Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του.

Για να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία δυϊκότητας αλλάζουμε την μορφή του πίνακα της μεθόδου simplex, προσθέτοντας μια σειρά και μια στήλη. Η σειρά προστίθεται πάνω από την σειρά με τα ονόματα των βασικών και μη παραμέτρων και περιέχει το: $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_s]$. Ενώ η στήλη προστίθεται στα αριστερά της στήλης με τις βασικές μεταβλητές και περιέχει το διάνυσμα:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του $\mathbf{c}_{\mathbf{B}}$ μπορούν να προκύψουν από τα αντίστοιχα του $\mathbf{c}$.

Ενώ το βήμα που υπολογίζαμε τον pivot και κάναμε την αλλαγή μπορεί να αλλάξει έτσι ώστε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της αντικειμενικής σειράς από την $z_j - c_j = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}_j - c_j$. Θυμηθείτε ότι τα στοιχεία της αντικειμενικής σειράς είναι z_j-c_j.

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Έστω το πρόβλημα ΓΠ:

Maximize $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$

subject to

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \qquad + x_7 \qquad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \qquad &= 18 \\
3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \qquad + x_8 &= 24 \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 8.&
\end{aligned}$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Οπότε:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & & & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \end{array}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ο Πίνακας **A** περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα αν αναδιατάξουμε τις στήλες και τις βάλουμε 7,6,8.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Ο αρχικός πίνακας για την μέθοδο των δύο φάσεων είναι:

$\mathbf{c}_B$		0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	−1 x_7	−1 x_8	$\mathbf{x}_B$
−1	x_7	1	2	2	1	1	0	1	0	12
0	x_6	1	2	1	1	2	1	0	0	18
−1	x_8	3	6	2	1	3	0	0	1	24

Όπου η αντικειμενική σειρά δεν είναι συμπληρωμένη. Για τον σκοπό αυτό βρίσκουμε:

$$\mathbf{c}_B^T = [\,-1 \quad 0 \quad -1\,]$$

Επειδή είναι: $i_1 = 7, i_2 = 6,$ and $i_3 = 8.$ (δλδ οι δείκτες των “βασικών” παραμέτρων). Οι τιμές προκύπτουν από την μέθοδο των δύο φάσεων όπου η “νέα” αντικειμενική συνάρτηση είναι: $z=-x_7-x_8$, ($\mathbf{c}$=[0 0 0 0 0 0 -1 -1]).

Δεν βάζουμε 3 τεχνητές παραμέτρους γιατί τον ρόλο αυτόν μπορεί να τον παίξει η x_6.

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Ο αρχικός πίνακας για την μέθοδο των δύο φάσεων είναι:

		0	0	0	0	0	0	−1	−1	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\mathbf{x}_B$
−1	x_7	1	2	2	1	1	0	1	0	12
0	x_6	1	2	1	1	2	1	0	0	18
−1	x_8	3	6	2	1	3	0	0	1	24

Για το στοιχείο της στήλης 1 της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$z_1 - c_1 = [\,-1 \quad 0 \quad -1\,]\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} - 0 = -4.$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Ενώ ο συμπληρωμένος πίνακας είναι:

	$\mathbf{c}_B$		0	0 ↓	0	0	0	0	−1	−1	$\mathbf{x}_B$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
	−1	x_7	1	2	2	1	1	0	1	0	12
	0	x_6	1	2	1	1	2	1	0	0	18
←	−1	x_8	3	6	2	1	3	0	0	1	24
			−4	−8	−4	−2	−4	0	0	0	−36

Οπότε pivot είναι το 6 άρα εισέρχεται η x_2 και εξέρχεται η x_8. Οι βασικές μεταβλητές θα είναι οι x_7,x_6,x_2 άρα $i_1 = 7$, $i_2 = 6$, and $i_3 = 2$. και

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Και ο πίνακας γίνεται:

			↓						
	0	0	0	0	0	0	−1	−1	
$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\mathbf{x}_B$
← −1 x_7	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	4
0 x_6	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	10
0 x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{6}$	4
	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	−4

Και για επαλήθευση:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Ισχύει επίσης: $t_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j,\ j = 1, 2, \ldots, 8,$

$$t_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ενώ το στοιχείο της τρίτης στήλης υπολογίζεται ως:

$$z_3 - c_3 = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}_3 - c_3 = [\,-1 \quad 0 \quad 0\,] \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 0 = -\frac{4}{3}.$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Και τελικά καταλήγουμε:

$\mathbf{c}_B$		0 x_1	0 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	-1 x_7	-1 x_8	$\mathbf{x}_B$
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
0	x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	9
0	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	3
		0	0	0	0	0	0	1	1	0

Το οποίο αποτελεί λύση του βοηθητικού προβλήματος. Για το κανονικό πρόβλημα διαγράφουμε τις στήλες για τα x_7, x_8. Ενώ τα στοιχεία της αντικειμενικής σειράς υπολογίζονται όπως και πριν:

	$\mathbf{c}_B$		↓ 1 x_1	-2 x_2	-3 x_3	-1 x_4	-1 x_5	2 x_6	$\mathbf{x}_B$
	-3	x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
	2	x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
←	-2	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3
			-2	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	3

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του.

Συνοψίζοντας: Είχαμε ένα πρόβλημα στην κανονική του μορφή

$$\text{Maximize} \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{subject to}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

Και εισάγαμε τεχνητές μεταβλητές, οπότε για τη **φάση 1** χρησιμοποιήσαμε μια διαφορετική αντικειμενική συνάρτηση, την:

$$\text{Minimize} \quad z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

Όπου τα y_i είναι οι τεχνητές μεταβλητές.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (φάση 2).

Ας υποθέσουμε ότι στο τέλος της προηγούμενης διαδικασίας (**φάση 1**) εξακολουθούσαν να υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές που “συμπεριφέρονταν” ως βασικές. Τότε, εισερχόμαστε στην φάση 2.

Ο αρχικός πίνακας της 2 είναι ο τελικός της 1, με τις ακόλουθες τροποποιήσεις:
(α) διαγράφουμε τις στήλες με μη βασικές τεχνητές παραμέτρους.
(β) αντικαθιστούμε την πρώτη γραμμή με τις τιμές της πραγματικής αντικειμενικής συνάρτησης, θέτοντας 0 ως συντελεστή για τις βασικές τεχνητές παραμέτρους.
(γ) υπολογίζουμε το νέο διάνυσμα $\mathbf{c}_\mathbf{B}$ από την νέα 1η γραμμή.
(δ) υπολογίζουμε τα στοιχεία της νέας αντικειμενικής σειράς ως: $z_j - c_j = \mathbf{c}_\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathbf{t}_j - c_j.$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (φάση 2).

Στη διαδικασία αυτή θα πρέπει να προσέξουμε το εξής: οι τεχνητές παράμετροι να μην έχουν θετικές τιμές. Αυτό θα συμβεί αν μία από αυτές παραμείνει βασική και όταν κάνουμε την απαλοιφή των “από πάνω” και “από κάτω” όρων της στήλης προκύψει μια θετική τιμή στον $\mathbf{x}_B$.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Έστω το πρόβλημα.

$$\text{Maximize} \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 15 \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 &= 50 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Εισάγουμε τεχνητές παραμέτρους και αλλάζουμε και την αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{Minimize} \quad z = y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + y_1 &= 15 \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 + y_2 &= 50 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + y_3 &= 20 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3; \qquad y_i \geq 0, \quad i &= 1,2,3. \end{aligned}$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Για να προκύψει η νέα αντικειμενική συνάρτηση πρέπει στην z' να προσθέσουμε
(-1) x την 1η ισότητα
(-1) x την 2η ισότητα
(-1) x την 3η ισότητα. Και ο πίνακας γίνεται αρχικά:

	x_1 ↓	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
← y_1	3	1	-1	1	0	0	15
y_2	8	4	-1	0	1	0	50
y_3	2	2	1	0	0	1	20
	-13	-7	1	0	0	0	-85

Και εφαρμόζοντας την μέθοδο Simplex.

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	7
y_2	0	0	0	-2	1	-1	0
x_3	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	6
	0	0	0	3	0	2	0

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Για να έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης η νέα αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι:

$$\text{Maximize} \quad z = -y_1 - y_2 - y_3$$

Και προκύπτουν οι πίνακες:

			↓						
			0	0	0	−1	−1	−1	
	$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{x}_B$
←	−1	y_1	3	1	−1	1	0	0	15
	−1	y_2	8	4	−1	0	1	0	50
	−1	y_3	2	2	1	0	0	1	20
			−13	−7	1	0	0	0	−85

Όπου:

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

		↓						
		0	0	0	−1	−1	−1	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{x}_B$
← −1	y_1	3	1	−1	1	0	0	15
−1	y_2	8	4	−1	0	1	0	50
−1	y_3	2	2	1	0	0	1	20
		−13	−7	1	0	0	0	−85

Και

$$z_1 - c_1 = [\,-1 \quad -1 \quad -1\,]\begin{bmatrix}3\\8\\2\end{bmatrix} - 0 = -13.$$

$$z_2 - c_2 = [\,-1 \quad -1 \quad -1\,]\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix} - 0 = -7$$

$$z_3 - c_3 = 1.$$

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

			↓						
			0	0	0	−1	−1	−1	
	$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{x}_B$
←	−1	y_1	3	1	−1	1	0	0	15
	−1	y_2	8	4	−1	0	1	0	50
	−1	y_3	2	2	1	0	0	1	20
			−13	−7	1	0	0	0	−85

Και για τις βασικές παραμέτρους: $z_4 - c_4 = [-1 \quad -1 \quad -1]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - (-1) = 0$

$$z_5 - c_5 = 0 \text{ and } z_6 - c_6 = 0.$$

Ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$[-1 \quad -1 \quad -1]\begin{bmatrix}15\\50\\20\end{bmatrix} = -85$$

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

και:

	$\mathbf{c}_B$		0	0	0 ↓	-1	-1	-1	$\mathbf{x}_B$
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
	0	x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	5
←	-1	y_2	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	0	10
	-1	y_3	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	10
			0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	0	-20

	$\mathbf{c}_B$		0	0	0	-1 ↓	-1	-1	$\mathbf{x}_B$
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
	0	x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	7
	0	x_3	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{8}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	6
←	-1	y_3	0	0	0	2	-1	1	0
			0	0	0	-1	2	0	0

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

		0	0	0	−1	−1	−1	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{x}_B$
0	x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	7
0	x_3	0	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	6
−1	y_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
		0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Οπότε η **φάση 1** έχει μια βέλτιστη λύση την: $x_1 = 7,\ x_3 = 6,\ y_1 = 0$

Και z=0.

Παρατηρούμε ότι η y_1 εμφανίζεται ως βασική μεταβλητή.

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Οπότε ξεκινάμε να μεταβάλουμε τον τελικό πίνακα της **φάσης 1** για να ξεκινήσει η **φάση 2**.

		0	0	0	-1	-1	-1	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	$\mathbf{x}_B$
0	x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	7
0	x_3	0	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	6
-1	y_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
		0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ώστε: διαγράφουμε τις στήλες για τα y_2, y_3. Το “βάρος” της y_1 είναι 0. Και η αντικειμενική σειρά συμπληρώνεται από τις τιμές $z_j - c_j$.

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εισαγωγή στον γραμμικό προγραμματισμό (ΓΠ)

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Άρα ξεκινάει η **φάση 2** με τον πίνακα:

		↓				
		1	2	1	0	
$\mathbf{c}_B$		x_1	x_2	x_3	y_1	$\mathbf{x}_B$
1	x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	0	7
← 1	x_3	0	$\frac{4}{5}$	1	0	6
0	y_1	0	0	0	1	0
		0	$-\frac{3}{5}$	0	0	13

Εφαρμόζουμε την μέθοδο Simplex. Για την εκλογή της απελθούσας μεταβλητής βεβαιωνόμαστε ότι η τιμή στην τομή της σειράς και της στήλης της y_1 είναι >0. Αν δεν είναι τότε αυτόματα διαλέγουμε την y_1 ως απελθούσα μεταβλητή.

Σχέσεις μεταξύ του πρωτεύοντος και του δυϊκού του (παράδειγμα).

Ο πίνακας που προκύπτει είναι:

$\mathbf{c_B}$		1 x_1	2 x_2	1 x_3	0 y_1	$\mathbf{x_B}$
1	x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
2	x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{15}{2}$
0	y_1	0	0	0	1	0
		0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{35}{2}$

Και "αναγκαστικά" η βέλτιστη λύση είναι: $x_1 = \frac{5}{2}$ και z=35/2.

$$x_2 = \frac{15}{2}$$

$$x_3 = 0,$$