Μαθηματικά ΙΙ - 1η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Μάρτιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

---

1. Αν $u = x^2/(x^2+y^2)$ να βρεθεούν οι $\partial u/\partial x$ και $\partial u/\partial y$.

   Λύση:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x(x^2+y^2)-x^2 2x}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2x^3+2xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}2y \\
&= \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

2. Αν $s = t^u$ να βρεθούν οι $\partial s/\partial u$ και $\partial s/\partial t$.
   Απάντηση: $\partial s/\partial t = ut^{u-1}, \partial s/\partial u = t^u lnt$

3. Αν $z = \ln\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ να βρεθούν οι $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$ και $\partial z/\partial w$.
   Απάντηση: $\partial z/\partial u = u/(u^2+v^2+w^2)$

4. Αν $w = x^3 - y^3 - 2xy$, να βρείτε τις $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$ στα σημεία όπου $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$.
   Απάντηση: Στο $(0,0)$ και τα δύο 0. Στο $(-2/3, 2/3)$ και τα δύο -4.

5. Αν $w = 8x^4 + y^4 - 2xy^2$, να βρείτε τις $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$ στα σημεία όπου $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$.
   Απάντηση: Στο $(0,0)$ και τα δύο 0. Στο $(1/4, \pm 1/2)$ $\partial^2 w/\partial x^2 = 6$ και $\partial^2 w/\partial y^2 = 2$.

6. Έστω $u = e^x cosy$.
   - Να επαληθευθεί ότι $\partial^2 u/\partial x\partial y = \partial^2 u/\partial y\partial x$
   - Να δείξετε ότι $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$

Ο συμβολισμός

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

είναι η μερική παράγωγος του z ως προς yδεδομένου ότι κρατάμε σταθερό το x. Για να το υπολογίσουμε όμως πρέπει να εκφράσουμε το z σαν συνάρτηση μόνο των x, y.

---

7. Αν $z = x^2 + 2y^2,\ x = rcos\theta,\ y = rsin\theta$ να υπολογίσετε τις παρακάτω μερικές παραγώγους:

(a) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$	(d) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$	(g) $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_x$	(j) $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$	(m) $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y}$	(p) $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial x}$
(b) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r$	(e) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_r$	(h) $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y$	(k) $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x$	(n) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta}$	(q) $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$
(c) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta$	(f) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\theta$	(i) $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r$	(l) $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y$	(o) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \theta}$	(r) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Λύση:

(a)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2x$$

(b)

$$\begin{aligned}
z &= x^2 + 2y^2 \\
&= x^2 + 2r^2 sin^2\theta, \quad (y = rsin\theta) \\
&= x^2 + 2r^2(1 - cos^2\theta) \\
&= x^2 + 2r^2(1 - \frac{x^2}{r^2}), \quad (cos\theta = \frac{x}{r}) \\
\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r &= 2x - 2r^2\frac{2x}{r^2} \\
&= -2x
\end{aligned}$$

Απάντηση: (c) $2x(1+2tan^2\theta)$, (d) $4y$, (e) $2y$, (f) $2y(cot^2\theta+2)$, (g) $4r^2ran\theta$, (h) $-2r^2cot\theta$, (i) $r^2sin2\theta$, (j) $2r(1+sin^2\theta)$, (k) $4r$, (l) $2r$, (m) 0, (n) $8y \cdot sec^2\theta$, (o) $-4x \cdot csc^2\theta$, (p) 0, (q) $2r \cdot sin2\theta$, (r) 0

8. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 αν $z = r^2tan^2\theta$.
Απάντηση: (a) $\frac{-2y^4}{x^3}$, (b) $\frac{-2r^4}{x^3}$, (c) $2x \cdot tan^2\theta \cdot sec^2\theta$, (d) $2y + \frac{4y^3}{x^2}$, (e) $\frac{2yr^4}{(r^2-y^2)^2}$, (f) $2y \cdot sec^2\theta)$, (g) $2x^2 \cdot sec^2\theta \cdot tan\theta(sec^2\theta + tan^2\theta)$, (h) $2y^2 \cdot sec^2\theta \cdot \tan\theta$, (i) $2r^2 \cdot sec^2\theta \cdot \tan\theta$, (j) $2r \cdot tan^2\theta$, (k) $\frac{4r^3}{x^2} - 2r$, (l) $\frac{-2ry^4}{(r^2-y^2)^2}$, (m) $\frac{-8r^3y^3}{(r^2-y^2)^3}$, (n) $4x \cdot tan\theta \cdot sec^2\theta(tan^2\theta + sec^2\theta)$, (o) $4y \cdot sec^2\theta \cdot tan\theta$, (p) $\frac{-8r^3}{x^3}$, (q) $4r \cdot tan\theta \cdot sec^2\theta$, (r) $\frac{-8y^3}{x^3}$

Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής έτσι και σε αυτές πολλών μεταβλητών, μπορούμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση με το ανάπτυγμα Taylor. Στην περίπτωση των συναρτήσεων 2 μεταβλητών, αυτό δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$f(a+h, b+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

όπου έχουμε για το άθροισμα δύο όρων υψωμένο σε μια δύναμη (διωνυμικό ανάπτυγμα):

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

όπου

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!}$$

Έτσι για παράδειγμα:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}h^j k^{n-j}\,\frac{\partial^n}{\partial x^j\partial y^{n-j}}$$

---

9. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις, να βρείτε τους πρώτους όρους των σειρών Taylorστο σημείο $(0,0)$.

$$(a)\ cosx\cdot sinhy\quad (b)\ cos(x+y)\quad (c)\ \frac{ln(1+x)}{1+y}$$
$$(d)\ e^{xy}\quad (e)\ \sqrt{1+xy}\quad (f)\ e^{x+y}$$

Λύση:

Θα υπολογίσουμε όρους μέχρι $n=3$.

$$\begin{aligned}
\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^0 f(0,0) &= f(0,0)\\
&= cos0\cdot sinh0\\
&= 0\\
\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 f(0,0) &= x\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}+y\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}\\
&= x(-sin0\cdot sinh0)+ycos0\cdot cosh(0)\\
&= y\\
\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(0,0)}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bigg|_{(0,0)}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(0,0)}\\
&= x^2(-cos0\cdot sinh0)+2xy(-sin0\cdot cosh0)+y^2cos0\cdot sinh0\\
&= 0\\
\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0) &= x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{(0,0)}+3x^2y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\bigg|_{(0,0)}+3xy^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\bigg|_{(0,0)}+y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\bigg|_{(0,0)}\\
&= x^3(sin0\cdot sinh0)+3x^2y(-cos0\cdot cosh0)+3xy^2(-sin0\cdot sinh0)+y^3cos0\cdot cosh0\\
&= -3x^2y+y^3
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$cosx\cdot sinhy=y-\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{6}y^3+\dots$$

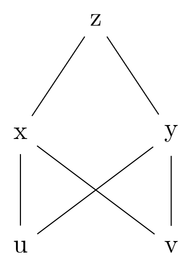
Απάντηση: (b) $1-(x^2+2xy+y^2)/2+\dots$ (c) $x-x^2/2-xy+x^3/3+x^2y/2+xy^2+\dots$, (d) $1+xy+x^2y^2/2+x^3y^3/3!+\dots$, (e) $1+xy/2-x^2y^2/8+\dots$, (f) $1+x+y+(x^2+2xy+y^2)/2+\dots$,

---

Με τον κανόνα της αλυσίδας μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης ως προς μια μεταβλητή ακόμα και αν δεν γνωρίζουμεμε άμεσο τρόπο την εξάρτηση της συνάρτησης από αυτή τη μεταβλητή. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση z εξαρτάται από τα x, y τα οποία με τη σειρά τους εξαρτώνται από τα u, v τότε:

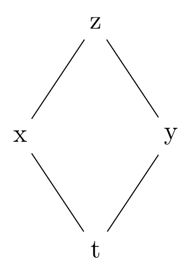
$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned}$$

Ένας εύκολος τρόπος για να υπολογίζουμε τους παραπάνω τύπους είναι να κάνουμε ένα διάγραμμα που να δείχνει τις εξαρτήσεις των μεταβλητών. Ξεκινώντας τώρα από την αρχική μεταβλητή ακολουθούμε όλους τους δυνατούς δρόμους για να φτάσουμε στην τελική μεταβλητή, και σε κάθε ακμή που διανύουμε παίρνουμε τη μερική παράγωγο της μεταβλητής στην αρχή της ακμής ως προς τη μεταβλητή στο τέλος της ακμήςΑυτές τις μερικές παραγώγους που προκύπτουν σε ένα μονοπάτι τις πολλαπλασιάζουμε. Όλοι οι δυνατοί δρόμοι στο τέλος απλά προστίθενται.



10. Αν $z = xe^{-y}$, $x = cosht$, $y = cost$, να βρεθεί η dz/dt.

Λύση:



$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= e^{-y} sinht + x(-e^{-y})(-sint) \\ &= e^{-y} sinht + xe^{-y} sint \end{aligned}$$

11. Αν $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = cos(ln(tan(p + \pi/4)))$, $v = sin(ln(tan(p + \pi/4)))$, να βρεθεί η dw/dp.

Απάντηση: $w = 1, dw/dp = 0$

12. Αν $r = e^{-p^2-q^2}$, $p = e^s$, $q = e^{-s}$, να βρεθεί η dr/ds.

Απάντηση: $2r(q^2 - p^2)$

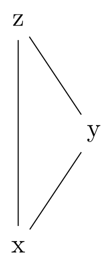
13. Αν $x = ln(u^2 - v^2)$, $u = t^2$, $v = cost$, να βρεθεί η dx/dt.

Απάντηση: $(4ut + 2vsint)/(u^2 - v^2)$

14. Αν $z = z(x, y)$ και $y = y(x)$ να δείξετε ότι ο κανόνας της αλυσίδας γίνεται:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Υπόδειξη:



15. Αν $z = (x+y)^5$, $y = sin10x$, να βρεθεί η dz/dx.

    Απάντηση: $5(x+y)^4(1+10cos10x)$

16. Αν $c = sin(a-b)$, $b = ae^{2a}$, να βρεθεί η dc/da.

    Απάντηση: $(1-2b-e^{2a})cos(a-b)$