

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε τον Γ.Α., που περιγράψαμε παραπάνω, για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης:

$$f(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot x_1) + x_2 \cdot \sin(20 \cdot \pi \cdot x_2),$$

με $-3.0 \leq x_1 \leq 12.1$ και $4.1 \leq x_2 \leq 5.8$.

Υποθέτουμε ότι το μέγεθος του πληθυσμού που θα επεξεργαστεί ο Γ.Α. είναι $pop_size=20$, και οι πιθανότητες διασταύρωσης και μετάλλαξης είναι $p_c=0.25$ και $p_m=0.01$ αντίστοιχα.

Εστω ότι η επιθυμητή ακρίβεια για κάθε μεταβλητή είναι τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Το διάστημα τιμών της μεταβλητής x_1 έχει μήκος $15.1(=12.1-(-3.0))$, οπότε το διάστημα $[-3.0, 12.1]$ θα πρέπει να διαχωριστεί σε 15.1×10000 ίσα υποδιαστήματα. Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται 18 δυαδικά ψηφία για τη δυαδική αναπαράσταση της x_1 (και τα οποία θα αποτελούν το πρώτο τμήμα του χρωμοσώματος κάθε ατόμου), αφού:

$$2^{17} < 151000 \leq 2^{18}.$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε ότι για τη δυαδική αναπαράσταση της x_2 απαιτούνται 15 δυαδικά ψηφία (Επαληθεύστε το). Επομένως, το συνολικό μήκος του μοναδικού χρωμοσώματος κάθε μέλους του πληθυσμού θα είναι $m = 18 + 15 = 33$ δυαδικά ψηφία.

Έστω λοιπόν το ακόλουθο άτομο:

$$(010001001011010000111110010100010)$$

Τα πρώτα 18 δυαδικά ψηφία (010001001011010000) αναπαριστούν το δεκαδικό αριθμό:

$$x_1 = -3.0 + 70352 \cdot \frac{15.1}{262143} = -3.0 + 4.05242 = 1.05242,$$

και τα επόμενα 15 δυαδικά ψηφία (111110010100010) τον αριθμό $x_2=5.75533$ (Επαληθεύστε το). Δηλαδή, το άτομο αυτό αντιστοιχεί στο ζεύγος $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle 1.05242, 5.75533 \rangle$.

Η απόδοση αυτού του απόμου είναι $f(1.05242, 5.75533) = 20.25264$ (Επαληθεύστε το).

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μιας και τα άτομα που επεξεργάζεται ο Γ.Α. αποτελούνται από ένα μόνο χρωμόσωμα στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε άτομα ή χρωμοσώματα θα εννοούμε το ίδιο πράγμα.

Αρχικοποίηση

Υποθέτουμε ότι μετά την αρχικοποίηση προκύπτει ο ακόλουθος πληθυσμός:

v_1	=	(100110100000000111111010011011111)
v_2	=	(111000100100110111001010100011010)
v_3	=	(000010000011001000001010111011101)
v_4	=	(100011000101101001111000001110010)
v_5	=	(000111011001010011010111111000101)
v_6	=	(000101000010010101001010111111011)
v_7	=	(001000100000110101111011011111011)
v_8	=	(100001100001110100010110101100111)
v_9	=	(010000000101100010110000001111100)
v_{10}	=	(000001111000110000011010000111011)
v_{11}	=	(011001111110110101100001101111000)
v_{12}	=	(110100010111101101000101010000000)
v_{13}	=	(111011111010001000110000001000110)
v_{14}	=	(010010011000001010100111100101001)
v_{15}	=	(111011101101110000100011111011110)
v_{16}	=	(110011110000011111100001101001011)
v_{17}	=	(011010111111001111010001101111101)
v_{18}	=	(011101000000001110100111110101101)
v_{19}	=	(000101010011111111110000110001100)
v_{20}	=	(101110010110011110011000101111110)

Επιλογή

Αρχικά αποκωδικοποιούμε κάθε χρωμόσωμα και υπολογίζουμε την απόδοσή του. Έτσι έχουμε:

$\text{eval}(v_1)$	$=$	$f(6.084492, 5.652242)$	$=$	26.019600
$\text{eval}(v_2)$	$=$	$f(10.348434, 4.380264)$	$=$	7.580015
$\text{eval}(v_3)$	$=$	$f(-2.516603, 4.390381)$	$=$	19.526329
$\text{eval}(v_4)$	$=$	$f(5.278638, 5.593460)$	$=$	17.406725
$\text{eval}(v_5)$	$=$	$f(-1.255173, 4.734458)$	$=$	25.341160
$\text{eval}(v_6)$	$=$	$f(-1.811725, 4.391937)$	$=$	18.100417
$\text{eval}(v_7)$	$=$	$f(-0.991471, 5.680258)$	$=$	16.020812
$\text{eval}(v_8)$	$=$	$f(4.910618, 4.703018)$	$=$	17.959701
$\text{eval}(v_9)$	$=$	$f(0.795406, 5.381472)$	$=$	16.127799
$\text{eval}(v_{10})$	$=$	$f(-2.554851, 4.793707)$	$=$	21.278435
$\text{eval}(v_{11})$	$=$	$f(3.130078, 4.996097)$	$=$	23.410669
$\text{eval}(v_{12})$	$=$	$f(9.356179, 4.239457)$	$=$	15.011619
$\text{eval}(v_{13})$	$=$	$f(11.134646, 5.378671)$	$=$	27.316702
$\text{eval}(v_{14})$	$=$	$f(1.335944, 5.151378)$	$=$	19.876294
$\text{eval}(v_{15})$	$=$	$f(11.089025, 5.054515)$	$=$	30.060205
$\text{eval}(v_{16})$	$=$	$f(9.211598, 4.993762)$	$=$	23.867227
$\text{eval}(v_{17})$	$=$	$f(3.367514, 4.571343)$	$=$	13.696165
$\text{eval}(v_{18})$	$=$	$f(3.843020, 5.158226)$	$=$	15.414128
$\text{eval}(v_{19})$	$=$	$f(-1.746635, 5.395584)$	$=$	20.095903
$\text{eval}(v_{20})$	$=$	$f(7.935998, 4.757338)$	$=$	13.666916

Είναι εμφανές ότι το άτομο v_{15} είναι αυτό με την καλύτερη απόδοση και το άτομο v_2 με τη χειρότερη απόδοση στον αρχικό πληθυσμό.

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε μια ρουλέτα (roulette wheel). Η συνολική απόδοση (fitness) του πληθυσμού είναι:

$$F = \sum_{i=1}^{20} eval(v_i) = 387.776822$$

Η πιθανότητα επιλογής p_i κάθε μέλους το πληθυσμού v_i , $i=1, \dots, 20$, είναι:

$p_1 = eval(v_1)/F = 0.067099$	$p_{11} = eval(v_{11})/F = 0.060372$
$p_2 = eval(v_2)/F = 0.019547$	$p_{12} = eval(v_{12})/F = 0.038712$
$p_3 = eval(v_3)/F = 0.050355$	$p_{13} = eval(v_{13})/F = 0.070444$
$p_4 = eval(v_4)/F = 0.044889$	$p_{14} = eval(v_{14})/F = 0.051257$
$p_5 = eval(v_5)/F = 0.065350$	$p_{15} = eval(v_{15})/F = 0.077519$
$p_6 = eval(v_6)/F = 0.046677$	$p_{16} = eval(v_{16})/F = 0.061549$
$p_7 = eval(v_7)/F = 0.041315$	$p_{17} = eval(v_{17})/F = 0.035320$
$p_8 = eval(v_8)/F = 0.046315$	$p_{18} = eval(v_{18})/F = 0.039750$
$p_9 = eval(v_9)/F = 0.041590$	$p_{19} = eval(v_{19})/F = 0.051823$
$p_{10} = eval(v_{10})/F = 0.054873$	$p_{20} = eval(v_{20})/F = 0.035244$

Οι αθροιστικές πιθανότητες (cumulative probabilities) q_i για κάθε άτομο v_i , $i=1, \dots, 20$ του πληθυσμού είναι:

$q_1 = 0.067099$	$q_6 = 0.293917$	$q_{11} = 0.538381$	$q_{16} = 0.837863$
$q_2 = 0.086647$	$q_7 = 0.335232$	$q_{12} = 0.577093$	$q_{17} = 0.873182$
$q_3 = 0.137001$	$q_8 = 0.381546$	$q_{13} = 0.647537$	$q_{18} = 0.912932$
$q_4 = 0.181890$	$q_9 = 0.423137$	$q_{14} = 0.698794$	$q_{19} = 0.964756$
$q_5 = 0.247240$	$q_{10} = 0.478009$	$q_{15} = 0.776314$	$q_{20} = 1.000000$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να περιστρέψουμε τη ρουλέτα 20 φορές; σε κάθε περιστροφή επιλέγουμε και ένα άτομο για το νέο πληθυσμό. Υποθέτουμε ότι έχουμε παράγει την εξής ακολουθία 20 τυχαίων αριθμών στο διάστημα $[0, 1]$:

0.513870	0.175741	0.308652	0.534534	0.947628
0.171736	0.702231	0.226431	0.494773	0.424720
0.703899	0.389647	0.277226	0.368071	0.983437
0.005398	0.765682	0.646473	0.767139	0.780237

Ο πρώτος αριθμός $r = 0.513870$ είναι μεγαλύτερος του q_{10} και μικρότερος του q_{11} , γεγονός που σημαίνει ότι το άτομο v_{11} επιλέγεται για να «περάσει» στο νέο πληθυσμό. Ο δεύτερος αριθμός $r = 0.175741$ είναι μεγαλύτερος του q_3 και μικρότερος του q_4 , οπότε το άτομο v_4 επιλέγεται για το νέο πληθυσμό. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε το νέο πληθυσμό:

v_1^*	=	(011001111110110101100001101111000)	(v_{11})
v_2^*	=	(100011000101101001111000001110010)	(v_4)
v_3^*	=	(001000100000110101111011011111011)	(v_7)
v_4^*	=	(011001111110110101100001101111000)	(v_{11})
v_5^*	=	(000101010011111111110000110001100)	(v_{19})
v_6^*	=	(100011000101101001111000001110010)	(v_4)
v_7^*	=	(111011101101110000100011111011110)	(v_{15})
v_8^*	=	(000111011001010011010111111000101)	(v_5)
v_9^*	=	(011001111110110101100001101111000)	(v_{11})
v_{10}^*	=	(000010000011001000001010111011101)	(v_3)
v_{11}^*	=	(111011101101110000100011111011110)	(v_{15})
v_{12}^*	=	(010000000101100010110000001111100)	(v_9)
v_{13}^*	=	(000101000010010101001010111111011)	(v_6)
v_{14}^*	=	(100001100001110100010110101100111)	(v_8)
v_{15}^*	=	(101110010110011110011000101111110)	(v_{20})
v_{16}^*	=	(100110100000001111111010011011111)	(v_1)
v_{17}^*	=	(000001111000110000011010000111011)	(v_{10})
v_{18}^*	=	(111011111010001000110000001000110)	(v_{13})
v_{19}^*	=	(111011101101110000100011111011110)	(v_{15})
v_{20}^*	=	(110011110000011111100001101001011)	(v_{16})

Διασταύρωση

Στο νέο πληθυσμό που έχει προκύψει εφαρμόζουμε τον τελεστή της διασταύρωσης. Έχουμε αρχικά υποθέσει ότι η πιθανότητα διασταύρωσης είναι $p_c=0.25$, οπότε περιμένουμε ότι κατά μέσο όρο το 25% των μελών του πληθυσμού μας θα επιλεγούν για τη διαδικασία της διασταύρωσης. Για το συγκεκριμένο μέγεθος πληθυσμού (20) περιμένουμε να επιλεγούν κατά μέσο όρο 5 άτομα. Έτσι, για κάθε μέλος του πληθυσμού διαλέγουμε έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό r στο διάστημα $[0,1]$. Αν $r<0.25$ τότε επιλέγουμε το συγκεκριμένο άτομο. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι παράχθηκε η παρακάτω ακολουθία τυχαίων αριθμών:

0.822951	0.151932	0.625477	0.314685	0.346901
0.911720	0.519760	0.401154	0.606758	0.785402
0.031523	0.869921	0.166525	0.674520	0.758400
0.581893	0.389248	0.200232	0.355635	0.826927

Άρα τα άτομα v_2^* , v_{11}^* , v_{13}^* και v_{18}^* επιλέγονται για διασταύρωση. Στο σημείο αυτό σταθήκαμε τυχεροί μιας και ο αριθμός των ατόμων που επιλέχθηκαν είναι άρτιος, οπότε το ζευγάρι τους είναι εύκολο. Αν ο αριθμός τους ήταν περιττός θα έπρεπε, είτε να επιλέξουμε (τυχαία πάντα) ένα άτομο ακόμα από τον πληθυσμό, είτε να απορρίψουμε κάποιο από τα ήδη επιλεγμένα. Στη συνέχεια ζευγαρώνουμε τα επιλεγμένα άτομα τυχαία; έστω λοιπόν ότι ζευγαρώνουν το v_2^* με το v_{11}^* και το v_{13}^* με το v_{18}^* . Για καθένα από τα δύο ζευγάρια παράγουμε τυχαία έναν ακέραιο αριθμό pos στο διάστημα $[1, 32]$ (το συνολικό μήκος, δηλαδή ο συνολικός αριθμός bits, κάθε χρωματοσώματος είναι 33). Ο αριθμός pos καθορίζει το σημείο διασταύρωσης (crossing point) του χρωματοσώματος.

Έστω λοιπόν ότι για το πρώτο ζευγάρι (v_2^* , v_{11}^*) επιλέχθηκε σημείο διασταύρωσης $pos = 9$:

$$v_2^* = (100011000 \mid 101101001111000001110010)$$

$$v_{11}^* = (111011101 \mid 101110000100011111011110)$$

Αυτά τα χρωμοσώματα θα «κοπούν» μετά το 9^ο bit και θα αντικατασταθούν από το ακόλουθο ζεύγος απογόνων:

$$v_2^{**} = (100011000 \mid 101110000100011111011110)$$

$$v_{11}^{**} = (111011101 \mid 101101001111000001110010)$$

Έστω τώρα ότι για το δεύτερο ζευγάρι (v_{13}^* , v_{18}^*) επιλέχθηκε σημείο διασταύρωσης, *pos* = 20:

$$v_{13}^* = (00010100001001010100 \mid 1010111111011)$$

$$v_{18}^* = (11101111101000100011 \mid 0000001000110)$$

Αυτά τα χρωμοσώματα θα «κοπούν» μετά το 20^ο bit και θα αντικατασταθούν από το ακόλουθο ζεύγος απογόνων:

$$v_{13}^{**} = (00010100001001010100 \mid 0000001000110)$$

$$v_{18}^{**} = (11101111101000100011 \mid 1010111111011)$$

Οπότε, η τρέχουσα μορφή του πληθυσμού θα είναι ως εξής:

$$v_1^* = (011001111110110101100001101111000)$$

$$v_2^{**} = (100011000101110000100011111011110)$$

$$v_3^* = (00100010000011010111101101111011)$$

$$v_4^* = (011001111110110101100001101111000)$$

$$v_5^* = (000101010011111111110000110001100)$$

$$v_6^* = (100011000101101001111000001110010)$$

$$v_7^* = (111011101101110000100011111011110)$$

$$v_8^* = (00011101100101001101011111000101)$$

$$v_9^* = (011001111110110101100001101111000)$$

$$v_{10}^* = (000010000011001000001010111011101)$$

$$v_{11}^{**} = (111011101101101001111000001110010)$$

$$\begin{aligned}
v_{12}^* &= (010000000101100010110000001111100) \\
v_{13}^{**} &= (000101000010010101000000001000110) \\
v_{14}^* &= (100001100001110100010110101100111) \\
v_{15}^* &= (101110010110011110011000101111110) \\
v_{16}^* &= (1001101000000001111111010011011111) \\
v_{17}^* &= (000001111000110000011010000111011) \\
v_{18}^{**} &= (11101111101000100011101011111011) \\
v_{19}^* &= (111011101101110000100011111011110) \\
v_{20}^* &= (110011110000011111100001101001011)
\end{aligned}$$

Μετάλλαξη

Η μετάλλαξη πραγματοποιείται bit-by-bit. Δηλαδή ο τελεστής της μετάλλαξης αντιμετωπίζει ολόκληρο τον πληθυσμό σαν ένα συρμό από δυαδικά ψηφία όπου κάθε ψηφίο έχει την ίδια πιθανότητα να μεταλλαχθεί. Έτσι με δεδομένο ότι η πιθανότητα μετάλλαξης είναι $p_m = 0.01$ αναμένουμε ότι κατά μέσο όρο το 1% όλων των binary bits του πληθυσμού θα αντιστραφούν. Ο πληθυσμός μας αποτελείται από $m \times \text{pop_size} = 33 \times 20 = 660$ δυαδικά ψηφία, άρα αναμένουμε κατά μέσο όρο 6.6 μεταλλάξεις σε κάθε γενιά. Για κάθε δυαδικό ψηφίο, παράγουμε έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό r στο διάστημα $[0,1]$. Εάν $r < 0.01$, τότε αντιστρέφουμε το δυαδικό ψηφίο.

Έτσι πρέπει να παράγουμε συνολικά 660 τυχαίους αριθμούς στο διάστημα $[0, 1]$. Σε ένα δοκιμαστικό τρέξιμο παράχθηκαν 5 αριθμοί μικρότεροι από 0.01. Οι αριθμοί αυτοί, οι θέσεις στον πληθυσμό των δυαδικών ψηφίων που επιλέχθηκαν, ο αριθμός του ατόμου που αντιστοιχούν, καθώς και η θέση τους στα αντίστοιχα άτομα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Τυχαίος	Θέση Ψηφίου στον	Αριθμός ατόμου	Θέση Ψηφίου στο
---------	------------------	----------------	-----------------

Αριθμός	Πληθυσμός	(χρωμοσώματος)	Χρωμόσωμα
0.000213	112	4	13
0.009945	349	11	19
0.008809	418	13	22
0.005425	429	13	33
0.002836	602	19	8

Αυτό σημαίνει ότι τέσσερα άτομα του πληθυσμού θα υποστούν μετάλλαξη - στο 13^ο άτομο μεταλλάσσονται δύο ψηφία. Οπότε ο πληθυσμός που προκύπτει μετά και τη διαδικασία της μετάλλαξης είναι ο ακόλουθος (τα ψηφία που έχουν μεταλλαχθεί είναι bold):

- v₁ = (011001111110110101100001101111000)
- v₂ = (100011000101110000100011111011110)
- v₃ = (001000100000011010111101101111011)
- v₄ = (011001111110**0**10101100001101111000)
- v₅ = (000101010011111111110000110001100)
- v₆ = (100011000101101001111000001110010)
- v₇ = (111011101101110000100011111011110)
- v₈ = (000111011001010011010111111000101)
- v₉ = (011001111110110101100001101111000)
- v₁₀ = (000010000011001000001010111011101)
- v₁₁ = (111011101101101001**0**11000001110010)
- v₁₂ = (010000000101100010110000001111100)
- v₁₃ = (000101000010010101000**1**000010001**11**)
- v₁₄ = (100001100001110100010110101100111)
- v₁₅ = (101110010110011110011000101111110)
- v₁₆ = (1001101000000001111111010011011111)

$$\begin{aligned}
v_{17} &= (000001111000110000011010000111011) \\
v_{18} &= (11101111101000100011101011111011) \\
v_{19} &= (111011100101110000100011111011110) \\
v_{20} &= (110011110000011111100001101001011)
\end{aligned}$$

Μόλις τελειώσαμε, λοιπόν, την πρώτη γενεά του Γ.Α. Είναι ενδιαφέρον να δούμε την απόδοση των μελών του πληθυσμού που προέκυψε στο τέλος αυτής της πρώτης γενεάς.

$$\begin{aligned}
\text{eval}(v_1) &= f(3.130078, 4.996097) &= 23.410669 \\
\text{eval}(v_2) &= f(5.279042, 5.054515) &= 18.201083 \\
\text{eval}(v_3) &= f(-0.991471, 5.680258) &= 16.020812 \\
\text{eval}(v_4) &= f(3.128235, 4.996097) &= 23.412613 \\
\text{eval}(v_5) &= f(-1.746635, 5.395584) &= 20.095903 \\
\text{eval}(v_6) &= f(5.278638, 5.593460) &= 17.406725 \\
\text{eval}(v_7) &= f(11.089025, 5.054515) &= 30.060205 \\
\text{eval}(v_8) &= f(-1.255173, 4.734458) &= 25.341160 \\
\text{eval}(v_9) &= f(3.130078, 4.996097) &= 23.410669 \\
\text{eval}(v_{10}) &= f(-2.516603, 4.390381) &= 19.526329 \\
\text{eval}(v_{11}) &= f(11.088621, 4.743434) &= 33.351874 \\
\text{eval}(v_{12}) &= f(0.795406, 5.381472) &= 16.127799 \\
\text{eval}(v_{13}) &= f(-1.811725, 4.209937) &= 22.692462 \\
\text{eval}(v_{14}) &= f(4.910618, 4.703018) &= 17.959701 \\
\text{eval}(v_{15}) &= f(7.935998, 4.757338) &= 13.666916 \\
\text{eval}(v_{16}) &= f(6.084492, 5.652242) &= 26.019600 \\
\text{eval}(v_{17}) &= f(-2.554851, 4.793707) &= 21.278435 \\
\text{eval}(v_{18}) &= f(11.134646, 5.666976) &= 27.591064 \\
\text{eval}(v_{19}) &= f(11.059532, 5.054515) &= 27.608441 \\
\text{eval}(v_{20}) &= f(9.211598, 4.993762) &= 23.867227
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η συνολική απόδοση F του νέου πληθυσμού είναι 447.049688, πολύ μεγαλύτερη από τη συνολική απόδοση του αρχικού πληθυσμού που ήταν 387.776822. Επίσης, το χρωμόσωμα (v_{11}) με την καλύτερη απόδοση (33.351874) στον τρέχοντα πληθυσμό, έχει υψηλότερη απόδοση από το χρωμόσωμα (v_{15}) με την καλύτερη απόδοση (30.060205) στον αρχικό πληθυσμό.

Ο Γ.Α. συνεχίζει με τη φάση της επιλογής και τα διάφορα βήματα (επιλογή-διασταύρωση-μετάλλαξη) επαναλαμβάνονται κυκλικά έως ότου ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου. Συνήθως, το κριτήριο τερματισμού ενός Γ.Α. είναι είτε ένας συγκεκριμένος (μέγιστος) αριθμός γενεών, είτε ένα συγκεκριμένο ποσοστό βελτίωσης του καλύτερου ατόμου ή του συνολικού πληθυσμού σε σχέση με κάποιον αριθμό προηγούμενων γενεών. Έτσι στο συγκεκριμένο Γ.Α. αν θεωρήσουμε ως συνθήκη τερματισμού τις 1000 γενέες ο τελικός πληθυσμός (ο πληθυσμός στο τέλος της 1000στης γενεάς) θα έχει ως εξής:

v_1	=	(111011110110011011100101010111011)
v_2	=	(111001100110000100010101010111000)
v_3	=	(111011110111011011100101010111011)
v_4	=	(111001100010000110000101010111001)
v_5	=	(111011110111011011100101010111011)
v_6	=	(111001100110000100000100010100001)
v_7	=	(110101100010010010001100010110000)
v_8	=	(111101100010001010001101010010001)
v_9	=	(111001100010010010001100010110001)
v_{10}	=	(111011110111011011100101010111011)
v_{11}	=	(110101100000010010001100010110000)
v_{12}	=	(110101100010010010001100010110001)
v_{13}	=	(111011110111011011100101010111011)
v_{14}	=	(111001100110000100000101010111011)
v_{15}	=	(111001101010111001010100110110001)

$$\begin{aligned}
v_{16} &= (111001100110000101000100010100001) \\
v_{17} &= (111001100110000100000101010111011) \\
v_{18} &= (111001100110000100000101010111001) \\
v_{19} &= (111101100010001010001110000010001) \\
v_{20} &= (111001100110000100000101010111001)
\end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες αποδόσεις είναι:

$$\begin{aligned}
\text{eval}(v_1) &= f(11.120940, 5.092514) = 30.298543 \\
\text{eval}(v_2) &= f(10.588756, 4.667358) = 26.869724 \\
\text{eval}(v_3) &= f(11.124627, 5.092514) = 30.316575 \\
\text{eval}(v_4) &= f(10.574125, 4.242410) = 31.933120 \\
\text{eval}(v_5) &= f(11.124627, 5.092514) = 30.316575 \\
\text{eval}(v_6) &= f(10.588756, 4.214603) = 34.356125 \\
\text{eval}(v_7) &= f(9.631066, 4.427881) = 35.458636 \\
\text{eval}(v_8) &= f(11.518106, 4.452835) = 23.309078 \\
\text{eval}(v_9) &= f(10.574816, 4.427933) = 34.393820 \\
\text{eval}(v_{10}) &= f(11.124627, 5.092514) = 30.316575 \\
\text{eval}(v_{11}) &= f(9.623693, 4.427881) = 35.477938 \\
\text{eval}(v_{12}) &= f(9.631066, 4.427933) = 35.456066 \\
\text{eval}(v_{13}) &= f(11.124627, 5.092514) = 30.316575 \\
\text{eval}(v_{14}) &= f(10.588756, 4.242514) = 32.932098 \\
\text{eval}(v_{15}) &= f(10.606555, 4.653714) = 30.746768 \\
\text{eval}(v_{16}) &= f(10.588814, 4.214603) = 34.359545 \\
\text{eval}(v_{17}) &= f(10.588756, 4.242514) = 32.932098 \\
\text{eval}(v_{18}) &= f(10.588756, 4.242410) = 32.956664 \\
\text{eval}(v_{19}) &= f(11.518106, 4.472757) = 19.669670 \\
\text{eval}(v_{20}) &= f(10.588756, 4.242410) = 32.956664
\end{aligned}$$

Η συνολική απόδοση F του τελικού πληθυσμού είναι 625.372857 πολύ υψηλότερη από την απόδοση του πληθυσμού στο τέλος της πρώτης γενεάς (447.049688). Η απόδοση του καλύτερου μέλους του τελικού πληθυσμού είναι 35.477938.