Μαθηματικά ΙΙ - 9η Σειρά Ασκήσεων

Δ. Βλάχος - Απρίλιος 2020

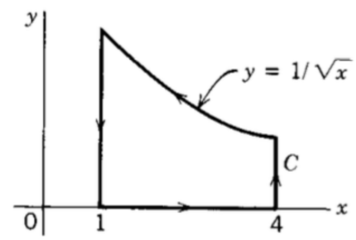
Οι ασκήσεις που δίνονται συνοδεύονται από ένα πλήρως λυμένο παράδειγμα και από άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση με απάντηση. Όπου χρειαστεί, αναφέρονται και κάποια βασικά σημεία της θεωρίας.

Πολλές φορές για ευκολία, η μερική παράγωγος $\partial g/\partial x$ συβολίζεται με g_x και η $\partial^2 g/\partial x \partial y$ με g_{xy}.

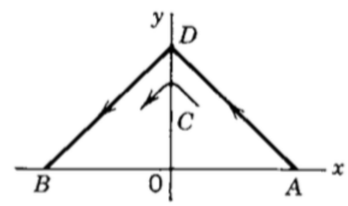
---

1. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ολοκληρώματα κάνοντας εφαρμογή του θεωρήματος Green :

   (α′) $\oint 2x\,dy - 3y\,dx$ γύρω από το τετράγωνο με κορυφές $(0,2),\ (2,0),\ (-2,0),\ (0,-2)$
   - Απάντηση: 40



   (β′) $\oint_C xy\,dx + x^2 dy$ όπου C η καμπύλη του σχήματος.
   - Απάντηση: 14/3

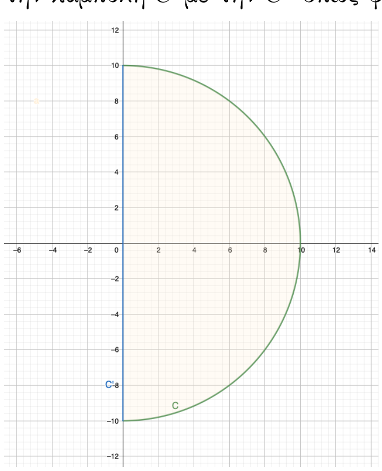


   (γ′) $\int_C (ye^x - 1)dx + e^x dy$ όπου C είναι η τεθλασμένη γραμμή από το $A(\ln 2, 0)$ στο $D(0,1)$ και από εκεί στο $B(-\ln 2, 0)$
   - Απάντηση: $-3/2$

   (δ′) $\int_C (ye^x - 1)dx + e^x dy$ όπου C το ημικύκλιο από το $(0,-10)$ στο $(10,0)$ και τέλος στο $(0,10)$

   Λύση:

   (δ′) Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green θα πρέπει να έχουμε μια κλειστή καμπύλη. Έτσι κλείνουμε την καμπύλη C με την C' όπως φαίνεται στο σχήμα.



$$P = ye^x - 1,\ Q = x^x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x - e^x = 0 \implies$$
$$I = \int_C (ye^x - 1)dx + e^x dy = \int_{C'} (ye^x - 1)dx + e^x dy \implies$$
$$C' : x = 0, dx = 0,\ -10 \le y \le 10 \implies$$
$$I = \int_{-10}^{10} dy = 20$$

2. Για μια απλή κλειστή καμπύλη C να δειχτεί ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείει είναι $\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$

   Λύση:

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green έχουμε:

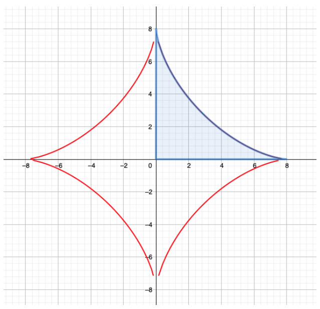
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) &= \frac{1}{2}\iint_{S_C}\left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial(-y)}{\partial x}\right)dxdy \\ &= \iint_{S_C} dxdy\end{aligned}$$

όπου S_C η επιφάνεια που περικλείεται από την καμπύλη C.

3. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του προβλήματος 2, να δείξετε ότι η επιφάνεια της έλλειψης $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ είναι πab.

4. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του προβλήματος 2, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

   - Υπόδειξη:



Υπολογίστε το ένα τέταρτο της επιφάνειας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επιφάνεια περικλείεται από τις $x = 0,\ y = 0,\ x^{2/3} + y^{2/3} = 4$. Για τον υπολογισμό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μετασχηματισμό

$$x = 8r^3\cos^3\theta$$
$$y = 8r^3\sin^3\theta$$
$$0 \le \theta \le \pi/2$$

Απάντηση: 24π

5. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ολοκληρώματα με τον πιο εύκολο τρόπο:

   (α′) $\oint(2y\,dx - 3x\,dy)$ στο τετράγωνο που περικλείεται από τις $x = 3,\ x = 5,\ y = 1,\ y = 3$.

   - Απάντηση: -20

   (β′) $\int_C (x\sin x - y)dx + (x - y^2)dy$, όπου C το τρίγωνο στο επίπεδο $x - y$ με κορυφές $(0,0),\ (1,1),\ (2,0)$.

   - Απάντηση: 2

   (γ′) $\int(y^2 - x^2)dx + (2xy + 3)dy$ κατά μήκος του άξονα-x από το $(0,0)$ στο $(\sqrt{5},0)$ και από εκεί πάνω σε κυκλικό τόξο στο $(1,2)$.

   - Απάντηση: $29/3$

6. Να επαληθεύσετε το θεώρημα της απόκλισης για το $\vec{V} = \vec{r} = (x,y,z)$ στον όγκο $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

   Λύση:

   Έχουμε $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 3$. Έτσι:

$$\iiint_\Omega 3\,dx\,dy\,dz = 4\pi$$

   Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες. Τότε

$$\vec{V} = \vec{r} = r\vec{i}_r,\ \vec{n} = \vec{i}_r \implies \vec{V}\cdot\vec{n} = r = 1$$
$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi$$

   γιατί στην επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα 1 το στοιχειώδες εμβαδόν είναι $r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \sin\theta\,d\theta\,d\phi$.

7. Αν $\vec{V} = (x^2, y^2, z^2)$ να επαληθεύσετε το θεώρημα της απόκλισης στον κύβο με τέσσερις από τις κορυφές του στα σημεία $(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0)$.

   - Απάντηση: 3

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα με τον πιο εύκολο τρόπο:

   (α΄) $\iint \vec{r}\cdot\vec{n}d\sigma$ πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ που φράζεται από τα επίπεδα $z=0,\ z=3$.

   - Απάντηση: 9π

   (β΄) $\iint \vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma$ αν $\vec{V} = x\cos^2 y\vec{i}_x + xz\vec{i}_y + z\sin^2 y\vec{i}_z$ πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3.

   - Απάντηση: 36π

   (γ΄) $\iiint(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})d\tau$ στον όγκο $x^2+y^2+z^2 \leq 25$ όπου

$$\vec{V} = (x^2+y^2+z^2)(x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z)$$

   - Απάντηση: $4\pi 5^5$

   (δ΄) $\iiint(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})d\tau$ στο μοναδιαίο κύβο $0 \leq x,y,z \leq 1$ όπου

$$\vec{V} = (x^3-x^2)y\vec{i}_x + (y^3-2y^2+y)\vec{i}_y + (z^2-1)\vec{i}_z$$

   - Απάντηση: 1

   (ε΄) $\iint \vec{r}\cdot\vec{n}d\sigma$ πάνω στην επιφάνεια του κώνου με βάση $x^2+y^2 \leq 16,\ z=0$ και κορυφή το σημείο $(0,0,3)$.

   - Απάντηση: 48π

   (ϛ΄) $\iiint(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})d\tau$ στον όγκο $x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 5$ και

$$\vec{V} = \sqrt{x^2+y^2}(x\vec{i}_x + y\vec{i}_y)$$

   - Απάντηση: 80π

9. Να αποδείξετε τις ταυτότητες του Green :

$$\iiint_\Omega(\phi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi)d\tau = \oint_{\partial\Omega}(\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{n}\,d\sigma$$
$$\iiint_\Omega(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)d\tau = \oint_{\partial\Omega}(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

- Υπόδειξη: εφαρμόστε το θεώρημα της απόκλισης με $\vec{V} = \phi\vec{\nabla}\psi$ και στη συνέχεια με $\vec{V} = \phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi$

10. Για το διάνυσμα $\vec{A} = (x^2-y^2)\vec{i}_x + 2xy\vec{i}_y$ να βρείτε το $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ και να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes στο ορθογώνιο που περικλείεται από τις $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$.

    Λύση:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-y^2 & 2xy & 0 \end{vmatrix} = (2y+2y)\vec{i}_z = 4y\vec{i}_z$$
$$\iint(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_0^a dx\int_0^b 4ydy = 2ab^2$$

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα αθροίσουμε πάνω στις 4 πλευρές του ορθογωνίου:

$$I_1: \ y=0, dy=0, 0 \le x \le a \implies I_1 = \int_0^a x^2 dx = a^3/3$$
$$I_2: \ x=a, dx=0, 0 \le y \le b \implies I_2 = \int_0^b 2ay\, dy = ab^2$$
$$I_3: \ y=b, dy=0, a \ge x \ge 0 \implies I_3 = \int_a^0 (x^2-b^2)dx = -a^3/3 + b^2 a$$
$$I_2: \ x=0, dx=0, b \ge y \ge 0 \implies I_4 = \int_b^0 0\, dy = 0$$
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2ab^2$$

11. Να υπολογίσετε το $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ στις ακόλουθες περιπτώσεις με τον πιο εύκολο τρόπο:

(α′) $V = x^2\vec{i}_x + z^2\vec{i}_y - y^2\vec{i}_z$ και η επιφάνεια S είναι η $z = 4 - x^2 - y^2, \ z \ge 0$

- Απάντηση: 0

(β′) $V = (x - x^2 z)\vec{i}_x + (yz^3 - y^2)\vec{i}_y + (x^2 y - xz)\vec{i}_z$ και η επιφάνεια S είναι μια οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνορο που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $x - y$

- Απάντηση: 0

(γ′) $V = x^2 y\vec{i}_x - xz\vec{i}_z$ και η επιφάνεια S είναι η $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

- Υπόδειξη: Το θεώρημα του Stokes εφαρμόζεται σε ανοικτές επιφάνεις, έτσι πρέπει να χωρίσετε την κλειστή επιφάνεια που σας δίνεται σε δύο ανοικτές.

Απάντηση: 0

(δ′) $V = 2xy\vec{i}_x + (x^2 - 2x)\vec{i}_y - x^2 z^2\vec{i}_z$ και η επιφάνεια S είναι η $z = 9 - x^2 - 9y^2, \ z \ge 0$

- Απάντηση: -6π

12. Για τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία $\vec{V}$ να βρείτε το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}: \ \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

(α′) $\vec{V} = (x^2 - yz + y)\vec{i}_x + (x - 2yz)\vec{i}_y + (z^2 - 2zx + x + y)\vec{i}_z$

(β′) $\vec{V} = (x^2 - 2xz)\vec{i}_x + (y^2 - 2xy)\vec{i}_y + (z^2 - 2yz + xy)\vec{i}_z$

- Απάντηση: $\vec{A} = (y^2 z - xy^2)\vec{i}_x + xz^2\vec{i}_y + x^2 y\vec{i}_z + \vec{\nabla}\phi$

(γ′) $\vec{V} = (ze^{zy} + x\sin(zx))\vec{i}_x + x\cos(xz)\vec{i}_y - z\sin(zx)\vec{i}_z$

- Απάντηση: $\vec{A} = \sin(zx)\vec{i}_x + \cos(zx)\vec{i}_y + e^{zy}\vec{i}_z + \vec{\nabla}\phi$

(δ′) $\vec{V} = -\vec{i}_z$

- Απάντηση: $\vec{A} = y\vec{i}_x + \vec{\nabla}\phi$

Λύση:

(α′)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$
$$\vec{A} = (0, A_y, A_z) \implies \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\vec{i}_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\vec{i}_z$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial A_z}{\partial x} = x - 2yz \implies A_z = 2xyz - x^2/2 + f_1(y,z)\\
&\frac{\partial A_y}{\partial x} = z^2 - 2zx + x + y \implies A_y = z^2x - zx^2 + x^2/2 + xy + f_2(y,z)\\
&\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 2xz + \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} - (2zx - x^2 + \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z}) = x^2 - yz + y \implies\\
&\frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z} + x^2 = x^2 - yz + y \implies\\
&\frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z} = y - yz
\end{aligned}
$$

Μπορούμε να θέσουμε $f_2 = 0$ και τότε $f_1 = \frac{1}{2}y^2(1-z)$. Έτσι:

$$\vec{A} = (z^2x - zx^2 + x^2/2 + xy)\vec{i}_y + (2xyz - x^2/2 + y^2(1-z)/2)\vec{i}_z + \vec{\nabla}\phi$$

Σημειώστε ότι πάντα μπορούμε να προσθέτουμε στο διανυσματικό δυναμικό τη βαθμίδα μιας οποιασδήποτε συνάρτησης, αφού ο στροβιλισμός της βαθμίδας είναι ταυτοτικά 0.