Κατηγορηματική Λογική

Βασίλης Κουντουριώτης

Γιατί δεν μας αρκεί η Προτασιακή Λογική;

Έστω ότι ισχύουν τα P και Q:

P : «Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος»
Q : «Κάθε άνθρωπος είναι θνητός»
R : «Ο Σωκράτης είναι θνητός»

Μπορούμε να συμπεράνουμε το R;

Όχι!

(Τα P,Q και R είναι εντελώς ανεξάρτητα)

Γιατί δεν μας αρκεί η Προτασιακή Λογική;

Για την προτασιακή λογική οι προτάσεις

P : «Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος»
Q : «Κάθε άνθρωπος είναι θνητός»
R : «Ο Σωκράτης είναι θνητός»

δεν διαφοροποιούνται από τις προτάσεις

P' : «Έξω βρέχει»
Q' : «Έξω δεν βρέχει»
R' : «Η προτασιακή λογική είναι πολύ στατική»

Είναι σαφές όμως ότι οι P,Q μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα ενώ οι P',Q' όχι.

Κατηγορηματική Λογική to the rescue!

κατηγόρημα : χαρακτηρισμός **χωρίς υποκείμενο**

P : «Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος»

Q : «Κάθε τι το οποίο είναι άνθρωπος είναι θνητό»

R : «Ο Σωκράτης είναι θνητός»

«είναι άνθρωπος» και «είναι θνητός» είναι κατηγορήματα.

Θέτουμε:

human : «είναι άνθρωπος»

mortal : «είναι θνητός»

Κατηγορηματική Λογική to the rescue!

Προτασιακή Λογική:

P : «Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος»

Q : «Κάθε τι το οποίο είναι άνθρωπος είναι θνητό»

R : «Ο Σωκράτης είναι θνητός»

Κατηγορηματική Λογική:

P : human(Σωκράτης)

Q : Για κάθε X ισχύει : human(X) $\longrightarrow$ mortal(X)

R : mortal(Σωκράτης)

Τί πετύχαμε;

P : human(Σωκράτης)

Q : Για κάθε X ισχύει: human(X) $\longrightarrow$ mortal(X)

R : mortal(Σωκράτης)

Έστω ότι ισχύουν:

1. human(Σωκράτης)
2. Για κάθε X ισχύει: human(X) $\longrightarrow$ mortal(X)

Λόγω του 2. θα ισχύει και:

2α. human(Σωκράτης) $\longrightarrow$ mortal(Σωκράτης)

Τί πετύχαμε;

P : human(Σωκράτης)

Q : Για κάθε X ισχύει: human(X) $\longrightarrow$ mortal(X)

R : mortal(Σωκράτης)

Έστω ότι ισχύουν:

1. human(Σωκράτης)
2. Για κάθε X ισχύει: human(X) $\longrightarrow$ mortal(X)

Λόγω του 2. θα ισχύει και:

2a. human(Σωκράτης) $\longrightarrow$ mortal(Σωκράτης)

Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{human(Σωκράτης)} \\ \text{human(Σωκράτης)} \longrightarrow \text{mortal(Σωκράτης)} \end{array} \right\} \models \text{mortal(Σωκράτης)}$$

Συναρτησιακά σύμβολα

Κατηγορήματα : αναφέρονται σε χαρακτηριστικά οντοτήτων
$\Rightarrow$ είναι True/False.

Συναρτησιακά σύμβολα : αναφέρονται σε οντότητες και
``επιστρέφουν'' *οντότητες*.

Συναρτησιακά σύμβολα

Κατηγορήματα : αναφέρονται σε χαρακτηριστικά οντοτήτων
$\Rightarrow$ είναι True/False.

$$\underbrace{\text{mortal(socrates)}}_{\text{True}}, \quad \underbrace{\text{rich(bill\_gates)}}_{\text{True}}, \quad \underbrace{\text{poor(bill\_gates)}}_{\text{False}}, \quad \underbrace{\text{even(9)}}_{\text{False}}$$

Συναρτησιακά σύμβολα : αναφέρονται σε οντότητες και ``επιστρέφουν'' *οντότητες*.

Συναρτησιακά σύμβολα

Κατηγορήματα : αναφέρονται σε χαρακτηριστικά οντοτήτων
$\Rightarrow$ είναι True/False.

$\underbrace{\text{mortal(socrates)}}_{\text{True}}$, $\underbrace{\text{rich(bill\_gates)}}_{\text{True}}$, $\underbrace{\text{poor(bill\_gates)}}_{\text{False}}$, $\underbrace{\text{even(9)}}_{\text{False}}$

Συναρτησιακά σύμβολα : αναφέρονται σε οντότητες και
``επιστρέφουν'' *οντότητες*.

$\underbrace{\text{company\_of(bill\_gates)}}_{\textit{microsoft}}$, $\underbrace{\text{student\_of(socrates)}}_{\textit{plato}}$, $\underbrace{\text{succ(0)}}_{1}$, $\underbrace{\text{succ(succ(0))}}_{2}$

Συναρτησιακά σύμβολα

Κατηγορήματα : αναφέρονται σε χαρακτηριστικά οντοτήτων
$\Rightarrow$ είναι True/False.

$$\underbrace{\text{mortal(socrates)}}_{\text{True}},\ \underbrace{\text{rich(bill\_gates)}}_{\text{True}},\ \underbrace{\text{poor(bill\_gates)}}_{\text{False}},\ \underbrace{\text{even(9)}}_{\text{False}}$$

Συναρτησιακά σύμβολα : αναφέρονται σε οντότητες και
``επιστρέφουν'' *οντότητες*.

$$\underbrace{\text{company\_of(bill\_gates)}}_{\textit{microsoft}},\ \underbrace{\text{student\_of(socrates)}}_{\textit{plato}},\ \underbrace{\text{succ(0)}}_{1},\ \underbrace{\text{succ(succ(0))}}_{2}$$

Φυσικά, συνδυάζονται:

$$\underbrace{\text{successful(company\_of(bill\_gates))}}_{\text{True}}$$

Κατηγορήματα / Συναρτησιακά σύμβολα

Μνημονικός κανόνας

Κατηγορήματα:

``έξω-έξω'', μόνο ένα τη φορά.

Συναρτησιακά Σύμβολα:

«οπουδήποτε μπορούμε να βάλουμε κάποια οντότητα (πχ socrates, bill_gates, . . .) μπορούμε να βάλουμε ένα συναρτησιακό σύμβολο».

ποτέ ``έξω-έξω''.

Arity ή Βαθμός

κατηγορήματος / συναρτησιακού συμβόλου

Πώς θα μπορούσαμε να περιγράψουμε με ένα κατηγόρημα την πρόταση:

« . . . είναι πατέρας του . . . »

Arity ή Βαθμός

κατηγορήματος / συναρτησιακού συμβόλου

Πώς θα μπορούσαμε να περιγράψουμε με ένα κατηγόρημα την πρόταση:

« . . . είναι πατέρας του . . . »

Χρησιμοποιώντας περισσότερα από ένα ορίσματα στα κατηγορήματα!

$\underbrace{\text{is\_father\_of(jim, tom)}}_{\text{True/False}}$: *« ο jim είναι πατέρας του tom »*

$\underbrace{\text{is\_the\_sum\_of(2, 6, 9)}}_{\text{False}}$: *« 2 + 6 = 9 »*

$\underbrace{\text{sum(2, 6)}}_{8}$: *« 2 + 6 »*

Ποσοτικοποίηση προτάσεων

Υπαρξιακός ποσοδείκτης ($\exists$) : «Υπάρχει Χ τέτοιο ώστε . . . »

Η πρόταση λέγεται *υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη*

Καθολικός ποσοδείκτης ($\forall$) : «Για κάθε Χ ισχύει ότι . . . »

Η πρόταση λέγεται *καθολικά ποσοτικοποιημένη*

Το αρχικό παράδειγμα, λίγο πιο αυστηρά

Ισχύουν:

$$\text{human}(\text{Σωκράτης})$$
$$(\forall X \ \text{human}(X) \rightarrow \text{mortal}(X))$$

Απ' όπου συμπεραίνουμε ότι:

$$\text{mortal}(\text{Σωκράτης})$$

Ατομικός όρος / Ατομική πρόταση (Atom)

Ατομικός όρος : *(Διασθητικά : οντότητες)*

1. Κάθε μεταβλητή ή σταθερά είναι όρος.

2. Αν $t_1, \ldots, t_n$ όροι και f συναρτησιακό σύμβολο n ορισμάτων, τότε το $f(t_1, \cdots, t_n)$ είναι όρος.

Ατομικός όρος / Ατομική πρόταση (Atom)

Ατομικός όρος: *(Διασθητικά: οντότητες)*

1. Κάθε μεταβλητή ή σταθερά είναι όρος.

2. Αν $t_1, \ldots, t_n$ όροι και f συναρτησιακό σύμβολο n ορισμάτων, τότε το $f(t_1, \cdots, t_n)$ είναι όρος.

Ατομική πρόταση: *(Διασθητικά: πρόταση χωρίς λογικά συνδετικά)*

1. Αν $t_1, \ldots, t_n$ όροι και p κατηγόρημα n ορισμάτων, τότε το $p(t_1, \cdots, t_n)$ είναι ατομική πρόταση.

Πρόταση

1. Κάθε ατομική πρόταση είναι πρόταση.
2. Αν ϕ, ψ προτάσεις τότε είναι και τα:

$$(\neg\phi), \quad (\phi \wedge \psi), \quad (\phi \vee \psi), \quad (\phi \rightarrow \psi), \quad (\phi \leftrightarrow \psi)$$

3. Αν ϕ πρόταση και x μεταβλητή τότε είναι και τα:

$$(\exists x\ \phi), \quad (\forall x\ \phi)$$

Ελεύθερες/Δεσμευμένες Μεταβλητές

Ελεύθερες: μεταβλητές που **δεν** βρίσκονται στην *εμβέλεια* κάποιου ποσοδείκτη.

πχ: η x στις άκόλουθες προτάσεις:

$$(\forall y\, p(x) \wedge q(y) \rightarrow r(y))$$
$$(\forall y\, p(y) \wedge q(x) \rightarrow p(x)) \;\wedge\; (\forall x\, r(x) \rightarrow k(x))$$

Δεσμευμένες: μεταβλητές που βρίσκονται στην *εμβέλεια* κάποιου ποσοδείκτη.

Προτάσεις χωρίς ελεύθερες μεταβλητές χαρακτηρίζονται κλειστές.

Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω σύνολα A, B. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι ένα σύνολο που περιέχει σαν στοιχεία όλους τους συνδυασμούς των στοιχείων του A με τα στοιχεία του B.

$$A \times B = \{\, (x, y) \mid x \in A \text{ και } y \in B \,\}$$

Παράδειγμα:

$A = \{a, b, c\}$
$B = \{d, e\}$

$$A \times B = \{\, (a, d),\ (a, e),\ (b, d),\ (b, e),\ (c, d),\ (c, e) \,\}$$

Καρτεσιανό γινόμενο *n* όρων

Έστω σύνολα $A_1, \ldots, A_n$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times \cdots \times A_n$ είναι το σύνολο:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \text{ και } \cdots \text{ και } x_n \in A_n \}$$

Παράδειγμα:

$$A = \{a_1, a_2\}$$
$$B = \{b_1, b_2\}$$
$$C = \{c_1, c_2\}$$

$$A \times B \times C = \{ (a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1), (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2) \}$$

Καρτεσιανή δύναμη

Έστω σύνολο A. Η καρτεσιανή δύναμη A^n είναι το σύνολο:

$$\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n} = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

Παράδειγμα:

$$A = \{a, b\}$$
$$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Μοντέλο M

Ένα Μοντέλο περιέχει:

1 Το σύνολο των στοιχείων που μας απασχολούν (το *σύμπαν* των στοιχείων): $|M|$

2 Για κάθε συναρτησιακό σύμβολο f με n ορίσματα, μια συνάρτηση $M(f)$:

$$M(f) : |M|^n \rightarrow |M|$$

2a Για κάθε σταθερά c, ένα στοιχείο του $|M|$: $M(c) \in |M|$

3 Για κάθε κατηγόρημα p με n ορίσματα, ένα σύνολο $M(p)$:

$$M(p) : M(p) \subseteq |M|^n$$

Τιμή αλήθειας μιας πρότασης

Η τιμή μιας κλειστής πρότασης είναι καλώς ορισμένη από το εκάστοτε μοντέλο M. Για παράδειγμα:

$$(\exists x\; p(x))$$
$$(\forall x\; p(x) \rightarrow q(x))$$

Για τις προτάσεις που δεν είναι κλειστές όμως;

$$p(x)$$
$$p(x) \rightarrow q(x)$$

Περιβάλλον s ενός μοντέλου M

Το περιβάλλον είναι μια συνάρτηση:

$$s : [\text{μεταβλητές}] \longrightarrow |M|$$

πχ. $s(x) = jim, \quad s(y) = tom.$

$$s[x \mapsto a](y) = \begin{cases} a, & \text{αν } y \text{ είναι η μεταβλητή } x \\ s(y), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το $s[x \mapsto a]$ το γράφουμε και $s[x/a]$.

Εκτεταμένο μοντέλο $\widehat{M_s}$

μέσω ενός περιβάλλονοτος s

Η επέκταση ενός μοντέλου M ως προς ένα περιβάλλον s ορίζεται:

1. Αν x μεταβλητή τότε: $\widehat{M_s}(x) = s(x)$
2. Αν c σύμβολο σταθεράς τότε: $\widehat{M_s}(c) = M(c)$
3. Αν f συναρτησιακό σύμβολο n ορισμάτων και $t_1, \ldots, t_n$ όροι τότε:

$$\widehat{M_s}(f(t_1, \ldots, t_n)) = M(f)(\widehat{M_s}(t_1), \ldots, \widehat{M_s}(t_n))$$

Η πρόταση ϕ είναι αληθής στο M στο περιβάλλον s:

$$M, s \models \phi \qquad \text{ή} \qquad M \models_s \phi$$

Ορισμός αλήθειας κατά Tarski

- $M, s \models p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ανν $(\hat{M}_s(t_1), \hat{M}_s(t_2), \ldots, \hat{M}_s(t_n)) \in M(p)$
- $M, s \models \neg\phi$ ανν $M, s \not\models \phi$
- $M, s \models \phi \wedge \psi$ ανν $M, s \models \phi$ και $M, s \models \psi$
- $M, s \models \phi \vee \psi$ ανν $M, s \models \phi$ ή $M, s \models \psi$
- $M, s \models \phi \implies \psi$ ανν $M, s \models \phi$ συνεπάγεται $M, s \models \psi$
- $M, s \models \phi \iff \psi$ ανν $M, s \models \phi$ ισοδυναμεί $M, s \models \psi$
- $M, s \models \forall x\, \phi$ ανν για κάθε $d \in |M|$ ισχύει $M, s[x/d] \models \phi$
- $M, s \models \exists x\, \phi$ ανν υπάρχει $d \in |M|$ τέτοιο ώστε $M, s[x/d] \models \phi$

Παράδειγμα 1

Κατηγορήματα:

R, 2 ορισμάτων

$|M| = \{A,\ B,\ C,\ D\}$

$M(R) = \{(A, A),\ (A, B),\ (A, C),\ (D, A)\}$

$s(x) = A$, για κάθε μεταβλητή x

Θα δείξουμε ότι: $M, s \models (\ \exists x \forall y \quad (R(x, y) \lor R(y, x))\ )$

Παράδειγμα 2

Κατηγορήματα:
p, 2 ορισμάτων

Συναρτησιακά σύμβολα:
f, 2 ορισμάτων

Σταθερές:
c

$$|M| = \{0,\ 1,\ 2\}$$

$$M(p) = \{(0,1),\ (0,2),\ (1,2)\}$$

$M(f)(i,j) = (i+j) \mod 3$, για κάθε μεταβλητή x

$$M(c) = 1$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε s: $M, s \models (\ \forall x \exists y \quad p(f(x,y), c)\ )$