Μαθηματικά ΙΙ - 8η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

---

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int (x^2 - y^2)dx - 2xydy$ από το $(0,0)$ στο $(1,2)$ στις ακόλουθες διαδρομές:

   (α′) $y = 2x^2$

   (β′) $x = t^2,\ y = 2t$

   (γ′) Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων $(0,0) \underset{1}{\rightarrow} (2,0) \underset{2}{\rightarrow} (1,2)$

   Λύση:

   (α′)

$$
\begin{aligned}
&dy = 4xdx \implies \\
&I = \int_{x=0}^{1} (x^2 - 4x^4)dx - 16x^4 dx \implies \\
&I = \int_{0}^{1} (x^2 - 20x^4)dx \implies \\
&I = \left(\frac{x^3}{3} - 4x^5\right)_0^1 \implies \\
&I = -\frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

   (β′)

$$
\begin{aligned}
&dx = 2tdt,\ dy = 2dt \implies \\
&I = \int_{0}^{1} (t^4 - 4t^2)2tdt - 8t^3 dt \implies \\
&I = \int_{0}^{1} (2t^5 - 16t^3)dt \implies \\
&I = \left(\frac{2t^6}{6} - 4t^4\right)_0^1 \implies \\
&I = -\frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

(γ′)

(1) :

$y=0, dy=0 \implies I_1=\int_0^2 x^2dx = 8/3 (2):$

$y=-2x+4,\ dy=-2dx \implies$

$I_2=\int_2^1 (x^2-(-2x+4)^2)dx - 2x(-2x+4)(-2)dx \implies$

$I_2=\int_2^1 (-11x^2+32x-16)dx \implies$

$I_2=\left(-\frac{11}{3}x^3+16x^2-16x\right)_2^1 \implies$

$I_2=-19/3$

$I=I_1+I_2=-\frac{11}{3}$

Βλέπουμε ότι και στις 3 περιπτώσεις το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν γράψουμε το ολοκλήρωμα

$$I=\int (x^2-y^2, -2xy)d\vec{r}$$

και έτσι αν θέσουμε $\vec{F}=(x^2-y^2,-2xy,0)$ μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$. Πράγματι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-y^2 & -2xy & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}_z(-2y-2y)=0$$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\oint (x+2y)dx - 2xdy$ στις ακόλουθες διαδρομές:

   (α′) ο κύκλος $x^2+y^2=1$

   (β′) το τετράγωνο με κορυφές $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$

   (γ′) το τετράγωνο με κορυφές $(0,1),\ (-1,0),\ (0,-1),\ (1,0)$

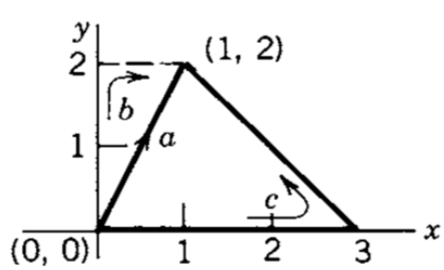
   - Απάντηση:

   (α′) -4π

   (β′) -16

   (γ′) -8

3. Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int xydx+xdy$ από το σημείο $(0,0)$ στο $(1,2)$ κατά μήκος των διαδρομών που φαίνονται στο σχήμα.
   - Απάντηση: (a): 5/3, (b): 1, (c): 2/3



4. Να υπολογίσετε το $\int_C y^2dx+2xdy+dz$ όπου η καμπύλη C συνδέει το $(0,0,0)$ με το $(1,1,1)$,

(α′) κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1) \to (1,1,1)$

(β′) στον κύκλο $x^2 + y^2 - 2y = 0$ στο $(1,1,0)$ και μετά πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα προς το $(1,1,1)$.

Λύση:

(α′)

$$(0,0,0) \to (1,0,0),\ y = z = 0,\ dx = dy = 0 \implies I_1 = 0$$
$$(1,0,0) \to (1,0,1),\ x = 1,\ y = 0,\ dx = dy = 0 \implies I_2 = \int_0^1 dz = 1$$
$$(1,0,1) \to (1,1,1),\ x = z = 1,\ dx = dz = 0 \implies I_3 = \int_0^1 2dy = 2$$
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 3$$

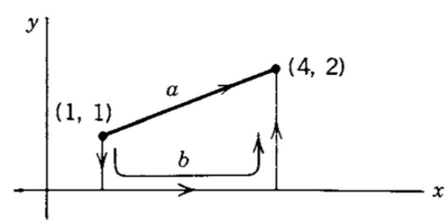
(β′) πρώτα πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y-1)^2 = 1$ μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τα x, y: $x = \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le \pi/2$. Έτσι:

$$dx = \cos t dt,\ dy = \sin t dt,\ dz = 0,\ I_1 = \int_0^{\pi/2} (1-\cos t)^2 \cos t dt + 2 \sin t \sin t dt \implies$$
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (\cos t + \cos^3 t - 2\cos^2 t + 2\sin^2 t = \frac{5}{3}$$

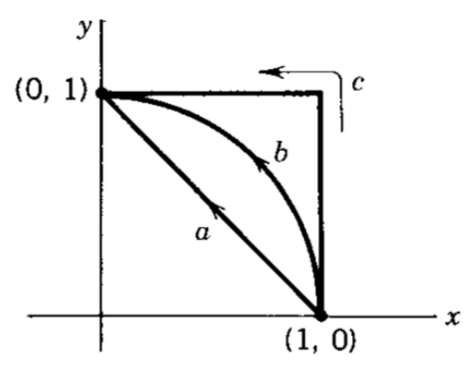
Στη συνέχεια πάνω στην ευθεία από το $(1,1,0)$ στο $(1,1,1)$ έχουμε:

$$x = 1,\ y = 1,\ dx = dy = 0 \implies I_2 = \int_0^1 dz = 1 I = I_1 + I_2 = \frac{8}{3}$$

5. Να βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F} = x^2 y\ \vec{i}_x - xy^2\ \vec{i}_y$ κατά μήκος των διαδρομών που φαίνονται στο σχήμα από το σημείο $(1,1)$ στο $(4,2)$.
   - Απάντηση: (a): $86/3$, (b): $-31/3$



6. Να βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F} = (2xy-3)\ \vec{i}_x - x^2\ \vec{i}_y$ κατά μήκος των διαδρομών που φαίνονται στο σχήμα από το σημείο $(1,0)$ στο $(0,1)$.
   - Απάντηση: (a,b,c): 3



7. Για τη δύναμη $\vec{F} = (y+z)\ \vec{i}_x - (x+z)\ \vec{i}_y + (x+y)\ \vec{i}_z$ να βρείτε το έργο στις εξής διαδρομές:

(α′) στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ πάνω στο επίπεδο (x,y) με φορά αντίθετη του ρολογιού

(β′) στον κύκλο $x^2 + z^2 = 1$ πάνω στο επίπεδο (z,x) με φορά αντίθετη του ρολογιού

(γ′) πάνω στα εύθύγραμμα τμήματα $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1) \to (1,1,1) \to (0,0,0)$

(δ′) από την αρχή των αξόνων στο $(0,0,2\pi)$ πάνω στην καμπύλη $x = 1-\cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ και μετά πίσω στην αρχή των αξόνων κατά μήκος του άξονα z,

- Απάντηση: (α′): -2π, (β′): 0, (γ′): -2, (δ′): 2π

8. Για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία να αποδείξετε ότι είναι συντηρητικά και στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού ϕ για την οποία ισχύει ότι $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

$$
\begin{array}{rcl}
(a) & : & \vec{F} = \ \vec{i}_x - z\,\vec{i}_y - y\,\vec{i}_z \\
(b) & : & \vec{F} = (3x^2yz - 3y)\,\vec{i}_x + (x^3z - 3x)\,\vec{i}_y + (x^3y + 2z)\,\vec{i}_z \\
(c) & : & \vec{F} = -k\vec{r},\ k = const \\
(d) & : & \vec{F} = y\sin 2x\,\vec{i}_x + \sin^2 x\,\vec{i}_y \\
(e) & : & \vec{F} = y\,\vec{i}_x + x\,\vec{i}_y + \ \vec{i}_z \\
(f) & : & \vec{F} = z^2\sinh y\,\vec{i}_y + 2z\cosh y\,\vec{i}_z \\
(g) & : & \vec{F} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}(y\,\vec{i}_x + x\,\vec{i}_y) \\
(h) & : & \vec{F} = 2x\cos^2 y\,\vec{i}_x - (x^2+1)\sin 2y\,\vec{i}_y
\end{array}
$$

- Απάντηση:

$$
\begin{array}{rcl}
(a) & : & yz - x \\
(b) & : & 3xy - x^3yz - z^2 \\
(c) & : & \frac{1}{2}kr^2 \\
(d) & : & -y\sin^2 x \\
(e) & : & -(xy+z) \\
(f) & : & -z^2\cosh y \\
(g) & : & -\sin^{-1} xy \\
(h) & : & -(x^2+1)\cos^2 y
\end{array}
$$

Λύση της (g):

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \\
&= \vec{i}_z\Big(\frac{\sqrt{1-x^2y^2} + y\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}}{(1-x^2y^2)} - \frac{\sqrt{1-x^2y^2} + x\frac{y^2x}{\sqrt{1-x^2y^2}}}{(1-x^2y^2)}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση δυναμικού, θα ολοκληρώσουμε πάνω στη διαδρομή $(0,0,0) \underset{1}{\rightarrow} (x,0,0) \underset{2}{\rightarrow}$

$(x,y,0) \underset{3}{\rightarrow} (x,y,z)$. Έτσι:

$$(1):\ y=z=0,\ dy=dz=0 \implies I_1=0$$

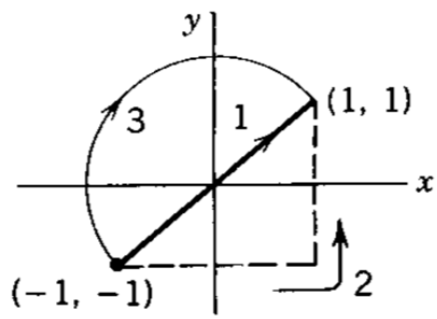
$$(2):\ x=x,\ z=0,\ dx=dz=0 \implies I_2=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}xdy \implies$$

$$I_2=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}d(xy)=\sin^{-1}(xy)\Big|_0^y=\sin^{-1}xy$$

$$(3):\ x=1,\ y=1,\ dx=dy=0 \implies I_3=0$$

$$\phi=-(I_1+I_2+I_3)=-\sin^{-1}xy$$

9. Για τα πεδία δυνάμεως $\vec{F_1}=2x\ \vec{i}_x-2yz\ \vec{i}_y-y^2\ \vec{i}_z$ και $\vec{F_2}=y\ \vec{i}_x-x\ \vec{i}_y$ να βρείτε αν είναι συντηρητικά και στη συνέχεια να υπολογίσετε το έργο κατά μήκος των διαδρομών που φαίνονται στο σχήμα.
- Απάντηση:
$\vec{F_1}$ συντηρητικό πεδίο, $\phi=y^2z-x^2$ και $W=\phi(1,1,0)-\phi(-1,-1,0)=0$
$\vec{F_2}$ δεν είναι συντηρητικό πεδίο. $W=$: $(a):0,\ (b):-4,\ (c):2\pi$



10. Για τα πεδία δυνάμεως $\vec{F_1}=-y\ \vec{i}_x+x\ \vec{i}_y+z\ \vec{i}_z$ και $\vec{F_2}=y\ \vec{i}_x+x\ \vec{i}_y+z\ \vec{i}_z$ να βρείτε αν είναι συντηρητικά και στη συνέχεια να υπολογίσετε το έργο κατά μήκοςτου κύκλου $x=\cos t,\ y=\sin t$ πάνω στο επίπεδο $x-y$.

- Απάντηση: $\vec{F_1}$ δεν είναι συντηρητικό και $W=2\pi$, $\vec{F_2}$ είναι συντηρητικό και $W=0$