Ο μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι από τα διαδεδομένα εργαλεία μετατροπής δεδομένων και συναρτήσεων (μιας ή περισσοτέρων διαστάσεων) από αυτό που ονομάζεται *περιοχή χρόνου (time domain)* στην *περιοχή συχνότητας (frequency domain)*. Οι εφαρμογές του περιλαμβάνουν το σχεδιασμό φίλτρων για την ελαχιστοποίηση του θορύβου σε ακουστικά σήματα (π.χ. μουσική ή λόγος), ως τον ταχύ πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

Ο μετασχηματισμός Fourier
α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Κάθε συνεχής, περιοδική συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ημιτόνων και συνημιτόνων. Το ημίτονο είναι μια συνάρτηση της μορφής $A\sin(2\pi\omega t+\varphi)$, όπου το A είναι το *μέγεθος*, ω είναι η συχνότητα σε κύκλους (ή περιόδους) ανα sec, και φ είναι η *φάση*, η οποία χρησιμοποιείται για να αποφεύγουμε την τιμή 0 για $t=0$. Αντίστοιχα το συνημίτονο έχει ακριβώς τους ίδιους όρους και μπορεί να θεωρηθεί ως μετατιτεθεμένο ημίτονο (ή καλύτερα ως ημίτονο με *φάση* π/2).

Ο μετασχηματισμός Fourier
α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Έτσι μια συνάρτηση f(t) μπορούμε να τη γράψουμε (ή τουλάχιστο να την προσεγγίσουμε) για κάποια n ως:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(2\pi\omega_k t) + B_k sin(2\pi\omega_k t))$$

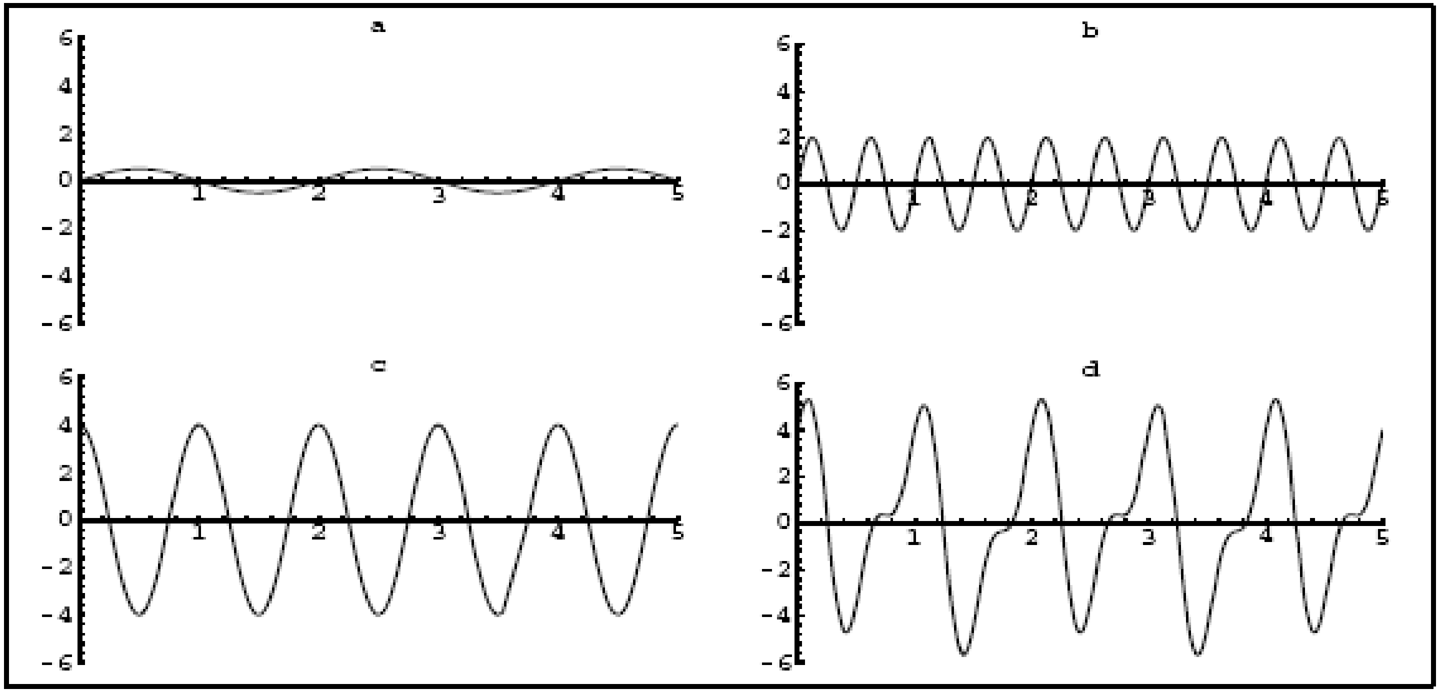
Χρησιμοποίειται ο συνδυασμός ημιτόνων-συνημιτόνων, και όχι μόνο ημιτόνων, έτσι ώστε να είναι δυνατή η έκφραση συναρτήσεων για τις οποιές f(0)≠0, με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφύγουμε την προσθήκη φάσης στο ημίτονο.

Ο μετασχηματισμός Fourier
α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Ώς μια τέτοια προσεγγιση θεωρήστε τον παρακάτω συνδυασμό:

$$f_1(t) = 0.5 sin \pi t + 2 sin 4 \pi t + 4 cos 2 \pi t$$

Η γραφική απεικόνιση των παραπάνω συναρτήσεων είναι (για t=0.5):



Ο μετασχηματισμός Fourier

α. συναρτήσεις ως συνδυασμοί ημιτονοειδών

Και η ανάλυση των συχνοτήτων της $f_1(t)$ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

k	Frequency (ω_k)	Cosine Amplitude (A_k)	Sine Amplitude (B_k)
1	1/2	0	1/2
2	2	0	2
3	1	4	0

Η αναπαράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης ως γρ. συνδυασμός ημιτόνω και συνημιτόνων, είναι γνωστή ως *ανάπτυγμα σειράς Fourier* της συνάρτησης. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα εργαλείο για να υπολογίζουμε μεγέθη όπως αυτά του παραπάνω πίνακα για σειρές και συναρτήσεις, που δεν είναι υποχρεωτικά περιοδικές (οι σειρές είναι ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων...).

Ο μετασχηματισμός Fourier
β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Ένας άλλος τρόπος έκφρασης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βασίζεται στο παρακάτω:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta) \qquad e^{-i\theta} = cos(\theta) - isin(\theta)$$

Και οι δύο προκύπτουν από το ανάπτυγμα Taylor για το cos, sin, και e^{θ}. Με απλές πράξεις προκύπτει:

$$cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{A_k}{2}(e^{2\pi\omega_k t} + e^{-2\pi\omega_k t}) + \frac{B_k}{2i}(e^{2\pi\omega_k t} - e^{-2\pi\omega_k t})\right]$$
$$C_k = \frac{A_k - iB_k}{2},\ k > 0$$
$$C_k = \frac{A_k + iB_k}{2},\ k < 0$$
$$C_0 = 0$$
$$\omega_k = -\omega_{-k}$$
$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left[C_k e^{2\pi i\omega_k t}\right]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier
β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Το ανάπτυγμα Taylor για το cos, sin, και e^{θ}

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} \cdots + \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \cdots + \frac{2\left(2^{2n-1}-1\right)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \quad 0 < |x| < \pi$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots \quad 0 < |x| < \pi$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \cdots\right) \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

Ο μετασχηματισμός Fourier

β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Και ο προηγούμενος πίνακας γίνεται:

k	Frequency (ω_k)	C_k
-3	-1	2
-2	-2	$2i$
-1	$-1/2$	$i/4$
0	0	0
1	$1/2$	$-i/4$
2	2	$-2i$
3	1	-2

περαιτέρω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$x + iy = r(cos(\theta) + isin(\theta)) = re^{i\theta},\ \kappa\alpha\iota$$
$$r = absx + iy = \sqrt{x^2 + y^2}, tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier
β. Προσαρμογή σε μιγαδικούς και εκθετικά

Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$C_k e^{2\pi i\omega_k t} = r_k e^{i\phi_k} e^{2\pi\omega_k t} = r_k e^{i(2\pi\omega_k t+\phi_k)}$$

$$r_k = \left(\frac{A_k^2+B_k^2}{4}\right) \qquad tan(\phi_k) = \begin{cases} \frac{-B_k}{A_k} & k > 0 \\ \frac{B_k}{A_k} & k < 0 \end{cases}$$

και τελικά

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} r_k e^{i(2\pi\omega_k t+\phi_k)}$$

οι όροι στην τελευταία συνάρτηση είναι: ω_k η *κ-ιοστή συχνότητα*, *rk* είναι το*μέγεθος*, και φ_k είναι η *φάση*.

Ο μετασχηματισμός Fourier
γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier μια συνάρτησης f(t) ορίζεται ως:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega t} dt$$

όπου η τελευταία συνάρτηση έχει οριστεί στην προηγούμενη παράγραφο, και είναι γνωστή ως *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier*. Από την πρώτη συνάρτηση μπορεί να βρεθεί το *μέγεθος* για κάθε συχνότητα *ω*, υπό την προυπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού μιας συνάρτησης ονομάζεται *φάσμα συχνότητας* ή *δυναμικό φάσμα* ή απλούστερα *φάσμα.*

Ο μετασχηματισμός Fourier

γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα Η συνάρτηση *παλμός* ορίζεται ως $p_{1/n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| \le \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases}$

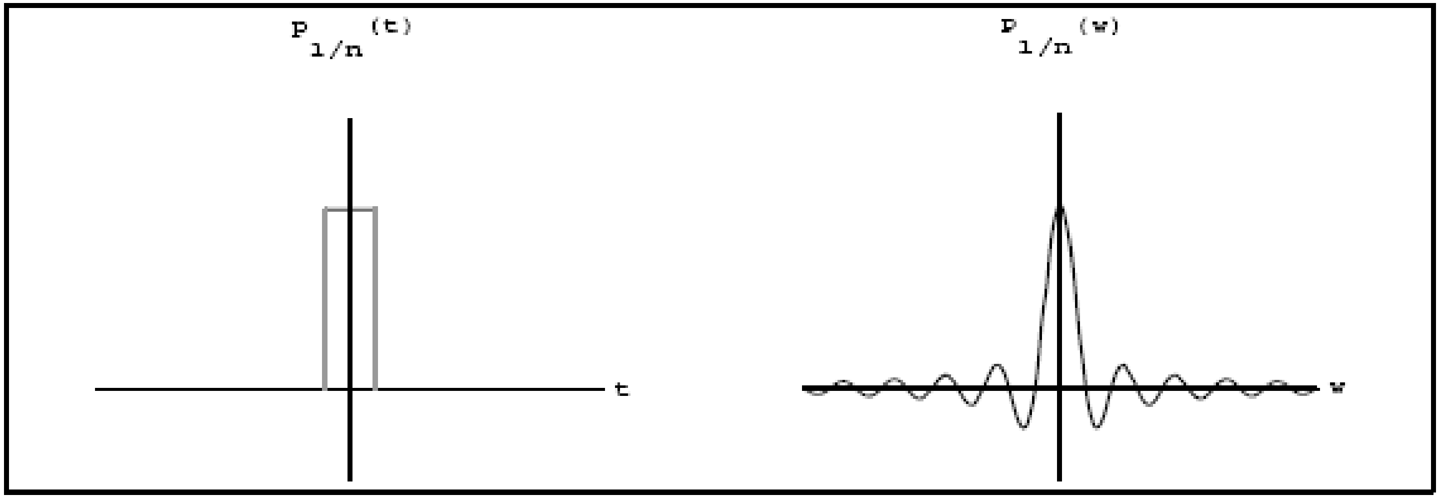
Ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της συνάρτησης είναι μια συνάρτηση sinc με μορφή:

$$\begin{aligned} &P_{1/n}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/n}(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = \\ &= \int_{-1/n}^{1/n} n/2 e^{-2\pi i \omega t} dt = \frac{n}{2} \frac{e^{2\pi i \omega/n} - e^{-2\pi i \omega/n}}{2\pi i \omega} = \\ &= \frac{sin(2\pi\omega/n)}{2\pi\omega/n} = sinc(2\pi\omega/n) \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier
γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα Η συνάρτηση *παλμός* ορίζεται ως $p_{1/n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & |t| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases}$

(...συνέχεια) και η γραφική απεικόνισή τους είναι:



Ο μετασχηματισμός Fourier
γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα Η συνάρτηση *δ* ορίζεται ως: $\delta(t) = \lim_{n\to\infty} p_{1/n}(t)$

Είναι επίσης γνωστή ως *συνάρτηση δέλτα του Dirac*. Είναι 0 για όλα τα t, εκτός t=0, και *δ(0)=∞.*

Ο μετασχηματισμός της είναι:

$$\Delta(\omega) = \lim_{n\to\infty} P(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{sin(2\pi\omega/n)}{2\pi\omega/n} = 1$$

Ο μετασχηματισμός Fourier
γ. Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Example 3 Let $f(t)$ be some simple cosine function: $f(t) = cos(2\pi at)$

Its Fourier transform is:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(2\pi at)e^{-2\pi i\omega t}dt = \frac{\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)}{2}$$

The respective graphs for $f(t)$ and $F(\omega)$ are shown in Figure 3.