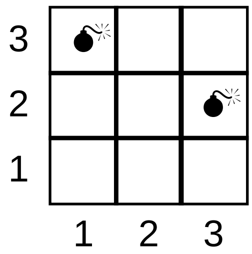
ΘΕΜΑ 4ο

Έστω το παιχνίδι του ναρκαλιευτή.



Συμβολίζουμε με Mij τη γνώση ότι η θέση ij (i γραμμή και j στήλη) έχει μια νάρκη. Συμβολίζουμε επίσης με Aij τη γνώση ότι (τουλάχιστον) μία γειτονική θέση της θέσης ij έχει νάρκη.
Με δεδομένη την πρόταση:
$\neg A11$ (1)
δηλαδή η θέση (1,1) δεν γειτονεύει με νάρκη, και την πρόταση:
$A11 \leftrightarrow M12 \vee M21$ (2)
αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την τεχνική της ανάλυσης, ότι ισχύει η πρόταση $\neg M12$.
Υπόδειξη: Μετατρέψτε πρώτα την πρόταση $A11 \leftrightarrow M12 \vee M21$ σε κανονική συζευκτική μορφή.
Για τη μετατροπή θα σας χρειαστούν οι παρακάτω τύποι:

- $A \vee (B \wedge \Gamma) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \Gamma)$ (επιμερισμός διάζευξης)
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (de Morgan)
- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ (απαλοιφή συνεπαγωγής)
- $A \leftrightarrow B \equiv A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$ (απαλοιφή ισοδυναμίας)

Απάντηση:

Η πρόταση $A11 \leftrightarrow M12 \vee M21$ αναλύεται σε δύο συνεπαγωγές:
$A11 \rightarrow M12 \vee M21$ (3)
και
$M12 \vee M21 \rightarrow A11$ (4)
Με απαλοιφή των συνεπαγωγών οι σχέσεις (3) και (4) μας δίνουν:
$\neg A11 \vee M12 \vee M21$ (5)
και
$\neg(M12 \vee M21) \vee A11$ (6)
όπου ή (6) γράφεται (αν βάλουμε την άρνηση μέσα στις παρενθέσεις)
$(\neg M12 \wedge \neg M21) \vee A11$
Η τελευταία σχέση, με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας ως προς την διάζευξη, γράφεται:
$(\neg M12 \vee A11) \wedge (\neg M21 \vee A11)$
Τελικά παίρνουμε δύο ξεχωριστές προτάσεις, τις:
$\neg M12 \vee A11$ (7)
$\neg M21 \vee A11$ (8)

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η πρόταση $\neg M12$. Εισάγουμε λοιπόν στη βάση γνώσης την άρνησή της:
$M12$ (9)
και θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε άτοπο.
Πράγματι, αν συνδυάσουμε τις προτάσεις (9) και (7) παίρνουμε ως αποτέλεσμα την πρόταση:
$A11$ (10)
Τέλος αν συνδυάσουμε την (10) με την (1) καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η (9) δεν ισχύει, οπότε ισχύει η πρόταση $\neg M12$.