Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Η μέθοδος Simplex
Είναι προφανές ότι για ένα πρόβλημα στη βασική του μορφή μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις, να απορίψουμε αυτές που δεν είναι εφικτές, και στη συνέχεια να βρούμε την βέλτιστη ανάμεσα σε αυτές. Η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι ιδιαίτερα μακροσκελής για αυτό αναζητούμε μια πιο αποτελεσματική μέθοδο.

Η μέθοδος Simplex

Έστω ένα πρόβλημα βασική του μορφή:

$$\text{Maximize} \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$\text{subject to}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

where $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ is an $m \times n$ matrix and

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Η μέθοδος Simplex

Εισάγουμε μια παράμετρο υστέρησης για να μετατρέψουμε την ανίσωση Ax≥b σε εξίσωση. Οπότε ο πίνακας A έχει διάσταση m x (n+m):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ενώ τα c και x γίνονται

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix},$$

ενώ το b παραμένει ως είχε.

Η μέθοδος Simplex

Μια βασική εφικτή λύση στην κανονική μορφή είναι ένα ακρότατο ου κυρτού συνόλου S' όλων των εφικτών λύσεων του προβλήματος.

Ορισμός: Δύο διακριτά ακρότατα του S' είναι γειτονικά αν ως βασικές εφικτές λύσεις έχουν n-1 βασικές μεταβλητές κοινές.

Τι είναι βασική λύση;

Έστω πάλι το παράδειγμα 1. Εισάγοντας τις μεταβλητές υστέρησης *u, v* έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 120x + 100y \\
&\text{subject to} \\
&\quad 2x + 2y + u \qquad\quad = 8 \\
&\quad 5x + 3y \qquad\quad + v = 15 \\
&x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το μοντέλο η “u” είναι διαφορά ανάμεσα στο χρονικό διάστημα που το πριόνι είναι διαθέσιμο, 8hr, και το διάστημα που χρησιμοποιείται, 2x+2y. Όμοια, η “v” είναι η διαφορά ανάμεσα στο χρονικό διάστημα που η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη, 15hr, και το διάστημα που χρησιμοποιείται, 5x+3y. Έχουμε δείξει ότι μία εφικτή λύση είναι η x=2, y=1. Τότε
u=8-2·2-2·1=2 και **v=15-5·2-3·1=2**. Οπότε
x=2, y=1, u=2 και **v=2**, είναι μια **εφικτή λύση**.

Έστω τώρα οι τιμές x=1, y=1, u=4 και v=7 αυτές αποτελούν εφικτή λύση γιατί:
2·1+2·1+4=8 και 5·1+3·1+7=15, άρα η x=1, y=1 είναι εφικτή λύση.

Τι είναι βασική λύση;

Έστω πάλι το παράδειγμα 1. Εισάγοντας τις μεταβλητές υστέρησης *u, v* έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 120x + 100y \\
&\text{subject to} \\
&\quad 2x + 2y + u \qquad\quad = 8 \\
&\quad 5x + 3y \qquad + v = 15 \\
&x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το μοντέλο η “u” είναι διαφορά ανάμεσα στο χρονικό διάστημα που το πριόνι είναι διαθέσιμο, 8hr, και το διάστημα που χρησιμοποιείται, 2x+2y. Όμοια, η “v” είναι η διαφορά ανάμεσα στο χρονικό διάστημα που η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη, 15hr, και το διάστημα που χρησιμοποιείται, 5x+3y. Έχουμε δείξει ότι μία εφικτή λύση είναι η x=2, y=1. Τότε
u=8-2·2-2·1=2 και **v=15-5·2-3·1=2**. Οπότε
x=2, y=1, u=2 και **v=2**, είναι μια **εφικτή λύση**.

Έστω τώρα οι τιμές x=1, y=1, u=4 και v=7 αυτές αποτελούν εφικτή λύση γιατί:
2·1+2·1+4=8 και 5·1+3·1+7=15, άρα η x=1, y=1 είναι εφικτή λύση.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Τι είναι βασική λύση;

Σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε 2 από τις 4 μεταβλητές x, y, u, v ως μη-βασικές θέτωντάς τες =0, και στη συνέχεια λύνοντας για τις βασικές. Έτσι αν στην

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

θέσουμε x=y=0 (μη-βασικές), τότε u=8 και v=15 (βασικές), και το διάνυσμα $[0\ 0\ 8\ 15]^T$ είναι μια βασική εφικτή λύση.

Αν θέταμε x=v=0, τότε προκύπτει y=5 και u=-2, και το διάνυσμα $[0\ 5\ -2\ 0]^T$ είναι μια βασική εφικτή λύση αλλά δεν είναι εφικτή γιατί το u<0.

Τι είναι βασική λύση;

Στον παρακάτω πίνακα δίδονται όλες οι βασικές λύσεις και σημειώνεται πότε είναι εφικτές και πότε όχι. Απορρίπτοντας τις βασικές λύσεις που δεν είναι εφικτές, προκύπτει μια βασική εφικτή λύση για την οποία η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται μέγιστη. Έτσι προκύπτει η

X=3/2, y=5/2, και u=v=0.

x	y	u	v	*Type of solution*	*Value of* $z = 120x + 100y$	*Truncated vector*
0	0	8	15	Basic feasible	0	$(0, 0)$
0	4	0	3	Basic feasible	400	$(0, 4)$
0	5	-2	0	Basic, not feasible	—	$(0, 5)$
4	0	0	-5	Basic, not feasible	—	$(4, 0)$
3	0	2	0	Basic feasible	360	$(3, 0)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	Basic feasible	430	$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Τι είναι βασική λύση;

Τα σημεία (0,0,8,15) και (0,4,0,3) είναι συσχετιζόμενα, γιατί οι βασικές μεταβλητές του πρώτου είναι τα u, v και του δεύτερου τα y, v. Αντίστοιχα το μόνο μη-συσχετιζόμενο με το (0,0,8,15) είναι το (3/2,5/2,0,0).

x	y	u	v	*Type of solution*	*Value of* $z = 120x + 100y$	*Truncated vector*
0	0	8	15	Basic feasible	0	$(0, 0)$
0	4	0	3	Basic feasible	400	$(0, 4)$
0	5	-2	0	Basic, not feasible	—	$(0, 5)$
4	0	0	-5	Basic, not feasible	—	$(4, 0)$
3	0	2	0	Basic feasible	360	$(3, 0)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	Basic feasible	430	$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Η μέθοδος προχωρά έτσι ώστε από μια βασική εφικτή λύση να πηγαίνει σε μια συσχετιζόμενη εφικτή βασική λύση κατά τέτοιο τρόπο ώστε η αντικειμενική συνάρτηση να αυξάνει ή στη χειρότερη περίπτωση να παραμένει ίδια. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να βρούμε την βέλτιστη λύση ή να καταλήξουμε στο ότι δεν υπάρχει βέλτιστη λύση στο πρόβλημα.

Ο αλγόριθμος αποτελείται από δύο στάδια:
(α) έναν τρόπο για να ελέγχουμε αν μια βασική εφικτή λύση είναι η βέλτιστη, και
(β) έναν τρόπο για να διαλέγουμε την συσχετιζόμενη βασική εφικτή λύση που δίδει την ίδια ή μεγαλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο A και τύπο B τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου A και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου A. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου B αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου B. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου A και 100 $ για τύπου B, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Το πρόβλημα στην κανονική του μορφή καθώς και με την εισαγωγή των μεταβλητών υστέρησης είναι:

$$\text{Maximize} \quad z = 120x + 100y$$

subject to

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + u \phantom{{}+v} &= 8 \\ 5x + 3y \phantom{{}+u} + v &= 15 \end{aligned}\right\}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

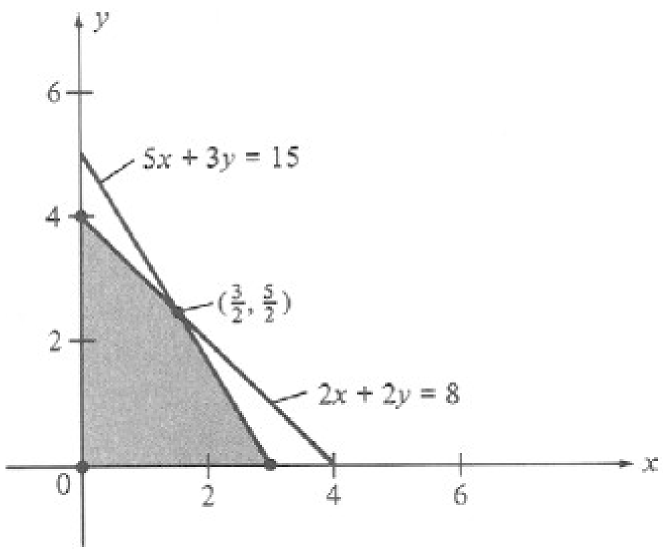
Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο Α και τύπο Β τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου Α και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου Α. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου Β αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου Β. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου Α και 100 $ για τύπου Β, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Αρχικά απαιτείται μία βασική εφικτή λύση. Θέτουμε όλες (εκτός από τις παραμέτρους υστέρησης) τις παραμέτρους σαν μη-βασικές, δλδ στο σύστημα Ax=b να είναι μηδενικές. Οπότε βασικές γίνονται οι παράμετροι υστέρησης. Ισχύει: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad \text{and} \quad x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+2} = b_2, \ldots, x_{n+m} = b_m$
και αυτό αποτελεί μια εφικτή λύση αλλά και βασική γιατί (n+m)-m=n μεταβλητές είναι μηδενικές. Για το παράδειγμα αρκεί: x=y=0 και λύνοντας για u, v προκύπτει u=8 και v=15.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο Α και τύπο Β τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου Α και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου Α. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου Β αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου Β. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου Α και 100 $ για τύπου Β, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Έτσι κατασκευάσαμε την αρχική βασική εφικτή λύση (0,0,8,15) (το σημείο στο οποίο αντιστοιχεί είναι το (0,0):



Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Παράδειγμα 1 (*ανάλυση δραστηριότητας*): Ένας μύλος ξυλείας πριονίζει σε τύπο A και τύπο B τα κούτσουρα που λαμβάνει. Υποθέστε ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου A και 5 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου A. Και ότι απαιτεί 2 hr για την κατασκευή 1000 b.ft τύπου B αλλά μόνο 3 hr για το πλανάρισμα 1000 b.ft υλικού τύπου B. Το πριόνι είναι διαθέσιμο μόνο 8 hr την ημέρα, και η μηχανή πλαναρίσματος είναι διαθέσιμη 15 hr την ημέρα. Αν το κέρδος είναι 120 $ για 1000 b.ft τύπου A και 100 $ για τύπου B, πόσα πρέπει να κατασκευάζονται από το κάθε είδος για να έχουμε το μέγιστο κέρδος;

Για την ανάπτυξη της μεθόδου είναι απαραίτητη η χρήση πίνακα. Επίσης γράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση ως:

$$\mathbf{-120x-100y+z=0}$$

και το z πλέον είναι μια ακόμη μεταβλητή. Ο αρχικός πίνακας σχηματίζεται ως εξής: Στην πρώτη σειρά τοποθετούνται οι μεταβλητές x, y, u, v, και z ως ονόματα αντιστοίχων στηλών. Η τελευταία σειρά, **αντικειμενική σειρά**, είναι η παραπάνω εξίσωση. Οι περιορισμοί είναι οι δύο πρώτες σειρές.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Στην πρώτη σειρά τοποθετούνται οι μεταβλητές x, y, u, v, και z ως ονόματα αντιστοίχων στηλών. Η τελευταία σειρά, **αντικειμενική σειρά**, είναι η παραπάνω εξίσωση. Οι περιορισμοί είναι οι δύο πρώτες σειρές.

	x	y	u	v	z	
u	2	2	1	0	0	8
v	5	3	0	1	0	15
	−120	−100	0	0	1	0

Μια βασική μεταβλητή έχει τις εξης ιδιότητες:

1) εμφανίζεται μόνο σε μια εξίσωση και έχει συντελεστή 1.
2) η στήλη κάτω από αυτήν έχει μόνο μηδενικά, προφανώς εκτός από τη γραμμή η οποία παίρνει το όνομα της από τη βασική μεταβλητή.
3) η τιμή της είναι το στοιχείο της τελευταίας στήλης.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Για ένα γενικό πρόβλημα είναι: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \cdots + 0 \cdot x_{n+m}$

και για την αρχική βασική εφικτή λύση:

$$z = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_m = 0.$$

και ο πίνακας είναι:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	z	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	0	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	1	0

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Για το πρόβλημά μας z=120 x 0 + 100 x 0 + 0 x 8 + 0 x 15 =0.

Τα επόμενα επαναληπτικά βήματα της μεθόδου δίδονται παρακάτων.

Αρχικά ζητάμε ένα κριτήριο για να ελέγχουμε αν βασική εφικτή λύση στον πίνακα είναι η βέλτιστη. Για το παράδειγμα μας μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της z αυξάνοντας κάποια από τις μη-βασικές μεταβλητές (δλδ μία από τις x, y με θετικό συντελεστή) από το 0 σε κάποια θετική τιμή.

Για έναν τυχαίο πίνακα, μπορούμε να γράψουμε την αντικειμενική συνάρτηση έτσι ώστε οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών να είναι μηδεν, δλδ

$$z = \sum_{\text{nonbasic}} d_j x_j + \sum_{\text{basic}} 0 \cdot x_i,$$

και τα dj είναι τα αρνητικά των τιμών της αντικειμενικής σειράς. Έτσι, η παραπάνω έχει κάποιους θετικούς συντελεστές iff η αντικειμενική σειρά έχει κάποιους αρνητικούς όρους. Οπότε η z αυξάνει, θέτοντας από 0 σε κατι >0 μία από αυτές.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Τότε, κάποια βασική μεταβλητή πρέπει να γίνει μηδέν δεδομένου ότι ο αριθμός των βασικών μεταβλητών πρέπει να μένει σταθερός. Έτσι προκύπτει το κριτήριο:

Αν η αντικειμενική σειρά έχει μηδενικά στοιχεία στις στήλες των βασικών μεταβλητών και θετικές στις στήλες των μη-βασικών, τότε η λύση αυτή είναι η βέλτιστη.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Ας υποθέσουμε ότι η αντικειμενική σειρά δεν ικανοποιεί το προηγούμενο κριτήριο. Οπότε, η λύση δεν είναι η βέλτιστη και για αυτό πρέπει να προχωρήσουμε σε μια συσχετιζόμενη λύση.

Η μέθοδος προχωρά έτσι ώστε η z να αυξάνει. Προχωράμε σε κάθε ακρότατο αυξάνοντας μια μηδενική μεταβλητή και θέτοντας μια θετική μεταβλητή σε μηδενική. Στο παράδειγμά μας αυτή θα είναι η x (στην αντικειμενική σειρά έχει συντελεστή -120). Αυτή ονομάζεται πλέον **μεταβλητή εισαγωγής** γιατί στην επόμενη επανάληψη θα γίνει βασική μεταβλητή.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Στο παράδειγμά μας για τις βασικές μεταβλητές u, v μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} u &= 8 - 2x - 2y \\ v &= 15 - 5x - 3y. \end{aligned}$$

Και κρατάμε την y=0 και αυξάνουμε την x: $\left.\begin{aligned} u &= 8 - 2x \\ v &= 15 - 5x \end{aligned}\right\},$

Όμως όσο αυξάνει η x τόσο μικραίνουν και οι u,v. Η x μπορεί να αυξάνεται μέχρι κάποια από τις u, v να γίνει αρνητική. Δλδ:

$$\begin{aligned} 0 \le u &= 8 - 2x \\ 0 \le v &= 15 - 5x \end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς x:

$$2x \le 8 \quad \text{or} \quad x \le 8/2 = 4$$

$$5x \le 15 \quad \text{or} \quad x \le 15/5 = 3.$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

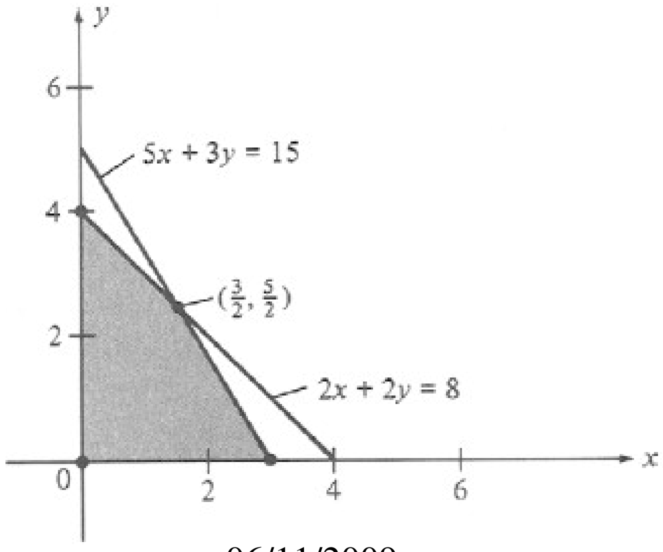
Βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να αυξήσουμε το x περισσότερο από την μικρότερη από τις δύο τιμές. Έτσι x=3, και προκύπτει μια νέα εφικτή λύση

$$x=3,\ y=0,\ u=2,\ v=0$$

Επίσης, πρόκειται για μια βασική εφικτή λύση, και είναι συσχετιζόμενη με την προηγούμενη γιατί μόνο μια μεταβλητή έγινε από βασική μη-βασική. Οι δύο νέες βασικές μεταβλητές είναι x, u και η z είναι:

$$z=120 \times 3 + 100 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 0=360.$$

Αυτή η τιμή αντιστοιχεί στο ακρότατο (3,0)



Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Η μεταβλητή που άλλαξε από βασική σε μη-βασική, δλδ η v, λέγεται αποχωρούσα παράμετρος. Η στήλη της εισαγομένης μεταβλητής λέγεται pivotal column και η γραμμή της αποχωρούσας μεταβλητής pivotal raw.

Οι λόγοι των τιμών της δεξιότερης στήλης προς τις τιμές της pivotal column ονομάζονται **θ-λόγοι**. Ο μικρότερος θετικός θ-λόγος αποτελεί την μέγιστη δυνατή τιμή για την εισαγόμενη μεταβλητή. Η μεταβλητή για την οποία ισχύει αυτό αποτελεί την αποχωρούσα μεταβλητή και αντίστοιχα η σειρά είναι η pivotal raw. Στο παράδειγμά μας: min{8/2,15/5)=3.

Αν δεν εκλεγεί ο μικρότερος θ τότε η επόμενη βασική λύση (γιατί είναι βασική;) δε θα είναι εφικτή. Ας υποθέσουμε ότι διαλέγαμε τη u ως αποχωρούσα θεωρώντας το θ=4. Τότε το x=4 και θα ήταν:

$$u = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$
$$v = 15 - 5 \cdot 4 = -5$$

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Δηλαδή η επόμενη βασική λύση θα ήταν x=4, y=0, u=0, v=-5 που δεν είναι εφικτή.

Στην pivotal column τα στοιχεία μπορεί να είναι >, < ή =0. Οπότε οι λόγοι είναι: >0, <0 (όπου συνεπάγεται ότι η εισανόμενη μεταβλητή μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα), π.χ αν είχαμε $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ instead of $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. στην pivotal column

τότε θα ήταν $\begin{aligned} u &= 8 + 2x \\ v &= 15 - 5x. \end{aligned}$ και επειδή πρέπει το u>0 θα πρέπει: $8 + 2x \geq 0$ or $x \geq -4$

Οπότε μπορούμε να αγνοούμε τις αρνητικές τιμές όταν υπολογίζουμε τους θ.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Για την κατασκευή του επόμενου πίνακα έχουμε καταρχήν την εισαγόμενη και την αποχωρούσα μεταβλητή. Στον νέο πίνακα θα πρέπει να έχουμε τις νέες βασικές παραμέτρους και την νεα βασική εφικτή λύση. Από την

$$5x+3y+v=15$$

προκύπτει ότι $x = 3 - 3/5y - 1/5v$

Και με αντικατάσταση στην $2x+2y+u=8$

προκύπτει ότι $\mathbf{4/5y + u - 2/5v = 2}$

ενώ $\mathbf{x + 3/5y + 1/5v = 3}$

και τελικά η $(-120)(3 - 3/5y - 1/5v) - 100y + z = 0$

γίνεται $\mathbf{z - 28v + 24v = 360}$.

Ενώ ο πίνακας είναι:

	x	y	u	v	z	
u	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	0	2
x	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	3
	0	-28	0	24	1	360

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν είναι:
(βήμα α) κύκλωσε το σημείο τομής των pivotals. Αυτό ονομάζεται pivot. Στην pivotal column βάλε ένα ⬇ πάνω από την εισαγόμενη και στην raw ένα ⬅ στα αριστερά της αποχωρούσας.
(βήμα β) αν ο pivot είναι k, πολλαπλασίασε την pivotal raw με 1/k, έτσι το πρώτο στοιχείο γίνεται 1.
(βήμα γ) πολλαπλασίασε κατάλληλα τις άλλες ώστε η pivotal raw να έχει μηδενικά
(βήμα δ) στον νέο πίνακα, αντικατέστησε το όνομα της pivotal raw με την εισαγόμενη μεταβλητή.

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν είναι:

(βήμα α) κύκλωσε το σημείο τομής των pivotals. Αυτό ονομάζεται pivot. Στην pivotal column βάλε ένα ⬇ πάνω από την εισαγόμενη και στην raw ένα ⬅ στα αριστερά της αποχωρούσας.
(βήμα β) αν ο pivot είναι k, πολλαπλασίασε την pivotal raw με 1/k, έτσι το πρώτο στοιχείο γίνεται 1.
(βήμα γ) πολλαπλασίασε κατάλληλα τις άλλες ώστε η pivotal raw να έχει μηδενικά
(βήμα δ) στον νέο πίνακα, αντικατέστησε το όνομα της pivotal raw με την εισαγόμενη μεταβλητή.

		↓					
		x	y	u	v	z	
	u	2	2	1	0	0	8
←	v	5	3	0	1	0	15
		−120	−100	0	0	1	0

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

Ο πίνακας προέκυψε από εφαρμογή της Διαδικασίας pivoting. Την οποία εφαρμόζουμε πλέον σε αυτόν τον πίνακα.

	x	y	u	v	z	
u	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	0	2
x	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	3
	0	-28	0	24	1	360

Η πιο αρνητική τιμή στην objective raw Εμφανίζεται στην στήλη του y, οπότε αυτή είναι η εισαγόμενη μεταβλητή και η αντίστοιχη στήλη είναι η pivotal column. Για την εύρεση της αποχωρούσας σχηματίζουμε τους λόγους θ (τα στοιχεία της τελευταίας δεξίας προς τα στοιχεία της pivotal column, όχι της αντικειμενικής σειράς!!!). Έτσι έχουμε:

2/(4/5)=5/2 και 3/(3/5)=5.

Η μικρότερη τιμή είναι το 5/2, που αντιστοιχεί στην πρώτη σειρά. Οπότε η pivotal raw είναι η πρώτη σειρά, ο pivot είναι το 4/5 και η αποχωρούσα είναι η u. Δηλαδή ο πίνακας γίνεται:

		x	y ↓	u	v	z	
←	u	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	0	2
	x	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	3
		0	-28	0	24	1	360

Φιλοσοφία της μεθόδου Simplex

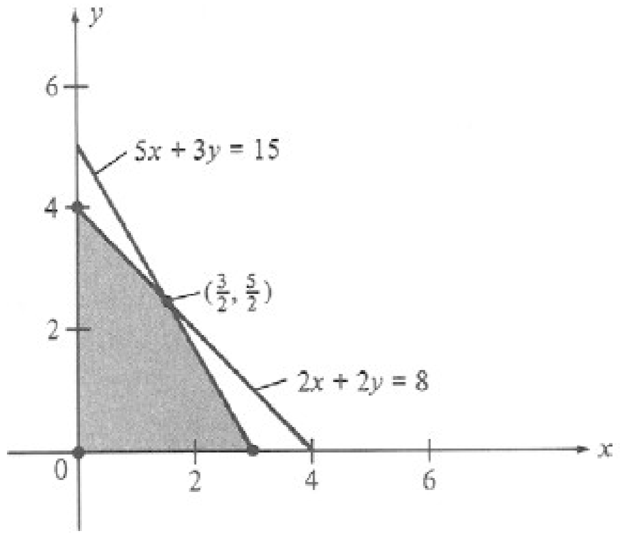
Στον τελευταίο πίνακα παρατηρούμε ότι: Η αντικειμενική σειρά δεν έχει αρνητικές τιμές, οπότε ολοκληρώθηκε η διαδικασία. Και η λύση είναι:

x=3/2, y=5/2, u=0, v=0

ή

	x	y	u	v	z	
y	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
	0	0	35	10	1	430

Ενώ στο σχήμα πήγαμε σταδιακά από το (0,0)->(3,0)->(3/2,5/2).



Παράδειγμα της μεθόδου Simplex

Maximize $z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3$

subject to

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$$
$$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Παράδειγμα της μεθόδου Simplex

Εισάγουμε μεταβλητές υστέρησης

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad z = 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 \\
&\text{subject to} \\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
&2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3 \\
&6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \\
&x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα της μεθόδου Simplex

Και η διαδικασία είναι:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	1	2	1	0	0	2
x_5	2	3	4	0	1	0	3
x_6	6	6	2	0	0	1	8
	−8	−9	−5	0	0	0	0

Παράδειγμα της μεθόδου Simplex

Και η διαδικασία είναι:

		↓						
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	x_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1
←	x_6	2	0	-6	0	-2	1	2
		-2	0	7	0	3	0	9

Παράδειγμα της μεθόδου Simplex

Και η διαδικασία είναι:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	0	-3	0	-1	$\frac{1}{2}$	1
	0	0	1	0	1	1	11

Παράδειγμα της μεθόδου Simplex

Και προκύπτει η λύση: $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 0.$

Ενώ για τις μεταβλητές υστέρησης: $x_4 = \frac{2}{3}, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$