Μαθηματικά ΙΙ - 6η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

---

1. Αν $\vec{A} = 2\vec{i}_x - \vec{i}_y - \vec{i}_z,\ \vec{B} = 2\vec{i}_x - 3\vec{i}_y + \vec{i}_z,\ \vec{C} = \vec{i}_y + \vec{i}_z$ να βρείτε τα $(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C},\ \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}),\ (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C},\ \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}),\ (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}, \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

   Λύση:

   Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς ή να κάνουμε χρήση των σχέσεων:

   $$\vec{i}_x\cdot\vec{i}_x = \vec{i}_y\cdot\vec{i}_y = \vec{i}_z\cdot\vec{i}_z = 1 \qquad \vec{i}_x\times\vec{i}_x = \vec{i}_y\times\vec{i}_y = \vec{i}_z\times\vec{i}_z = 0$$
   $$\vec{i}_x\cdot\vec{i}_y = \vec{i}_x\cdot\vec{i}_z = \vec{i}_y\cdot\vec{i}_z = 0 \qquad \vec{i}_x\times\vec{i}_y = \vec{i}_z,\ \vec{i}_y\times\vec{i}_z = \vec{i}_x,\ \vec{i}_z\times\vec{i}_x = \vec{i}_y$$

   Έτσι:

   $$\vec{A}\cdot\vec{B} = 4+3-1 = 6 \implies (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} = 6\vec{C}$$
   $$\vec{B}\cdot\vec{C} = -3+1 = -2 \implies \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}) = -2\vec{A}$$
   $$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$
   $$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = -\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = -[(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}] = 2\vec{A} - 2\vec{B} = 4(\vec{i}_y - \vec{i}_z)$$
   $$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} = -2\vec{B} - 6\vec{C} = -4(\vec{i}_x + 2\vec{i}_z)$$

2. Αν $\vec{A} = \vec{i}_x + \vec{i}_y - 2\vec{i}_z,\ \vec{B} = 2\vec{i}_x - \vec{i}_y + 3\vec{i}_z,\ \vec{C} = \vec{i}_y - 5\vec{i}_z$ να βρείτε το έργο του $\vec{B}$ στη μετατόπιση $\vec{C}$ και στη συνέχεια το συνολικό έργο των $\vec{A},\ \vec{B}$ πάνω στην ίδια μετατόπιση.

   - Απάντηση: $-16,\ -5$

3. Να απλοποιήσετε την έκφραση $(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 - [(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{B}]\cdot\vec{A}$.

   - Απάντηση: A^2B^2

4. Να αποδείξετε την ταυτότητα του Lagrange

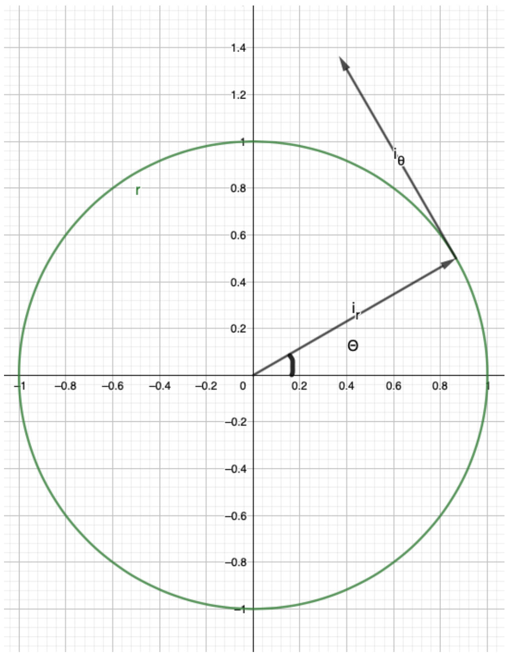
   $$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα του Jacobi

   $$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$$

6. Να υπολογίσετε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού σε πολικές συντεταγμένες.

   Λύση:



Τα μοναδιαία διανύσματα βάσης στις πολικές συντεταγμένες δίνονται:

$$\vec{i}_r = \vec{i}_x \cos\theta + \vec{i}_y \sin\theta$$
$$\vec{i}_\theta = -\vec{i}_x \sin\theta + \vec{i}_y \cos\theta$$

Στις πολικές συντεταγμένες, όταν μεταβάλλεται η θέση ενός κινητού, αλλάζουν και τα μοναδιαία διανύσματα βάσης. Έτσι:

$$\frac{d\vec{i}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{i}_\theta$$
$$\frac{d\vec{i}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{i}_r$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού. Στις πολικές συντεταγμένες, το διάνυσμα θέσης του κινητού θα είναι $\vec{R} = r\vec{i}_r$. Έτσι:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{i}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{i}_\theta$$
$$\vec{a} = \frac{\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{i}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{i}_\theta$$

7. Έστω $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ένα διάνυσμα με σταθερό μέτρο. Να δείξετε ότι είτε πρόκειται για ένα σταθερό διάνυσμα είτε για ένα διάνυσμα που είναι κάθετο με την παράγωγό του.

   Λύση:

   Το μέτρο του διανύσματος είναι $r = |\vec{r}|$ ή αν πάρουμε το τετράγωνο του μέτρου τότε $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$. Έτσι

$$\frac{dr^2}{dt} = 0 \implies$$
$$\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{dt} = 2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

8. Έστω το διάνυσμα θέσης ενός κινητού είναι $\vec{r} = t^2\vec{i}_x - 2t\vec{i}_y + (t^2+2t)\vec{i}_z$. Να δείξετε ότι το κινητό περνά από τη θέση $(4, -4, 8)$ και να υπολογίσετε σε ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό. Έπειτα, να υπολογίσετε την ταχύτητατου κινητού εκείνη τη στιγμή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην τροχιά του κινητού εκείνη τη χρονική στιγμή.

   - Απάντηση: $t = 2$, $\vec{v} = 4\vec{i}_x - 2\vec{i}_y + 6\vec{i}_z$, $(x-4)/4 = (y+4)/(-2) = (z-8)/6$

9. Αν $\vec{V}(t)$ ένα διάνυσμα, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \vec{V} \times \frac{d^2\vec{V}}{dt^2}dt$$

   Λύση:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=\frac{d\vec{V}}{dt}\times\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{V}\times\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}\implies$$
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right)=\vec{V}\times\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned}\int\vec{V}\times\frac{d^2\vec{V}}{dt^2}dt &= \int\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\right)dt\\ &= \vec{V}\times\frac{d\vec{V}}{dt}\end{aligned}$$

10. Να βρείτε τη βαθμίδα της συνάρτησης $w = x^2y^3z$ στο σηεμίο $(1, 2, -1)$.

    - Απάντηση: $-16\vec{i}_x - 12\vec{i}_y + 8\vec{i}_z$

11. Ξεκινώντας από το σημείο $(1, 1)$προς ποια κατεύθυνση ελλατώνεται πιο γρήγορα η συνάρτηση $\phi = x^2 - y^2 + 2xy$

    - Απάντηση: $-\vec{i}_x$

12. Να βρείτε την παράγωγο της $f = xy^2 + yz$ στο σημείο $(1, 1, 2)$ προς την κατεύθυνση $2\vec{i}_x - \vec{i}_y + 2\vec{i}_z$

    - Απάντηση: 0

13. Να βρείτε την παράγωγο της $f = ze^x \cos y$ στο σημείο $(1, 0, \pi/3)$ προς την κατεύθυνση $\vec{i}_x + 2\vec{i}_y$

    - Απάντηση: $\pi e/(3\sqrt{5})$

14. Να βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $x^2 + y^2 - z = 0$ στο σημείο $(3, 4, 25)$. Στο ίδιο σημείο, να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης ευθείας και του εφαπτόμενου επιπέδου.

    - Απάντηση: $(x - 3)/6 = (y - 4)/8 = (z - 25)/(-1),\ 6x + 8y - z = 25$

15. Να βρεθεί το $\vec{\nabla}r^2$ όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

    - Απάντηση: $2\vec{r} = 2r\vec{i}_r$

16. Για τα ακόλουθα διανύσματα να υπολογιστεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός:

    - (x, y, z) - Απάντηση: 3, 0
    - $(x, y, 0)$ - Απάντηση: 2, 0
    - (z, y, x) - Απάντηση: 1, 0
    - (y, z, x) - Απάντηση: $0,\ -(1, 1, 1)$
    - (x^2, y^2, z^2) - Απάντηση: $2(x + y + z),\ 0$
    - (x^2y, y^2x, xyz) - Απάντηση: $5xy,\ (xz, -yz, y^2 - x^2)$
    - $(x \sin y, \cos y, xy)$ - Απάντηση: $0,\ )x, -y, -x \cos y)$
    - $(\sinh z, 2y, x \cosh z)$ - Απάντηση: $2 + x \sinh z,\ 0$

17. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις να υπολογίσετε τη Laplacian :

    - $x^3 - 3xy^2 + y^3$ - Απάντηση: $6y$
    - $\ln(x^2 + y^2)$ - Απάντηση: 0
    - $\sqrt{x^2 - y^2}$ - Απάντηση: $-(x^2 + y^2)/(x^2 - y^2)^{3/2}$
    - $(x + y)^{-1}$ - Απάντηση: $4(x + y)^{-3}$

- $xy(x^2 + y^2 - 5z^2)$ - Απάντηση: $2xy$
- $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ - Απάντηση: 0
- $xyz(x^2 - 2y^2 + z^2)$ - Απάντηση: 0
- $\ln(x^2 + y^2 + z^2)$ - Απάντηση: $2(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

18. Να υπολογιστούν οι ακόλουθες παραστάσεις ($\vec{r} = (x, y, z),\ r = |\vec{r}|$:

- $\vec{\nabla} \times (\vec{i}_z \times \vec{r})$ - Απάντηση: $2\vec{i}_z$
- $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ - Απάντηση: $2/r$
- $\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ - Απάντηση: 0