Μαθηματικά ΙΙ - 7η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

---

1. Για τα επόμενα συστήματα συντεταγμένων να βρείτε τους συντελεστές h της μετρικής, το $d\vec{s}$, το ds^2, τον στοιχειώδη όγκο και τα διανύσματα της βάσης:

   - Κυλινδρικές παραβολικές συντεταγμένες

   $$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y &= uv \\ z &= z \end{aligned}$$

   - Κυλινδρικές ελλειπτικές συντεταγμένες

   $$\begin{aligned} x &= x \cosh u \cos v \\ y &= a \sinh u \sin v \\ z &= z \end{aligned}$$

   - Παραβολικέςς συντεταγμένες

   $$\begin{aligned} x &= uv \cos\phi \\ y &= uv \sin\phi \\ z &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{aligned}$$

   - Διπολικές συντεταγμένες

   $$\begin{aligned} x &= \frac{a \sinh u}{\cosh u + \cos v} \\ y &= \frac{a \sin v}{\cosh u + \cos v} \end{aligned}$$

   Λύση:

   Θα λύσουμε για τις παραβολικές συντεταγμένες:

   $$\begin{aligned} h_u^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = u^2 + v^2 \\ h_v^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2 \\ h_\phi^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = (uv)^2 \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned}
d\vec{s} &= h_u du \cdot \vec{i}_u + h_v dv \cdot \vec{i}_v + h_\phi d\phi \cdot \vec{i}_\phi \\
&= \sqrt{u^2+v^2} du \cdot \vec{i}_u + \sqrt{u^2+v^2} dv \cdot \vec{i}_v + uv d\phi \cdot \vec{i}_\phi \\
ds^2 &= (u^2+v^2)(du)^2 + (u^2+v^2)(dv)^2 + u^2v^2(d\phi)^2 \\
dV &= uv(u^2+v^2) du dv d\phi
\end{aligned}$$

Για να βρούμε τα μοναδιαία διανύσματα εργαζόμαστε ως εξής:

$$d\vec{s} = dx\vec{i}_x + dy\vec{i}_y + dz\vec{i}_z \implies$$

$$d\vec{s} = (\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi)\vec{i}_x + (\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi)\vec{i}_y + (\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi)\vec{i}_z \implies$$

$$d\vec{s} = (\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{i}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{i}_z)du + (\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}_x + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{i}_y + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{i}_z)dv + (\frac{\partial x}{\partial \phi}\vec{i}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\vec{i}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\vec{i}_z)d\phi$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των $du, dv, d\phi$ με την παραπάνω έκφραση έχουμε:

$$\vec{i}_u = \frac{1}{h_u}(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{i}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{i}_z) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(v\cos\phi \cdot \vec{i}_x + v\sin\phi \cdot \vec{i}_y + u \cdot \vec{i}_z)$$

$$\vec{i}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\cos\phi \cdot \vec{i}_x + u\sin\phi \vec{i}_y - v\vec{i}_z)$$

$$\vec{i}_z = \frac{1}{uv}(-uv\sin\phi \cdot \vec{i}_x + uv\cos\phi \cdot \vec{i}_y)$$

- Απάντηση:

- Κυλινδρικές παραβολικές συντεταγμένες:

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}, h_z = 1$$

$$d\vec{s} = \sqrt{u^2+v^2}(du \cdot \vec{i}_u + dv \cdot \vec{i}_v) + dz \cdot \vec{i}_z$$

$$dV = (u^2+v^2) du dv dz$$

$$\vec{i}_u = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\vec{i}_x - v\vec{i}_y)$$

$$\vec{i}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(-v\vec{i}_x + u\vec{i}_y)$$

- Κυλινδρικές ελλειπτικές συντεταγμένες:

$$h_u = h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, h_z = 1$$

$$d\vec{s} = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}(du \cdot \vec{i}_u + dv \cdot \vec{i}_v) + dz \cdot \vec{i}_z$$

$$dV = a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) du dv dz$$

$$\vec{i}_u = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}(a\sinh u\cos v \cdot \vec{i}_x + a\cosh u \sin v \cdot \vec{i}_y)$$

$$\vec{i}_v = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}(-a\cosh u\sin v \cdot \vec{i}_x + a\sinh u \cos v \cdot \vec{i}_y)$$

- Διπολικές συντεταγμένες:

$$h_u = h_v = \frac{a}{\cosh u + \cos v}$$

$$d\vec{s} = \frac{a}{\cosh u + \cos v}(du \cdot \vec{i}_u + dv \cdot \vec{i}_v)$$

$$dA = \frac{a^2}{(\cosh u + \cos v)^2} du dv$$

$$\vec{i}_u = \frac{1}{\cosh u + \cos v}((1 + \cos v\cosh u) \cdot \vec{i}_x - \sin v \sinh u \cdot \vec{i}_y)$$

$$\vec{i}_v = \frac{1}{\cosh u + \cos v}(\sin v \sinh u \cdot \vec{i}_x + (1 + \cos v\cosh u) \cdot \vec{i}_y)$$

2. Αν x^1, x^2, x^3 οι συντεταγμένες σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, να δείξετε ότι

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_2}{h_1 h_3}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}\right) = 0$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι $\vec{\nabla} x^i = \frac{1}{h_i}\vec{e}_i$ γιατί:

$$\vec{\nabla} x^i = \frac{1}{h_j}\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\vec{e}_j = \frac{1}{h_j}\delta^i_j \vec{e}_j = \frac{1}{h_i}\vec{e}_i$$

Έτσι, επειδή $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ θα έχουμε:

$$\vec{\nabla} x^1 \times \vec{\nabla} x^2 = \frac{1}{h_1 h_2}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{1}{h_1 h_2}\vec{e}_3 \implies$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} x^1 \times \vec{\nabla} x^2) = \vec{\nabla}(\frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2}) = 0$$

από την ταυτότητα $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\psi) = 0$. Όμοια αποδεικνύουμε και τις άλλες σχέσεις.

3. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων με την προηγούμενη άσκηση, να δείξετε ότι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_e\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

Λύση:

Είναι $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} x^i) = 0 = \vec{\nabla} \times (\vec{e}_i / h_i)$ και μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{\vec{e}_1}{h_1}(h_1 V_1) + \frac{\vec{e}_2}{h_2}(h_2 V_2) + \frac{\vec{e}_3}{h_3}(h_3 V_3)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{V}) = \phi(\vec{\nabla} \times \vec{V}) + (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{V}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{V} &= \vec{\nabla}(h_1 V_1) \times \frac{\vec{e}_1}{h_1} + \vec{\nabla}(h_2 V_2) \times \frac{\vec{e}_2}{h_2} + \vec{\nabla}(h_3 V_3) \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \vec{\nabla}(h_i V_i) \times \frac{\vec{e}_i}{h_i} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j}\frac{\partial (h_i V_i)}{\partial x^j}\vec{e}_j\right) \times \frac{\vec{e}_i}{h_i}
\end{aligned}$$

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\vec{e}_k$. Έτσι:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{V} &= \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{jik}\frac{1}{h_i h_j h_k}\frac{\partial (h_i V_i)}{\partial x^j}(h_k \vec{e}_k) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{kji}(h_k \vec{e}_k)\frac{\partial}{\partial x^j}(h_i V_i) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_e\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

γιατί ισχύει

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

4. Για τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων της άσκησης 1, να υπολογίσετε τα $\vec{\nabla}\phi, \nabla^2\phi, \vec{\nabla}\cdot\vec{V}, \vec{\nabla}\times\vec{V}$.

   - Απάντηση:

   - Κυλινδρικές παραβολικές συντεταγμένες

     $$h = \sqrt{u^2+v^2}$$
     $$\vec{\nabla}\phi = h^{-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\vec{i}_u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\vec{i}_v\right) + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{i}_z$$
     $$\nabla^2\phi = h^{-2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$
     $$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = h^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(hV_u) + \frac{\partial}{\partial v}(hV_v)\right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
     $$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(h^{-1}\frac{\partial V_z}{\partial v} - \frac{\partial V_v}{\partial z}\right)\vec{i}_u + \left(\frac{\partial V_u}{\partial z} - h^{-1}\frac{\partial V_z}{\partial u}\right)\vec{i}_v + h^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(hV_v) - \frac{\partial}{\partial v}(hV_u)\right]\vec{i}_z$$

   - Κυλινδρικές ελλειπτικές συντεταγμένες: όμοια όπως πριν αλλά $h = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$
   - Παραβολικές συντεταγμένες

     $$h = \sqrt{u^2+v^2}$$
     $$\vec{\nabla}\psi = h^{-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\vec{i}_u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\vec{i}_v\right) + (uv)^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{i}_\phi$$
     $$\nabla^2\psi = \frac{1}{h^2 u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{1}{h^2 v}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$
     $$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{h^2 u}\frac{\partial}{\partial u}(uhV_u) + \frac{1}{h^2 v}\frac{\partial}{\partial v}(vhV_v) + \frac{1}{uv}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$
     $$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left[\frac{1}{hv}\frac{\partial}{\partial v}(vV_\phi) - \frac{1}{uv}\frac{\partial V_v}{\partial\phi}\right]\vec{i}_u + \left[\frac{1}{uv}\frac{\partial V_u}{\partial\phi} - \frac{1}{hu}\frac{\partial}{\partial u}(uV_\phi)\right]\vec{i}_v + \frac{1}{h^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(hV_v) - \frac{\partial}{\partial v}(hV_u)\right]\vec{i}_\phi$$

   - Διπολικές συντεταγμένες: όμοια με τις κυλινδρικές παραβολικές συντεταγμένες αλλά $h = \frac{a}{\cosh u + \cos v}$ και χωρίς τα V_z και τις παραγώγους ως προς z.

5. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε τα $\vec{\nabla}\cdot\vec{i}_r,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{i}_\theta,\ \vec{\nabla}\times\vec{i}_r,\ \vec{\nabla}\times\vec{i}_\theta$

   - Απάντηση: $r^{-1},\ 0,\ 0,\ r^{-1}\vec{i}_z$

6. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε τα $\vec{\nabla}\cdot\vec{i}_r,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{i}_\theta,\ \vec{\nabla}\times\vec{i}_\theta,\ \vec{\nabla}\times\vec{i}_\phi$

   - Απάντηση: $2r^{-1},\ r^{-1}\cot\theta,\ r^{-1}\vec{i}_\phi,\ r^{-1}(\cot\theta\,\vec{i}_r - \vec{i}_\theta)$

7. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε τα $\vec{\nabla}\times(\ln r\,\vec{i}_z),\ \vec{\nabla}\ln r,\ \vec{\nabla}\cdot(r\vec{i}_r + z\vec{i}_z)$

   - Απάντηση: $-r^{-1}\vec{i}_\theta,\ r^{-1}\vec{i}_r,\ 3$

8. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε τα $\vec{\nabla}\times(r\vec{i}_\theta),\ \vec{\nabla}(r\cos\theta),\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r}$

   - Απάντηση: $2\vec{i}_\phi,\ \cos\theta\,\vec{i}_r - \sin\theta\,\vec{i}_\theta,\ 3$

9. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε τα $\nabla^2 r,\ \nabla^2(1/r),\ \nabla^2\ln r$

   - Απάντηση: $r^{-1},\ r^{-3},\ 0$

10. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, να υπολογίσετε τα $\nabla^2 r,\ \nabla^2(r^2),\ \nabla^2(1/r^2)$

    - Απάντηση: $2r^{-1},\ 6,\ 2r^{-4}$