίλτρα εφαρμόζονται στις στήλες των $H_r A$, $G_r A$ και προκύπτουν τέσσερις νέοι πίνακες $H_c H_r A$, $G_c H_r A$, $H_c G_r A$, $G_c G_r A$. Ο πρώτος πίνακας εκφράζει τον μέσο όρο ενώ όλοι οι άλλοι είναι οι λεπτομέρειες (βλ. Επόμενο σχήμα):

Wavelets

ε. Παραδείγματα

Παράδειγμα (... συνέχεια):



Wavelets

ε. Παραδείγματα

Παράδειγμα: Πάνω αριστερά είναι μια ασπρόμαυρη φωτογραφία του John Lennon 256 x 256 σε κλίμακα του γκρι από 0-255. Στην πάνω δεξιά κάθε pixel μολύνεται με κανονικό $N(0,60)$ θόρυβο. Οι δύο άλλες εικόνες είναι ανακτημένες. Για τον μετασχηματισμό χρησιμοποιήθηκε το Daub#4 για την μία και το Daub#10 για την άλλη. Αν και η ποιότητα της ανάκτησης μπορεί να μην ικανοποιεί αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο ανακτημένες εικόνες χρησιμοποιούν μόνο το 1.8 % της πάνω δεξιά. Η συμπίεση είναι από 527120 bites σε 9695 bites.

Wavelets

ε. Παραδείγματα

Παράδειγμα (... συνέχεια):

