Εργαστήριο Μαθηματικής Μοντελοποίησης
και Πολύπλοκων Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Η απάτη του Van Meegeren

Μαθηματικά ΙΙΙ - Εργασία 01

Περίληψη

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, μέσα από ένα πραγματικό ιστορικό γεγονός, θα δούμε τη χρήση των διαφορικών εξισώσεων για την εκτίμηση της ηλικίας ενός έργου τέχνης και συγκεκριμένα ενός πίνακα ζωγραφικής.

Λέξεις κλειδιά – Διαφορικές εξισώσεις 1ου βαθμού, ραδιενεργός αποσύνθεση, ραδιοχρονολόγηση

1 Εισαγωγή

Ιστορικά στοιχεία Μετά την απελευθέρωση του Βελγίου στο τέλος του 2ου παγκοσμίου πολέμου, η Βελγική πολιτοφυλακή άρχισε να καταδιώκει τους συνεργάτες των ναζί. Τότε ανακάλυψαν στα αρχεία μιας εταιρίας που είχε πουλήσει μεγάλο αριθμό έργων τέχνης στους Γερμανούς, το όνομα ενός τραπεζίτη που είχε μεσολαβήσει στην πώληση στον Goering του πίνακα "Ο Χριστός με τη μοιχαλίδα" (Woman taken in adultery) του διάσημου Ολλανδού ζωγράφου του 17ου αιώνα Jan Vermeer [1]. Ο τραπεζίτης με τη σειρά του ισχυρίστηκε ότι δρούσε για λογαριασμό ενός τρίτου Ολλανδού ζωγράφου του οποίου το όνομα ήταν H.A. Van Meegeren. Στις 29 Μαΐου 1945 ο Van Meegeren συνελήφθη με την κατηγορία ότι συνεργάσθηκε με τους εχθρούς.

Στις 12 Ιουλίου του 1945 ο Van Meegeren εξέπληξε τις αρχές δηλώνοντας από τη φυλακή ότι ποτέ του δεν είχε πουλήσει τον συγκεκριμένο πίνακα στον Goering. Επιπλέον, ισχυρίστηκε ότι αυτός ο πίνακας μαζί με το διάσημο πίνακα "Το δείπνο στους Εμμαούς" (Disciples at Emmaaus) και ακόμα 4 πίνακες του Vermeer και 2 πίνακες του De Hooghs (διάσημου Ολλανδού ζωγράφου του 17ου αιώνα) ήταν δικά του έργα. Πολλοί τότε θεώρησαν ότι ο Van Meegeren έλεγε ψέματα ώστε να απαλλαχθεί από την κατηγορία για προδοσία. Όμως, για να αποδείξει τον ισχυρισμό του και ενώ ήταν στη φυλακή, ο Van Meegeren ξεκίνησε να αντιγράφει τον πίνακα του Vermeer "Ο Χριστός ανάμεσα στους γιατρούς" (Christ among the doctors) ώστε να αποδείξει στους σκεπτικιστές πόσο καλός αντιγραφέας του Vermeer ήταν. Λίγο πριν τελειώσει το έργο, ο Van Meegeren έμαθε ότι αποσύρθηκαν οι

Σχήμα 1: **H.A. Van Meegeren** - Ο πίνακας "Ο Χριστός με τη μοιχαλίδα" και ο αποδέκτης του έργου Goering

κατηγορίες για συνεργασία με τον εχθρό και αντικαταστάθηκαν με αυτήν της απάτης. Τότε, αρνήθηκε να ολοκληρώσει και παλαιώσει το έργο ώστε να μην ανακαλύψουν οι ειδικοί την τεχνική που χρησιμοποιούσε για την παλαίωση του αντιγράφου. Τότε, για να διαλευκανθεί αυτή (και άλλες) η υπόθεση, μια ομάδα από χημικούς, φυσικούς και ιστορικούς τέχνης συναντήθηκαν για να διερευνήσουν την υπόθεση. Η ομάδα πήρε x-ray φωτογραφίες των πινάκων για να διαπιστωθεί αν υπήρχαν άλλα έργα από κάτω και εξέτασαν τα χρώματα (τη χημική τους σύσταση) για να δουν αν ήταν συμβατή με την υποτιθέμενη εποχή που δημιουργήθηκαν οι πίνακες.

Όντας καλά ενημερωμένος για τις τεχνικές αυτές, και για αν αποφύγει την ανακάλυψη της απάτης, ο Van Meegeren έξυνε την μπογιά από παλιούς πίνακες που είχαν αμελητέα αξία και έπαιρνε τον καμβά και προσπαθούσε να χρησιμοποιήσει χρώματα που θεωρητικώς θα χρησιμοποιούσε ο Vermeer. Επίσης γνωρίζετε ότι η παλιά μπογιά ήταν εξαιρετικά σκληρή και αδύνατο να διαλυθεί. Έτσι, πολύ έξυπνα ανέμιξε μια χημική ένωση, τη φορμαλδεΰδη, μέσα στην μπογιά. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα η μπογιά να σκληρύνει όταν ο ολοκληρωμένος πίνακας θερμαίνονταν σε ένα φούρνο.

Όμως ο Van Meegeren ήταν απρόσεκτος με κάποιες από τις αντιγραφές του και η ομάδα των ειδικών βρήκε ίχνη μοντέρνας μπογιάς στους πίνακες. Επιπλέον, βρέθηκαν και ίχνη φορμαλδεΰδης, η οποία ανακαλύφθηκε στα τέλη του 19ου αιώνα και ήταν αδύνατον να βρεθεί σε πίνακα του 17ου αιώνα. Έτσι, ο Van Meegeren καταδικάστηκε για απάτη για ένα χρόνο. Μέσα στη φυλακή, έπαθε καρδιακή προσβολή και πέθανε, παίρνοντας το μυστικό της απάτης του μαζί του.

Ακόμα όμως κι αν τα στοιχεία που είχαν συγκεντρωθεί από την ομάδα των ειδικών ήταν καθοριστικά, πολλοί άνθρωποι πίστευαν ακόμα πως ο πίνακας "Το δείπνο στους Εμμαούς" ήταν αυθεντικός. Η άποψή τους στηρίζονταν στο γεγονός ότι οι άλλοι πίνακες που είχαν αντιγραφεί ακόμα και αυτός που ο ίδιος ο Van Meegeren ζωγράφισε όσο ήταν στη φυλακή, ήταν πολύ χαμηλότερης ποιότητας από αυτόν και ισχυρίζονταν πως ο δημιουργός του "Δείπνου στους Εμμαούς" δεν μπορεί να ήταν ο ίδιος με αυτόν που έκανε τις άλλες απάτες. Έτσι, ο πίνακας χαρακτηρίστηκε ως αυθεντικός πίνακας του Vermeer από τον ιστορικό τέχνης A. Bredius και αγοράστηκε από το ίδρυμα Rembrandt στο ποσό των $170,000. Η ομάδα όμως των ειδικών ακόμα επέμενε πως ο πίνακας ήταν ψεύτικος και ότι ήταν η προσπάθεια του Van Meegeren να αποδείξει ότι δεν ήταν απλά ένας ζωγράφος της σειράς. Για το λόγο αυτό ζήτησαν εκ νέου την επιστημονική διερεύνηση την οποία ανέλαβε το 1967 μια ομάδα επιστημόνων από το Carnegie Mellon University. Στη συνέχεια θα δούμε πως αυτή η ομάδα απέδειξε ότι ο πίνακας ήταν πλαστός [2, 3].

Σχήμα 2: **Ο επίμαχος πίνακας** - "Δείπνο στους Εμμα-ούς'

2 Ραδιοχρονολόγηση

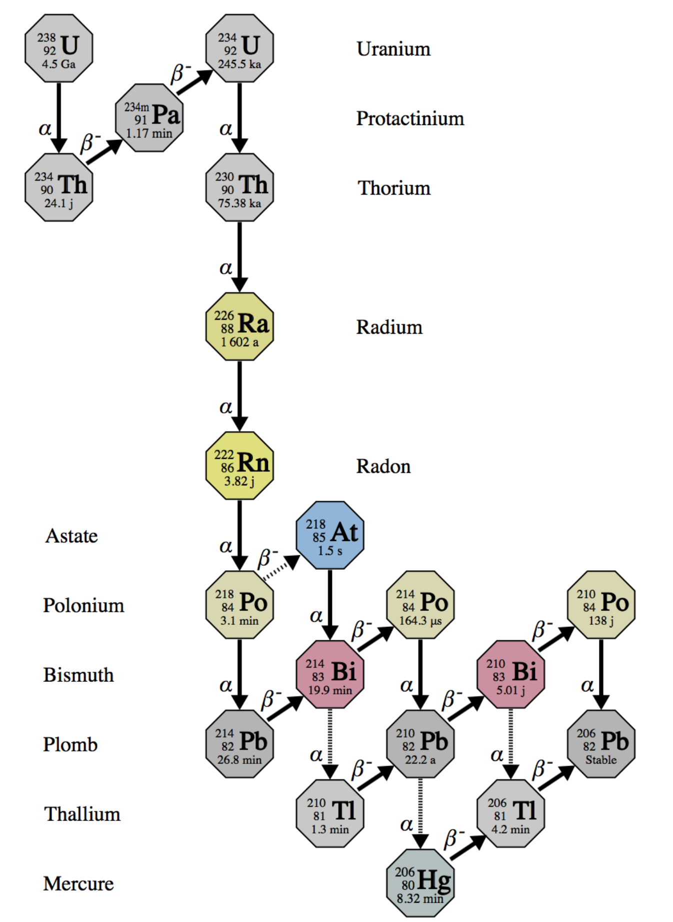
Το κλειδί για τη χρονολόγηση των πινάκων ζωγραφικής καθώς και άλλων αντικειμένων, όπως γλυπτών, έγκειται στο φαινόμενο της ραδιενεργούς αποσύνθεσης η οποία ανακαλύφτηκε στο τέλος του προηγούμενου αιώνα. Ο διάσημος φυσικός Rutherford μαζί με τους συνεργάτες του, έδειξαν ότι τα άτομα πολλών ραδιενεργών στοιχείων είναι ασταθή και μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ένα καθορισμένο κλάσμα αυτών των ατόμων με τυχαίο τρόπο αποσυντίθεται για να σχηματίσουν άτομα ενός νέου στοιχείου. Επειδή η ραδιενέργεια είναι μια ατομική ιδιότητα ο Rutherford έδειξε ότι Η ραδιενεργή αποσύνθεση ενός υλικού είναι απευθείας ανάλογη του αριθμού των ατόμων σε αυτό. Ας υποθέσουμε ότι $N(t)$ είναι ο αριθμός των ατόμων του ραδιενεργού υλικού τη χρονική στιγμή t. Σε ένα χρονικό διάστημα δt, η πιθανότητα ένα άτομο να αποσυντεθεί είναι ανάλογη του χρονικού διαστήματος και έστω ότι είναι $\lambda \cdot \delta t$ όπου το λ είναι μια σταθερά συγκεκριμένη για το εν λόγω ραδιενεργό στοιχείο. Έτσι, το πλήθος των ατόμων που θα αποσυντεθούν στο διάστημα δt θα είναι $N(t) \cdot \lambda \cdot \delta t$. Έτσι,

$$\begin{aligned} N(t+\delta t) &= N(t) - N(t)\cdot\lambda\delta t => \\ N(t+\delta t) - N(t) &= -\lambda\cdot N(t)\cdot\delta t \end{aligned} \tag{1}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με δt και παίρνοντας το όριο $\delta t \to 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t\to 0}\frac{N(t+\delta t)-N(t)}{\delta t} &= -\lambda\cdot N(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} &= -\lambda N(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Η σταθερά λ η οποία είναι πάντα θετική είναι γνωστή ως σταθερά αποσύνθεσης του συγκεκριμένου υλικού. Όσο μεγαλύτερο είναι το λ τόσο πιο γρήγορα αποσυντίθεται το ραδιενεργό υλικό. Μια συνηθισμένη ποσότητα για την ταχύτητα με την οποία αποσυντίθεται ένα ραδιενεργό υλικό είναι ο χρόνος ημίσιας ζωής του υλικού, που είναι ο χρόνος ο οποίος χρειάζεται για να μειωθεί η ποσότητα του υλικού στο μισό. Για να υπολογίσουμε την ποσότητα αυτή, θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή 0 η ποσότητα του υλικού



Σχήμα 3: **Ουράνιο** - Η αλυσίδα αποσύνθεσης του Ουρανίου ^{238}U. Για τους χρόνους ημίσιας ζωής χρησιμοποιούνται τα σύμβολα: a - χρόνια, j - ημέρες, min - λεπτά και sec - δευτερόλεπτα. Επίσης, τα προθέματα $G = 10^9, M = 10^6, K = 10^3, \mu = 10^{-6}$.

είναι $N(0) = N_0$. Τότε:

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} - -\lambda$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda \cdot dt$$

$$\int_0^{N(t)} \frac{dN(t)}{N(t)} = \int_0^t -\lambda \cdot dt$$

$$\ln N(t)|_{N(0)}^{N(t)} = -\lambda t|_0^t$$

$$\ln N(t) - \ln N_0 = -\lambda t$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} - -\lambda t \qquad (3)$$

Έτσι, τη χρονική στιγμή που θα είναι $N(t) = N_0/2$ θα έχουμε:

$$t_{hf} = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad (4)$$

όπου t_{hf} ο χρόνος ημίσιας ζωής του υλικού. Όπως προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση, ο χρόνος ημίσιας ζωής είναι αντιστρόφως ανάλογος της σταθεράς αποσύνθεσης λ και επιπλέον, το λ έχει μονάδες αντίστροφου χρόνου, δηλαδή αν ο χρόνος ημίσιας ζωής μετράται σε χρόνια, τότε το λ έχει μονάδες χρόνια^{-1}. Για παράδειγμα, ο χρόνος ημίσιας ζωής του ^{14}C (ισότοπο του άνθρακα) είναι5568 χρόνια ενώ του ^{238}U (ουράνιο) είναι 4.5 δισεκατομμύρια χρόνια.

Ραδιοχρονολόγηση Η βάση της ραδιοχρονολόγησης βρίσκεται στην παρατήρηση, πως γνωρίζοντας το χρόνο ημίσιας ζωής (ή τη σταθερά αποσύνθεσης) τότε αν η ποσότητα του υλικού κάποια στιγμή t_0 στο παρελθόν ήταν N_0 και η ποσότητα στην παρούσα χρονική στιγμή t είναι N, τότε, η εξίσωση (3) δίνει:

$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N} \qquad (5)$$

Η δυσκολία εδώ βέβαια βρίσκεται στο γεγονός ότι ενώ μπορούμε σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε την ποσότητα του υλικού στην παρούσα χρονική στιγμή, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τη συγκέντρωση του υλικού κάποια στιγμή t_0 στο παρελθόν. Όμως, όπως και στην απάτη του Van Meegeren σε πολλές περιπτώσεις αυτό μπορεί να γίνει με έναν έμμεσο τρόπο.

Ξεκινώντας από κάποια δεδομένα της στοιχειώδους χημείας, ξέρουμε πως σχεδόν όλα τα μεταλλεύματα στην επιφάνεια της γης περιέχουν μια μικρή ποσότητα από ουράνιο. Το ουράνιο στα μεταλλεύματα αποσυντίθεται σε έναν άλλο ραδιενεργό στοιχείο και αυτό με τη σειρά του σε άλλο και σε άλλο και αυτό συνεχίζεται όπως φαίνεται στην εικόνα 3 σε μία σειρά από στοιχεία που όλα οδηγούν στο μόλυβδο το οποίο είναι σταθερό. Το ουράνιο, του οποίου ο χρόνος ημίσιας ζωής είναι σχεδόν τεσσερισήμισι δισεκατομμύρια χρόνια συνεχίζει να τροφοδοτεί τα στοιχεία της σειράς, έτσι ώστε αυτά ενώ αποσυντίθεται, συνεχώς αναπληρώνονται από τα στοιχεία που βρίσκονται πριν από αυτά στην αλυσίδα.

Τώρα, όλοι οι πίνακες περιέχουν μία μικρή ποσότητα από το ραδιενεργό στοιχείο μόλυβδος-210 (^{210}Pb) και ακόμα μια πιο μικρή ποσότητα από το στοιχείο ράδιο-210 (^{226}Ra). Ο λόγος είναι ότι και τα δύο αυτά στοιχεία περιέχονται στο οξείδιο του μολύβδου που είναι παρόν στις μπογιές που χρησιμοποιούν οι ζωγράφοι για πάνω από 2000 χρόνια. Επίσης, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι το οξείδιο του μολύβδου που χρησιμοποιείται στις μπογιές, προέρχεται από ένα πέτρωμα με τη διαδικασία της τήξης. Σε αυτή τη διαδικασία, ο ^{210}Pb διατηρείται ενώ πάνω από το 90% του ^{226}Ra καταστρέφεται. Έτσι, αυτό που συμβαίνει αμέσως μετά την κατασκευή του οξειδίου του μολύβδου, είναι ότι τα αποθέματα του ^{210}Pb εξαντλούνται πολύ γρήγορα, αφού δεν υπάρχει ^{226}Ra να τροφοδοτεί την αλυσίδα. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι ο ^{210}Pb και το ^{226}Ra να έρθουν πάλι σε ραδιενεργή ισορροπία.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $y(t)$ είναι η ποσότητα του ^{210}Pb στην παρούσα χρονική στιγμή t ενώ y_0 ήταν η ποσότητα τη στιγμή που φτιάχτηκε η μπογιά τη χρονική στιγμή t_0. Έστω επίσης $r(t)$ η ποσότητα του ^{226}Ra τη χρονική στιγμή t και r_0 η ποσότητα τη χρονική στιγμή t_0. Τότε:

$$r(t) = r_0 e^{-\lambda_{Ra}(t-t_0)} \tag{6}$$

και

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\lambda_{Pb} y(t) + \lambda_{Ra} r(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -\lambda_{Pb} y(t) + -\lambda_{Ra} r_0 e^{-\lambda_{Ra}(t-t_0)} \tag{7}$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι γραμμική 1ου βαθμού της μορφής $y'(t)+p(t)\cdot y(t) = g(t)$, όπου στην περίπτωσή μας $p(t) = \lambda_{pb}$ και $g(t) = r_0 \cdot \exp(-\lambda_{Ra}(t-t_0))$. Σε αυτή την περίπτωση, η λύση δίνεται:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) y(\tau) d\tau \right)$$
$$\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau}$$

Έτσι, η λύση στην περίπτωσή μας είναι:

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda_{Pb}(t-t_0)} + e^{-\lambda_{Pb}(t-t_0)} \frac{\lambda_{Ra} r_0}{\lambda_{Pb} - \lambda_{Ra}} \left(e^{(\lambda_{Pb}-\lambda_{Ra})(t-t_0)} - 1 \right) \tag{8}$$

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το SciLab για να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης για τις διάφορες τιμές των σταθερών αποσύνθεσης που εμπλέκονται. Ο κώδικας σε SciLab για τον υπολογισμό του y είναι:

Listing 1: Two radioactive elements decay

```
function [y,r]=two_rad_decay(y0,r0,l1,l2,t)
r=r0*exp(-l2*t);
y=exp(-l1*t).*(y0+l2*r0/(l1-l2)*(exp((l1-l2)*t)-1));
endfunction
```

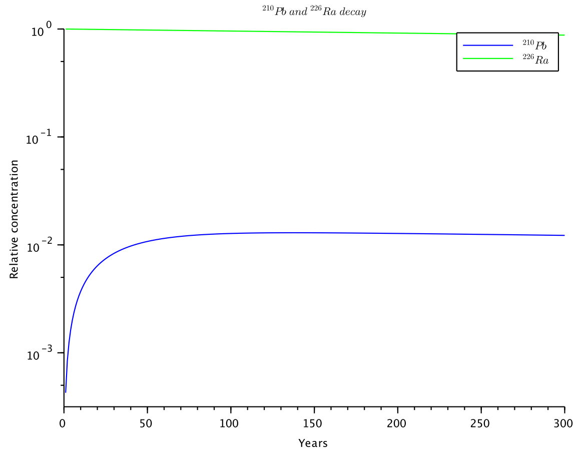
όπου y είναι η συγκέντρωση του ^{210}Pb και r η συγκέντρωση του ^{226}Ra. Μπορούμε τώρα να πάρουμε μια γραφική παράσταση της σχετικής αποσύνθεσης χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εντολές στο SciLab:

Listing 2: Radioactive decay plot

```
[y,r]=two_rad_decay(y0,r0,l1,l2,[1:300]);
plot2d('nl',[1:300],y,2);
plot2d('nl',[1:300],r,3);
legend('$^{210}Pb$','$^{226}Ra$');
xtitle('$^{210}Pb\;and\;^{226}Ra\;decay$','Years','Relative ↩
  concentration');
```

Στο σχήμα 4 φαίνεται η σχετική αποσύνθεση από όπου μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι, λόγω του μεγάλου χρόνου ημιζωής του ^{226}Ra μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σταθερό στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει και έτσι μπορούμε να θέσουμε στην εξίσωση (8) $\lambda_{Ra} = 0$ και έτσι:

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda_{Pb}(t-t_0)} + \frac{\lambda_{Ra} r_0}{\lambda_{Pb}} \left(1 - e^{-\lambda_{Pb}(t-t_0)} \right) \tag{9}$$



Σχήμα 4: **Σχετική αποσύνθεση** - Η σχετική αποσύνθεση του ^{210}Pb και ^{226}Ra

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει μια χρονική περίοδος περίπου 300 ετών. Έτσι, στις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να αντικαταστήσουμε όπου $t - t_0$ με 300. Μπορούμε τώρα να γράψουμε για την αρχική περιεκτικότητα του ^{210}Pb ότι θα είναι:

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r_0 \left(e^{300\lambda} - 1 \right) \tag{10}$$

όπου τώρα συμβολίζουμε με λ το λ_{Pb}. Λάβετε εδώ υπόψη σας ότι το γινόμενο $\lambda y(t)$ είναι το πλήθος των αποσυνθέσεων του ^{210}Pb ανά μονάδα χρόνου και είναι μια ποσότητα που είναι μετρήσιμη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε 100 αποσυνθέσεις το λεπτό ανά γραμμάριο ^{210}Pb (δηλαδή $100dpm/gr$) και το ^{238}U βρίσκεται σε ραδιενεργή ισορροπία με το ^{210}Pb. Αυτό σημαίνει πως αν N είναι η συγκέντρωση του ^{238}U θα έχουμε

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_U N = -100dpm//g$$

και έτσι θα έχουμε $3.42 \cdot 10^{17}$ άτομα ^{238}U ανά γραμμάριο του υλικού. Αν λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι $1mole$ ^{238}U ζυγίζει $238gf$, η περιεκτικότητα σε ^{238}U του υλικού θα είναι 0.014%. Η περιεκτικότητα όμως σε ^{238}U που συναντούμε στη φύση στα διάφορα πετρώματα, κυμαίνεται σε ένα μεγάλο φάσμα από λίγα μέρη στο εκατομμύριο ως 3%. Έτσι, για να είμαστε σίγουροι, θεωρούμε φυσιολογική μια εκπομπή ^{210}Pb να είναι ως $30000 dpm/gr$. Στον πίνακα που ακολουθεί, δίνονται οι μετρήσεις εκπομπής για το ^{210}Pb και για το ^{226}Ra για 6 διαφορετικούς πίνακες ζωγραφικής που έχουν αναλυθεί.

Πίνακας	^{210}Pb	^{226}Ra
Δείπνο στους Εμμαούς	8.5	0.8
Πλύσιμο ποδιών	12.6	0.26
Γυναίκαι διαβάζει μουσική	10.3	0.3
Γυναίκα παίζει μαντολίνο	8.2	0.17
Πλέξιμο δαντέλας	1.5	1.4
Κορίτσι που γελά	5.2	6.0

Πίνακας 1: Αποσυνθέσεις για διάφορα έργα ζωγραφικής σε dpm/gr

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (10), παίρνουμε για το ρυθμό αποσύνθεσης του ^{210}Pb την χρονική περίοδο που κατασκευάστηκε ο πίνακας:

Πίνακας	^{210}Pb
Δείπνο στους Εμμαούς	98050
Πλύσιμο ποδιών	157134
Γυναίκαι διαβάζει μουσική	127337
Γυναίκα παίζει μαντολίνο	102251
Πλέξιμο δαντέλας	1274
Κορίτσι που γελά	< 0

Πίνακας 2: Ρυθμός αποσύνθεσης του ^{210}Pb τη χρονική περίοδο κατασκευής του έργου σε dpm/gr

Από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για τους πρώτους 4 πίνακες, μάλλον πρόκειται για απάτη, ενώ για τους δύο τελευταίους, μάλλον πρόκειται για αυθεντικά έργα.

3 Ασκήσεις

Οι ασκήσεις είναι προαιρετικές. Κάθε άσκηση βαθμολογείται σε κλίμακα από 0 ως 5. Στο τέλος αθροίζονται οι βαθμοί από όλες τις ασκήσεις που έχετε παραδώσει και το αποτέλεσμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με 0.01 και αθροίζεται στο βαθμό που θα γράψετε στις εξετάσεις. Έτσι, αν έχετε παραδώσει 20 ασκήσεις και σε όλες έχετε πάρει 5, το άθροισμα είναι 100. Τότε, έχετε στον τελικό σας βαθμό, συν 100*0.01=1 βαθμό.

Οι ασκήσεις παραδίδονται μόνο με email στο dvlachos@uop.gr. Το email πρέπει να έχει τίτλο *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ* και η απάντηση της άσκησης να είναι σε ένα αρχείο pdf με τίτλο **MATH-3-2017-XXXXXXXXXXXX-YY.pdf** όπου αντί για XXXXXXXXXXXX θα γράψετε τον αριθμό μητρώου σας και αντί για YY τον αριθμό της άσκησης.

01 Στο ακόλουθο πρόβλημα θα περιγράψουμε μια τεχνική για τον υπολογισμό της ηλικίας του ουρανίου. Έστω $N_{238}(t)$ και $N_{235}(t)$ οι ποσότητες των ατόμων του ^{235}U και ^{238}U τη χρονική στιγμή t σε ένα δείγμα ουρανίου. Με βάση το νόμο της ραδιενεργούς αποσύνθεσης (διάσπασης) θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}N_{238}(t) = \frac{-ln2}{4.5\cdot 10^9}N_{238}(t)$$
$$\frac{d}{dt}N_{235}(t) = \frac{-ln2}{0.707\cdot 10^9}N_{235}(t)$$

Αρχικά να λύσετε τις δύο παραπάνω εξισώσεις σαν συνάρτηση των ποσοτήτων $N_{238}(0)$ και $N_{235}(0)$. Αν θεωρήσουμε ότι τη στιγμή της δημιουργίας του ουρανίου στη γη, υπήρχε ίσος αριθμός ατόμων ^{235}U και ^{238}U και ότι το 1946 σε μια μέτρηση βρέθηκε ότι

$$\frac{^{238}U}{^{235}U} = 137.8$$

να δείξετε ότι η ηλικία του ουρανίου είναι $5.96\cdot 10^9$ έτη. Θα πρέπει επίσης να κάνετε με τη χρήση του SciLab μια γραφική παράσταση που θα δείχνει πως μεταβάλλεται ο λόγος $^{238}U/^{235}U$ σαν συνάρτηση του χρόνου. Μπορείτε επίσης να σκεφτείτε τη σχέση αυτού του αποτελέσματος με το γενικά αποδεκτό επιχείρημα για την ηλικία της γης που είναι περίπου $4.6\cdot 10^9$ έτη.

02 Μια από τις πιο ακριβείς τεχνικές για τη χρονολόγηση των αρχαιολογικών ευρημάτων βασίζεται στη μέθοδο του ^{14}C, γνωστή και ως μέθοδο του άνθρακα, η οποία ανακαλύφτηκε το 1949 από τον Willard Libby. Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε ένα πολύ απλό φαινόμενο: Η ατμόσφαιρα της γης βομβαρδίζεται συνέχεια από κοσμική ακτινοβολία. Αυτή η ακτινοβολία, παράγει νετρόνια τα οποία με τη σειρά τους αντιδρούν με το άζωτο και δίνουν ^{14}C. Τώρα, αυτό το ισότοπο του άνθρακα, οξειδώνεται και συμμετέχει στο διοξείδιο του άνθρακα που προσλαμβάνουν τα φυτά στην επιφάνεια της γης. Τα φυτά, με τη σειρά τους, συμμετέχοντας στη διατροφική αλυσίδα, μεταφέρουν αυτό το ισότοπο σε όλους τους ζώντες οργανισμούς. Σε ένα ζωντανό βιολογικό ιστό, η ταχύτητα πρόσληψης τους ^{14}C είναι ίδια με την ταχύτητα αποσύνθεσής του. Όταν ο ιστός πεθαίνει, τότε ο ιστός σταματά να τροφοδοτείται με ^{14}C και η συγκέντρωσή του μειώνεται λόγω της ραδιενεργούς διάσπασης. Βασική αρχή της φυσικής λέει ότι ο βομβαρδισμός της ατμόσφαιρας της γης με κοσμική ακτινοβολία είναι πάντα σταθερός. Έτσι, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η περιεκτικότητα σε ^{14}C ενός δείγματος ξυλάνθρακα θα είναι πάντα η ίδια.

Έστω $N(t)$ η ποσότητα ^{14}C σε ένα δείγμα ξυλάνθρακα και N_0 η ποσότητα τη χρονική περίοδο που δημιουργήθηκε. Τότε:

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\lambda N(t)$$

όπου

$$\lambda = \frac{ln2}{5568\,years} \tag{11}$$

Αν $R(t)$ η ταχύτητα αποσύνθεσης τους ^{14}C την παρούσα χρονική στιγμή t και $R(0)$ η ταχύτητα αποσύνθεσης της χρονική στιγμή 0 που δημιουργήθηκε το δείγμα, να δείξετε ότι:

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R(0)}{R(t)}\right)$$

Στη συνέχεια, θέτοντας $u = R(0)/R(t)$, να κάνετε γραφική παράσταση του $t = t(u)$ με τη χρήση του SciLab. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη σας ότι η ταχύτητα διάσπασης του ^{14}C στο ζωντανό ξύλο είναι 6.68 διασπάσεις ανά λεπτό και ανά γραμμάριο να απαντήσετε στα ακόλουθα ζητήματα:

α. Δείγμα ξυλάνθρακα που βρέθηκε στη σπηλιά Lascaux στη Γαλλία το 1950 μετρήθηκε και βρέθηκε ότι δίνει 0.97 διασπάσεις ^{14}C ανά λεπτό και ανά γραμμάριο. Να εκτιμήσετε την πιθανή ηλικία των εικόνων που βρέθηκαν στη σπηλιά.

β. Το 1952, σε μια ανασκαφή στο Νιπούρ της Βαβυλωνίας, βρέθηκε ξυλάνθρακας σε δοκό οροφής που έδινε 4.09 διασπάσεις ^{14}C ανά λεπτό και ανά γραμμάριο. Αν υποθέσουμε ότι το κτίσμα είχε κατασκευαστεί την εποχή της βασιλείας του Χαμουραμπί, να εκτιμήσετε την περίοδο αυτής της δυναστείας.

4 Περαιτέρω μελέτη

1. Gunten, Hans R. von (1995). "Radioactivity: A Tool to Explore the Past". Radiochimica Acta. 70-71 (s1). ISSN 2193-3405.
2. Magill, Joseph; Galy, Jean (2005). "Archaeology and Dating". Radioactivity Radionuclides Radiation. Springer Berlin Heidelberg.
3. Isotope Geology. ISBN 978-0521862288.
4. Geochemistry: Pathways and Processes (2 ed.). ISBN 0-231-12440-6.
5. Cosmochemistry. ISBN 978-0-521-87862-3.

References

[1] P. Coremans, "Van meegeren's faked vermeers and de hooghs," 1949.

[2] B. Keisch, R. Feller, A. Levine, and P. Edwards, "Dating and authenticating works of art by measurement of natural alpha emmiters," *Science*, vol. 155, pp. 1238–1241, Mar. 1967.

[3] B. Keisch, "Dating works of art through their natural radioactivity: Improvements and applications," *Science*, vol. 160, pp. 413–415, Apr. 196.