Μαθηματικά ΙΙ - 3η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x, y)$ και θέλουμε να βρούμε αν σε ένα σημείο (x_0, y_0) παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο. Προφανώς, αν κρατήσουμε τη μια μεταβλητή σταθερή (έστω τη y) η συνάρτηση τώρα γίνεται μιας μεταβλητής, και αν στο ζητούμενο σημείο υπάρχει ακρότατο, θα έχει και αυτή ακρότατο και έτσι θα πρέπει $(\partial f/\partial x)_{(x_0,y_0)} = 0$. Το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για την μερική παράγωγο ως προς y. Επομένως, αναγκαία συνθήκη για να έχει η f ακρότατο στο (x_0, y_0) είναι:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$$

Ας πάρουμε τώρα τους πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f:

$$f(x,y) = \quad f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)}(y-y_0)^2 + \ldots$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι οι πρώτες παράγωγοι μηδενίζονται και θέσουμε $f_{xx} = A,\ f_{xy} = B,\ f_{yy} = C, x - x_0 = h,\ y - y_0 = k$ θα έχουμε:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2Bhk + k^2\right) + \ldots$$

Έστω $P = ah^2 + 2Bhk + Ck^2$. Τότε, αν $P > 0$ η $f(xy) > fx_0, y_0)$ και θα έχουμε ένα τοπικό ελάχιστο ενώ αν $P < 0$ θα έχουμε ένα τοπικό μέγιστο. Αν το P αλλάζει πρόσημο, τότε έχουμε ένα σαγματικό σημείο (ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο). Το P μπορεί να γραφεί ως $P = A(h + Bk/A)^2 + (C - B^2/A)k^2$ και έτσι προκύπτει:

- το (x_0, y_0) είναι ελάχιστο αν στο σημείο αυτό $f_{xx} > 0,\ f_{yy} > 0,\ f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$
- το (x_0, y_0) είναι μέγιστο αν στο σημείο αυτό $f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0,\ f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$
- το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο αν $f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$ και φυσικά αν οι f_{xx} και f_{yy} έχουν διαφορετικό πρόσημο.

---

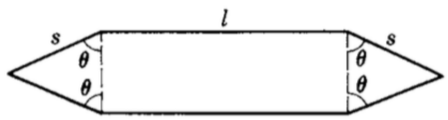
1. Να βρεθούν τα ακρότατα των ακόλουθων συναρτήσεων.

$$(a)\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 10$$
$$(b)\ x^2 - y^2 + 2x - 4y + 10$$
$$(c)\ 4 + x + y - x^2 - xy - 1/2y^2$$
$$(d)\ x^3 - y^3 - 2xy + 2$$

Απάντηση: (a) $(-1, 2)$ ελάχιστο, (b) $(-1, -2)$ σαγματικό, (c) $(0, 1)$ μέγιστο, (d) $(0, 0)$σαγματικό και $(-2/3, 2/3)$ μέγιστο

2. Αν $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ να δείξετε ότι η z δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στην αρχή των αξόνων.

3. Να βρείτε το λόο s/l και τη γωνία θ που μεγιστοποιούν την επιφάνεια του σχήματος (η περίμετρος είναι δοσμένη και σταθερή).



Απάντηση: $s/l = 1,\ \theta = \pi/6$

4. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $2x + 3y + z - 11 = 0$ που ελαχισοποιεί την ποσότητα $4x^2 + y^2 + z^2$.

   Λύση:

   Θέτουμε $F = 4x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2x + 3y + z - 11)$ και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} F_x &= 8x + 2\lambda = 0 \\ F_y &= 2y + 3\lambda = 0 \\ F_z &= 2z + \lambda = 0 \\ 2x + 3y + z &= 11 \end{aligned}$$

   και προκύπτει ότι $(x, y, z) = (1/2, 3, 1)$.

5. Να βρείτεε τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων της τομής των επιπέδων $2x + y - z = 1,\ x - y + z = 2$

   Απάντηση: $\sqrt{6}/2$

6. Ένα σημείο κινείται πάνω στην ευθεία $2x + 3y - 4 = 0$. Πότε το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου από τα $(1, 0,\ (-1, 0)$ θα είναι ελάχιστη·

   Απάντηση: $(8/13, 12/13)$

7. Να βρείτε το μεγαλύτερο (σε όγκο) παραλληλεπίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες που μπορεί να εγγραφεί στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

   Λύση:

   Αν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες της κορυφής του παραλληλεπιπέδου που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι $8xyz$. Έτσι:

$$\begin{aligned} F &= 8xyz + \lambda(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} - 1) \\ F_x &= 8yz + 2\lambda x/4 = 0 \\ F_y &= 8xz + 2\lambda x/9 = 0 \\ F_z &= 8xy + 2\lambda x/25 = 0 \end{aligned}$$

   Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι: $4/\sqrt{3} \times 6/\sqrt{3} \times 10/\sqrt{3}$.

8. Αλλάζοντας τις μεταβλητές x, t σε $r = x + vt,\ s = x - vt$ να λύσετε την κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

   Λύση:

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= 1 \\
\frac{\partial r}{\partial t} &= v \\
\frac{\partial s}{\partial x} &= 1 \\
\frac{\partial s}{\partial t} &= -v
\end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial s} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}\right) F \\
\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = v\frac{\partial F}{\partial r} - v\frac{\partial F}{\partial s} = v\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s}\right) F
\end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}\right) F \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F \\
\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = v\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s}\right) v\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s}\right) F \\
&= v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση προκύπτει:

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s} = 0$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι $F = f(r) + g(t)$ δηλαδή $F(x, y) = f(x + vt) + g(x - vt)$ όπου f, g τυχαίες συναρτήσεις.

9. Στην εξίσωση

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

να θέσετε $s = y + 2x,\ t = y + 3x$ και να δείξετε ότι η εξίσωση γίνεται $\partial^2 z/\partial s \partial t = 0$.

10. Όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, στην εξίσωση

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 10\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

να θέσετε $u = 5x - 2y,\ v = 2x + y$ και να λύσετε την εξίσωση.