ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Σύντομη Επανάληψη στις Διακριτές Πιθανότητες

Θεωρία Πληροφορίας και Κωδίκων

Εαρινό Εξάμηνο

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Νικόλαος Χ. Σαγιάς

Καθηγητής

Webpage: https://eclass.uop.gr/courses/DIT221/

e-mail: nsagias@uop.gr

11/4/2020 1:15:29 μμ

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Μάθημα [πιθ-στα]: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

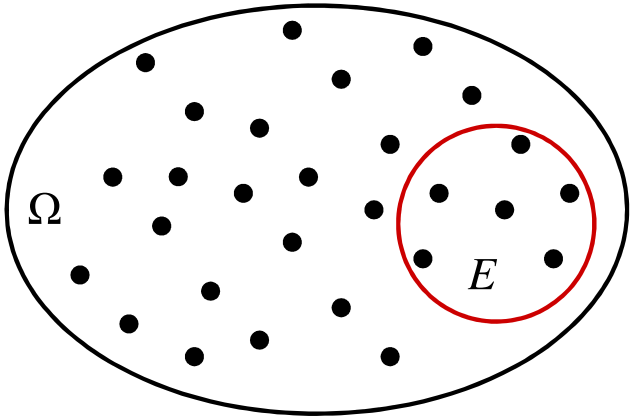
- Εξάμηνο 2 – Εαρινό, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

- Επιλογές Συγγραμμάτων:
  - 33114257: Δ. Μπερτσεκάς και Γ. Τσιτσικλής, Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε., 1η έκδ., 2013
  - 68402975 Μ. Φιλιππάκης, Στατιστικές Μέθοδοι και Ανάλυση Παλινδρόμησης για τις Νέες Τεχνολογίες, ΤΣΟΤΡΑΣ ΑΝ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ, 2η έκδ., 2017
  - 86198781: Μ. Φιλιππάκης, Θεωρία Πιθανοτήτων & Στοιχεία Στατιστικής Ανάλυσης, ΤΣΟΤΡΑΣ ΑΝ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ, 1η έκδ., 2019

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

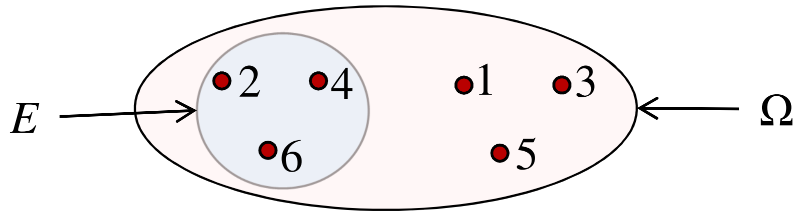
- Το σύνολο των N δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματοχώρος Ω

- Κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου ονομάζεται γεγονός



- Έστω ένα γεγονός $E \subseteq \Omega$, το οποίο αποτελείται από $n \geq 1$ διακριτά σημεία από το σύνολο των $N \geq n$ του δειγματοχώρου

- <u>Παράδειγμα:</u> Κατά τη ρίψη ζαριού, ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το σύνολο των άρτιων αριθμών $E = \{2, 4, 6\}$ αποτελεί ένα γεγονός

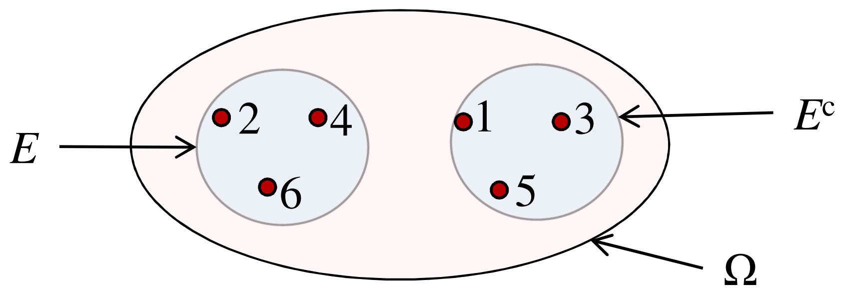


Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Το συμπλήρωμα ενός γεγονότος $E^c \subseteq \Omega$ είναι ένα νέο γεγονός το οποίο περιλαμβάνει όλα τα διακριτά στοιχεία του δειγματοχώρου πλην των σημείων του γεγονότος

- Το πλήθος των διακριτών σημείων του γεγονότος E^c είναι $N - n$

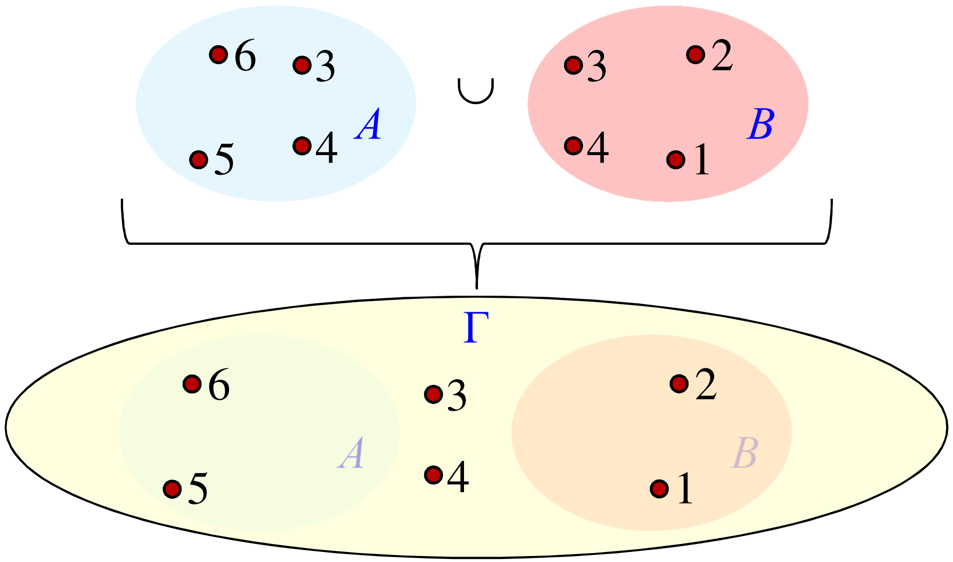
- <u>Παράδειγμα:</u> Κατά τη ρίψη ζαριού, ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Το σύνολο των άρτιων αριθμών $E = \{2, 4, 6\}$ αποτελεί ένα γεγονός
  - Το συμπληρωματικό γεγονός του E είναι το σύνολο των περιττών αριθμών $E^c = \{1, 3, 5\}$



Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Η ένωση δύο γεγονότων A και B συμβολίζεται με $\Gamma = A \cup B$ (διαβάζεται A ή B) και είναι το γεγονός που περιέχει όλα τα σημεία των γεγονότων A και B

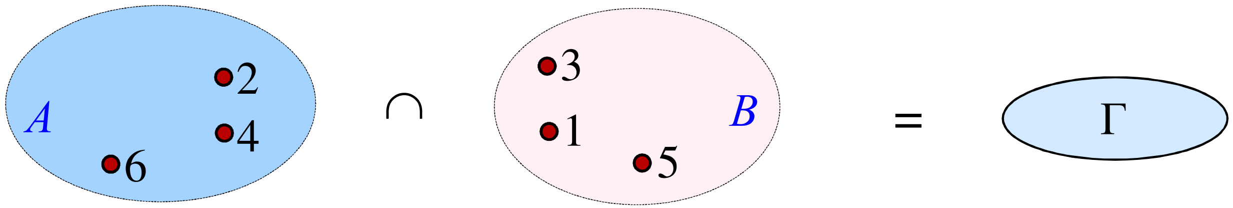
- <u>Παράδειγμα</u>: για $A = \{3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4\}$, η ένωση των γεγονότων A και B θα είναι το $\Gamma = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



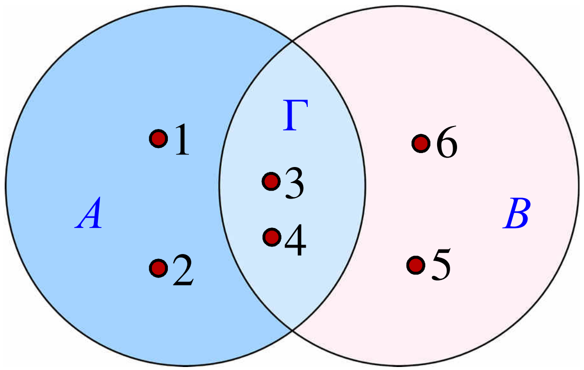
Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Η τομή δύο γεγονότων A και B συμβολίζεται με $\Gamma = A \cap B$ (ή απλούστερα $A\,B$) και είναι το γεγονός που περιέχει όλα τα κοινά σημεία των γεγονότων A και B

- <u>Παράδειγμα</u>: Για $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$, η τομή των γεγονότων A και B θα είναι το $\Gamma = \{\}$



- <u>Παράδειγμα</u>: Για $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$, η τομή των γεγονότων A και B θα είναι το $\Gamma = A \cap B = \{3, 4\}$

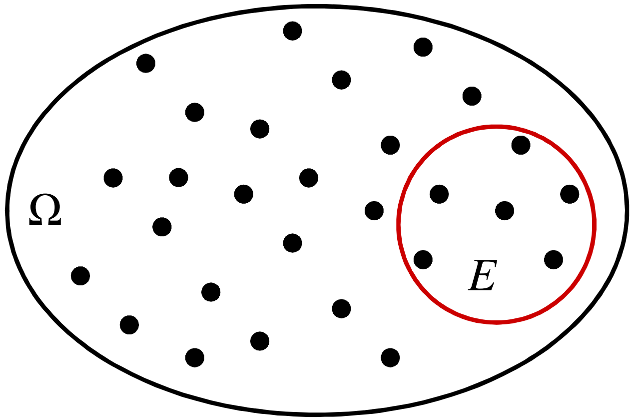


Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Έστω N επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης, όπου το γεγονός $E \subseteq \Omega$ εμφανίζεται n φορές

- Σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος E είναι

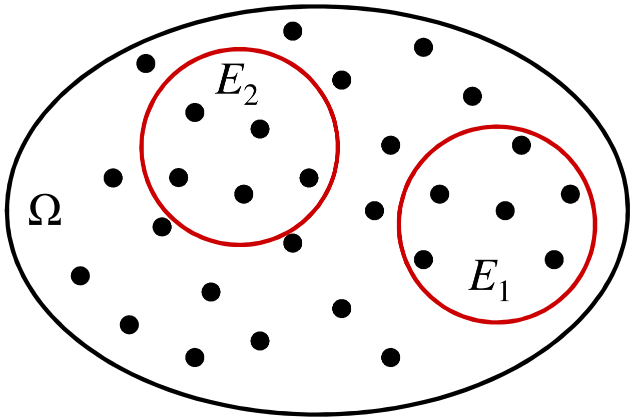
$$\mathbb{P}\{E\} = \lim_{N\to\infty} \frac{n}{N}$$



- Τιμές της πιθανότητας $0 \le \mathbb{P}\{E\} \le 1$
  - Όταν $\mathbb{P}\{E\} = 1$ (ή 100%), το γεγονός θα συμβεί με βεβαιότητα
  - Όταν $\mathbb{P}\{E\} = 0$ (ή 0%), το γεγονός είναι απίθανο να συμβεί

- <u>Παράδειγμα:</u> Κατά τη ρίψη ζαριού, όπου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, η πιθανότητα να προκύψει άρτιος, δηλαδή $E = \{2, 4, 6\}$, είναι $\mathbb{P}\{E\} = 3/6 = 0.5$ (ή 50%)

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων



- Έστω δύο αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα $E_1 \subseteq \Omega$ και $E_2 \subseteq \Omega$

$$E_1 \cap E_2 = \{\}$$

- Πραγματοποιούμε N επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης και προκύπτουν n_1 αποτελέσματα του E_1 και n_2 του E_2

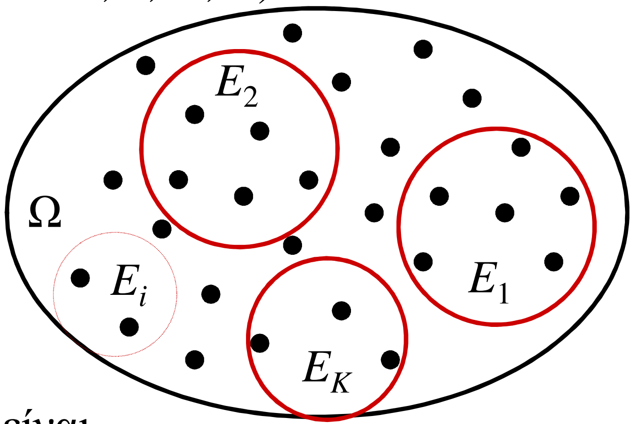
- Η πιθανότητα να συμβεί το από κοινού γεγονός $E_1 \cup E_2$ είναι

$$\mathbb{P}\{E_1 \cup E_2\} = \lim_{N \to \infty} \frac{n_1 + n_2}{N} = \mathbb{P}\{E_1\} + \mathbb{P}\{E_2\}$$

- <u>Παράδειγμα:</u> Κατά τη ρίψη ζαριού, όπου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, έστω τα γεγονότα $E_1 = \{1, 2\}$ και $E_2 = \{5, 6\}$. Η πιθανότητα να προκύψει το από κοινού γεγονός $E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 5, 6\}$ είναι $\mathbb{P}\{E_1 \cup E_2\} = \mathbb{P}\{E_1\} + \mathbb{P}\{E_2\} = 2/6 + 2/6 = 2/3$ (ή 66.66%)

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Γενικεύοντας, έστω K αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα $E_i \subseteq \Omega$ (με $i = 1, 2, \ldots, K$)



- Πραγματοποιούμε N επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης και προκύπτουν n_i αποτελέσματα του E_i (με $i = 1, 2, \ldots, K$)

- Η πιθανότητα να συμβεί το από κοινού γεγονός $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_K$ είναι

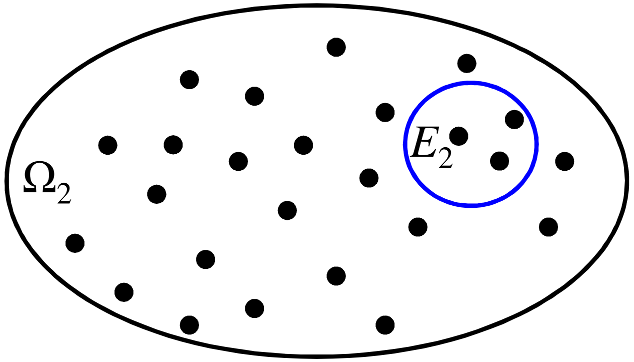
$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{K} E_i\right\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} n_i = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}\{E_i\}$$

- <u>Παράδειγμα:</u> Κατά τη ρίψη ζαριού, όπου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, έστω τα γεγονότα $E_1 = \{1, 2\}$ και $E_2 = \{5, 6\}$, $E_3 = \{3\}$. Η πιθανότητα να προκύψει το από κοινού γεγονός $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ είναι $\mathbb{P}\{E_1 \cup E_2 \cup E_3\} = \mathbb{P}\{E_1\} + \mathbb{P}\{E_2\} + \mathbb{P}\{E_3\} = 2/6 + 2/6 + 1/6 = 5/6$ (ή 83.33%)

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

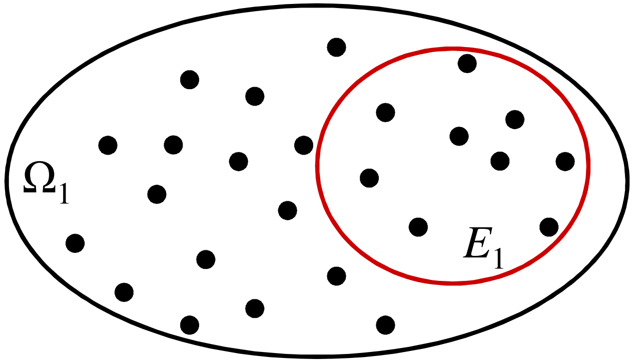
- Μετά από N_1 επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης προκύπτουν n_1 αποτελέσματα του $E_1 \subseteq \Omega_1$

$$\mathbb{P}\{E_1\} = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{n_1}{N_1}$$



- Μετά από N_2 επαναλήψεις ενός δεύτερου πειράματος τύχης προκύπτουν n_2 ανεξάρτητα αποτελέσματα του $E_2 \subseteq \Omega_2$

$$\mathbb{P}\{E_2\} = \lim_{N_2 \to \infty} \frac{n_2}{N_2}$$



- Εφόσον τα δύο πειράματα τύχης είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, η πιθανότητα να συμβεί η τομή των γεγονότων E_1 και E_2 είναι

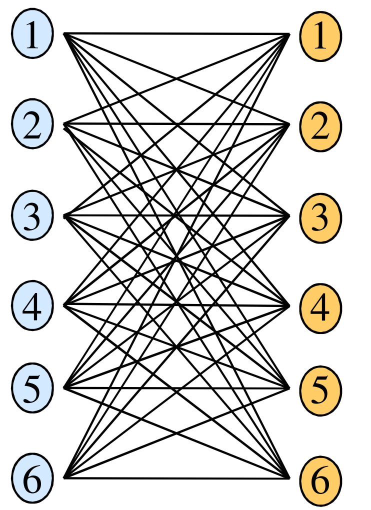
$$\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2\} = \mathbb{P}\{E_2\}\,\mathbb{P}\{E_1\}$$

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- <u>Παράδειγμα</u>: Κατά την ταυτόχρονη ρίψη δύο ζαριών, ποια είναι η πιθανότητα για {4, 4};

- Δειγματοχώρος για το 1ο ζάρι: $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Δειγματοχώρος για το 2ο ζάρι: $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Μπορούμε να ορίσουμε έναν νέο δειγματικό χώρο Ω, ο οποίος θα αποτελείται από τα από κοινού γεγονότα $E_{ij} = \{i, j\}$ (με $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)



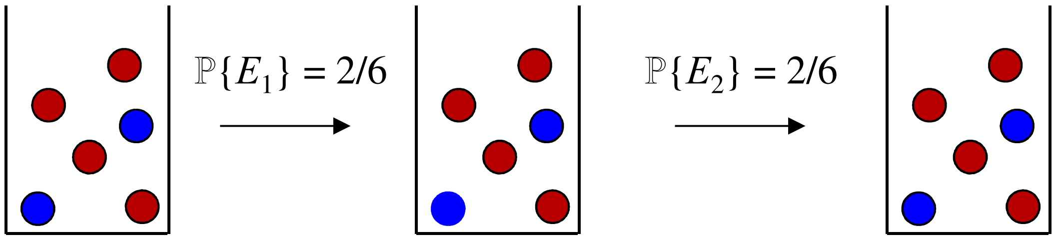
- Στο νέο δειγματικό χώρο Ω, το $E_{4,4} = \{4, 4\}$ θα αποτελεί ένα γεγονός με πιθανότητα να

$$\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2\} = \mathbb{P}\{E_2\}\,\mathbb{P}\{E_1\} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω κουτί με 4 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες. Ποια είναι η πιθανότητα να βγάλουμε 2 μπλε σφαίρες σε δύο διαδοχικές προσπάθειες, με επανατοποθέτηση της πρώτης;

- Έστω τα εξής γεγονότα:
  - E_1 = Εύρεση μπλε σφαίρας στην 1η προσπάθεια
  - E_2 = Εύρεση μπλε σφαίρας στη 2η προσπάθεια



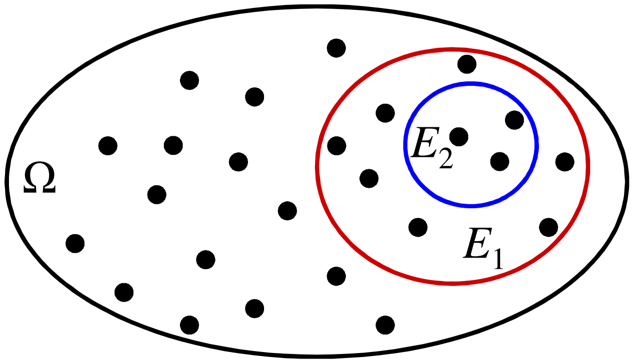
- Η πιθανότητα να βγάλουμε 2 μπλε σφαίρες σε δύο διαδοχικές προσπάθειες υπολογίζεται ως εξής

$$\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2\} = \mathbb{P}\{E_2\}\,\mathbb{P}\{E_1\} = \frac{2}{6}\,\frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Μετά από N επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης προκύπτουν n_1 αποτελέσματα του $E_1 \subseteq \Omega$

- Ανάμεσα στα n_1 αποτελέσματα του E_1 περιλαμβάνονται $n_2 \leq n_1$ αποτελέσματα του $E_2 \subseteq E_1$



- Η πιθανότητα να συμβεί η τομή των γεγονότων E_1 και E_2 είναι

$$\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2\} = \lim_{N\to\infty} \frac{n_2}{N} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{n_1}{N}\right)\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

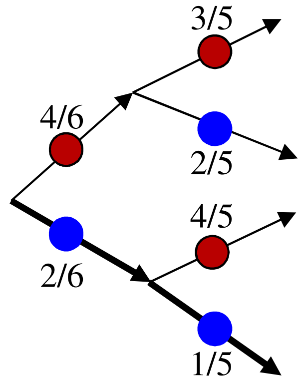
- Ο λόγος n_2/n_1 είναι η πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος E_2, όταν έχει ήδη συμβεί το E_1 και ονομάζεται υπό συνθήκη γεγονός και συμβολίζεται ως $E_2 | E_1$

- Συνεπώς,

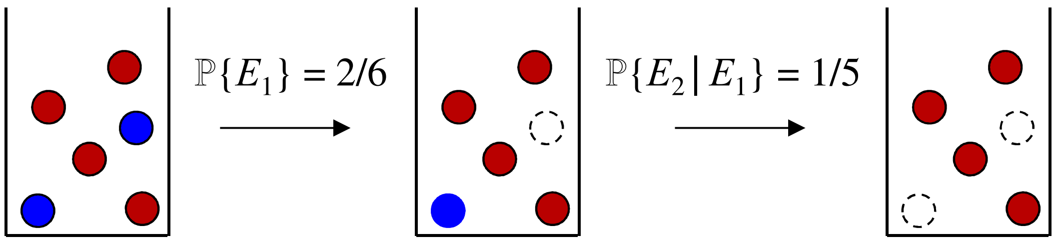
$$\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2\} = \mathbb{P}\{E_2|E_1\}\,\mathbb{P}\{E_1\}$$

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Παράδειγμα: Έστω κουτί με 4 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες. Ποια είναι η πιθανότητα να βγάλουμε 2 μπλε σφαίρες σε δύο διαδοχικές προσπάθειες, χωρίς επανατοποθέτηση της πρώτης;



- Έστω τα εξής γεγονότα:
  - E_1 = Εύρεση μπλε σφαίρας στην 1η προσπάθεια
  - E_2 = Εύρεση μπλε σφαίρας στη 2η προσπάθεια



- Η πιθανότητα να βγάλουμε 2 μπλε σφαίρες σε δύο διαδοχικές προσπάθειες υπολογίζεται ως εξής

$$\mathbb{P}\{E_1 \cap E_2\} = \mathbb{P}\{E_2|E_1\}\,\mathbb{P}\{E_1\} = \frac{1}{5}\,\frac{2}{6} = \frac{1}{15}$$

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Γενικεύοντας την υπό συνθήκη πιθανότητα μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα Bayes

- Έστω ότι η ένωση των ασυμβίβαστων γεγονότων $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ είναι ο δειγματοχώρος $\Omega_E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ (μόνο 1 από τα n γεγονότα θα πραγματοποιηθεί)

- Εάν το W_j είναι ένα οποιοδήποτε συσχετισμένο με το E_i γεγονός (με $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, m$), με $\Omega_W = W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m$, τότε ισχύει το εξής

$$\mathbb{P}\left(E_i | W_j\right) = \frac{\mathbb{P}(W_j | E_i)\, \mathbb{P}(E_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(W_j | E_k)\, \mathbb{P}(E_k)}$$

Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Το θεώρημα Bayes βασίζεται στην αντιμεταθετική ιδιότητα

$$E_i \cap W_j = W_j \cap E_i$$

- Βάσει της παραπάνω ιδιότητας

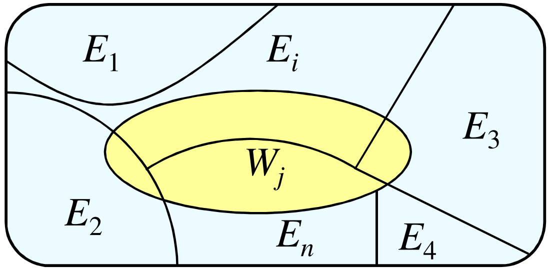
$$\mathbb{P}\{E_i \cap W_j\} = \mathbb{P}\{W_j \cap E_i\} \Leftrightarrow \mathbb{P}\{E_i|W_j\}\,\mathbb{P}\{W_j\} = \mathbb{P}\{W_j|E_i\}\,\mathbb{P}\{E_i\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\{E_i|W_j\} = \frac{\mathbb{P}\{W_j|E_i\}\,\mathbb{P}\{E_i\}}{\mathbb{P}\{W_j\}} \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(E_i|W_j\right) = \frac{\mathbb{P}(W_j|E_i)\,\mathbb{P}(E_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(W_j|E_k)\,\mathbb{P}(E_k)}$$

- Παραπάνω έχει γίνει χρήση του νόμου της ολικής πιθανότητας, με τα γεγονότα E_i να είναι μεταξύ τους αμοιβαία αποκλυόμενα $E_i \cap E_j = \{\,\}$

$$\mathbb{P}\{W_j\} = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(W_j, E_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(W_j|E_i)\,\mathbb{P}(E_i)$$

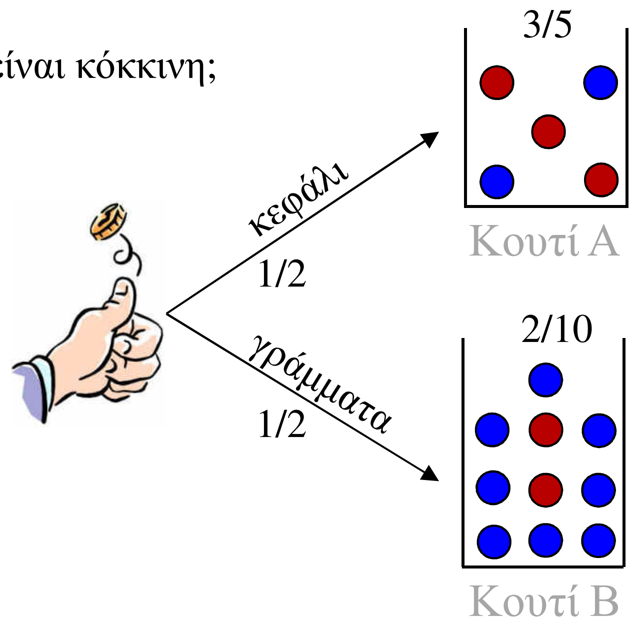
$\Omega_E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$



Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Παράδειγμα: Έστω τα κουτιά Α και Β τα οποία περιέχουν 3 κόκκινες & 2 μπλε και 2 κόκκινες & 8 μπλε σφαίρες, αντίστοιχα

- Ρίχνουμε ένα νόμισμα και αν έρθει κεφάλι, τότε βγάζουμε 1 σφαίρα από το κουτί Α, αλλιώς αν έρθει γράμματα, τότε βγάζουμε 1 σφαίρα από το κουτί Β
  - Ποια η πιθανότητα να βγει κόκκινη σφαίρα;
  - Ποια είναι η πιθανότητα για κεφάλι δεδομένου ότι η σφαίρα είναι κόκκινη;



Εισαγωγικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

- Γεγονότα: E_1: κεφάλι (κουτί A), W_1: κόκκινη σφαίρα

  E_2: γράμματα (κουτί B), W_2: μπλε σφαίρα

- Σύμφωνα με το νόμο της ολικής πιθανότητας, η πιθανότητα να βγει κόκκινη σφαίρα είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων να βγει από το κουτί A ή από το B

$$\mathbb{P}\{W_1\} = \mathbb{P}\{W_1 \cap E_1\} + \mathbb{P}\{W_1 \cap E_2\} =$$

$$= \mathbb{P}\{W_1|E_1\}\,\mathbb{P}\{E_1\} + \mathbb{P}\{W_1|E_2\}\,\mathbb{P}\{E_2\} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{2} = 0.4$$

- Σύμφωνα με το εκτεταμένη μορφή του θεωρήματος του Bayes, η πιθανότητα να πάρουμε τη σφαίρα από το κουτί A, δεδομένου ότι η σφαίρα είναι κόκκινη, είναι

$$\mathbb{P}\left(E_1|W_1\right) = \frac{\mathbb{P}(W_1|E_1)\,\mathbb{P}(E_1)}{\sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(W_1|E_i)\,\mathbb{P}(E_i)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Έστω ο δειγματοχώρος Ω αποτελούμενος από τα διακριτά γεγονότα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

- Κάθε γεγονός x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) χαρακτηρίζεται από πιθανότητα εμφάνισης

$$\mathbb{P}\{X = x_i\}$$

  με X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή (ΤΜ) με πεδίο τιμών το $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

- Η $p(x_i) = \mathbb{P}\{X = x_i\}$ ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας μάζας (ΣΠΜ) της ΤΜ X

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

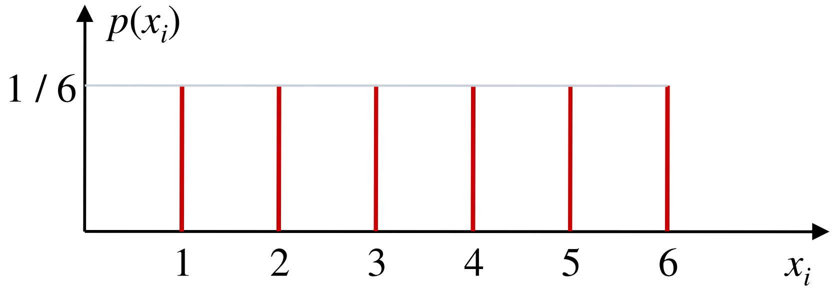
- Η ΣΠΜ πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:
  - $p(x_i) \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$
  - $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

- Για κάθε $a \in \Re$, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ορίζεται

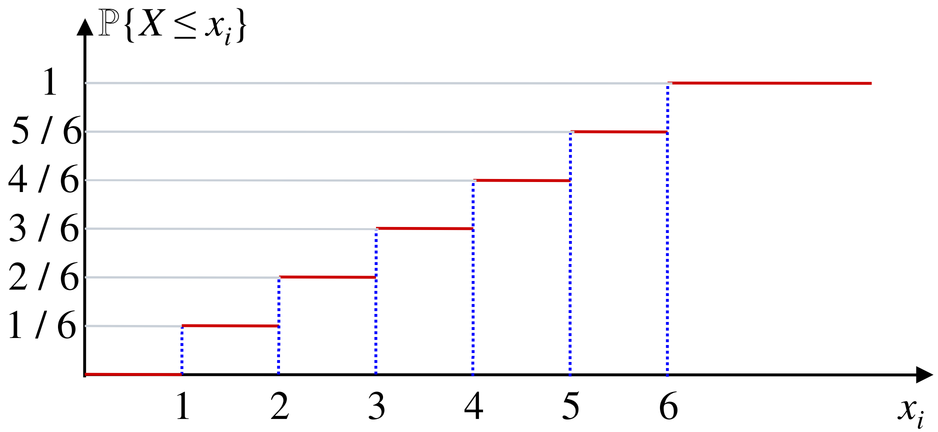
$$\mathbb{P}\{X \leq a\} = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Παράδειγμα: Έστω η ρίψη ενός ζαριού. Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ με ίσες πιθανότητες, δηλαδή $p(x_i) = 1/6$ (με $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
- Η ΣΠΜ της X έχει το παρακάτω ραβδόγραμμα



- Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι ως εξής



Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Η μέση τιμή της ΤΜ *X* ορίζεται ως

$$\mu = \mathbb{E}\langle X \rangle = \sum_{x_i \in \Omega} x_i \, p(x_i)$$

- Η μέση τιμή των τετραγώνων της ΤΜ *X* ορίζεται ως

$$\mathbb{E}\langle X^2 \rangle = \sum_{x_i \in \Omega} x_i^2 \, p(x_i)$$

- Η διακύμανση της μεταβλητής *X* ορίζεται ως

$$\sigma^2 = \sum_{x_i \in \Omega} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i) = \mathbb{E}\langle X^2 \rangle - \mu^2$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Γενικεύοντας, η μέση τιμή της ποσότητας $g(X)$ ορίζεται ως

$$\mathbb{E}\langle g(X)\rangle = \sum_{x_i\in\Omega} g(x_i)\,p(x_i)$$

  - Όταν $g(x_i) = x_i$, προκύπτει η μέση τιμή της ΤΜ X ως

$$\mu = \mathbb{E}\langle X\rangle = \sum_{x_i\in\Omega} x_i\,p(x_i)$$

  - Όταν $g(x_i) = x_i^2$, προκύπτει η μέση τιμή της ΤΜ X^2 ως

$$\mathbb{E}\langle X^2\rangle = \sum_{x_i\in\Omega} x_i^2\,p(x_i)$$

  - Όταν $g(x_i) = \log_2[1 / p(x_i)]$, προκύπτει η εντροπία της ΤΜ X ως

$$H(X) = \mathbb{E}\left\langle \log_2\left[\frac{1}{p(X)}\right]\right\rangle = \sum_{x_i\in\Omega} p(x_i)\,\log_2\left[\frac{1}{p(x_i)}\right] = -\sum_{x_i\in\Omega} p(x_i)\log_2\left[p(x_i)\right]$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Παράδειγμα: Κατά την ρίψη ζαριού, αν προκύψει περιττός $E_1 = \{1, 3, 5\}$, κερδίζουμε μια ίση ποσότητα σε ευρώ, ενώ αν προκύψει άρτιος $E_2 = \{2, 4, 6\}$, χάνουμε μια ίση ποσότητα σε ευρώ

- Ο δειγματοχώρος είναι ο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και η ΤΜ X τα χρήματα σε ευρώ

- Η μέση τιμή της ΤΜ X είναι

$$\mu = \sum_{x_i \in \Omega} x_i\, p(x_i) = 1 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} - 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} - 6 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

- Η μέση τιμή της ΤΜ του X^2 είναι

$$\mathbb{E}\langle X^2 \rangle = \sum_{x_i \in \Omega} x_i^2\, p(x_i) = 1^2 \times \frac{1}{6} + (-2)^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + (-4)^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + (-6)^2 \times \frac{1}{6} = 15.167$$

- Η διακύμανση της ΤΜ X είναι

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\langle X^2 \rangle - \mu^2 = 15.167 - (-0.5)^2 = 14.915$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Έστω ο δειγματοχώρος Ω_X αποτελούμενος από τα διακριτά γεγονότα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με πιθανότητες εμφάνισης $\mathbb{P}\{X = x_i\} = p(x_i) = p_i$ με $p(x_i)$ τη ΣΠΜ της διακριτής ΤΜ X
- Έστω ο δειγματοχώρος Ω_Y αποτελούμενος από τα διακριτά γεγονότα $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ με πιθανότητες εμφάνισης $\mathbb{P}\{Y = y_j\} = p(y_j) = q_j$ με $p(y_j)$ ΣΠΜ της διακριτής ΤΜ Y
- Συχνά απαιτείται η γνώση του από κοινού γεγονότος

$$\mathbb{P}\{X = x_i, Y = y_j\} = p(x_i, y_j) = w_{i,j}$$

με δισδιάστατο δειγματοχώρο $\Omega_{X,Y}$ και $p(x_i, y_j)$ την από κοινού ΣΠΜ των X και Y και

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$$

- Οι $p(x_i) = p_i$ και $p(y_j) = q_j$ ονομάζονται περιθώριες ΣΠΜ με

$$\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = p(x_i) \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j)$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

$$\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = p(x_i)$$

	y_1	y_2	–	y_m	
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	–	$p(x_1, y_m)$	$p(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	–	$p(x_2, y_m)$	$p(x_2)$
|	|	|		|	|
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	–	$p(x_n, y_m)$	$p(x_n)$
	$p(y_1)$	$p(y_2)$		$p(y_m)$	1

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(y_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Παράδειγμα: Έστω η από κοινού ΣΠΜ του ζεύγους ΤΜ X και Y

$$p(x_i, y_j) = \begin{cases} c\,(2\,x_i + y_j), & x_i = 0,1,2 \text{ και } y_j = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Να βρεθούν:
  - Η σταθερά c
  - Να υπολογιστεί η πιθανότητα εμφάνισης του ζεύγους γεγονότων $\{X \geq 1,\ Y \leq 2\}$
- Η σταθερά c μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με βάση των πιθανοτήτων εμφάνισης κάθε ζεύγους γεγονότων από τον παρακάτω πίνακα

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	
$x_1 = 0$	0	c	$2\,c$	$3\,c$	$6\,c$
$x_2 = 1$	$2\,c$	$3\,c$	$4\,c$	$5\,c$	$14\,c$
$x_3 = 2$	$4\,c$	$5\,c$	$6\,c$	$7\,c$	$22\,c$
	$6\,c$	$9\,c$	$12\,c$	$15\,c$	$42\,c = 1$

Δεδομένου ότι $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} p(x_i, y_j) = 1$ προκύπτει ότι $c = 1 / 42$

- Η πιθανότητα $\mathbb{P}\{X \geq 1,\ Y \leq 2\}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων της γραμμοσκιασμένης περιοχής του παραπάνω πίνακα, δηλαδή $\mathbb{P}\{\, X \geq 1,\ Y \leq 2 \,\} = 24\,c = 4 / 7$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Πολύ χρήσιμη είναι η γνώση της πιθανότητας για την ΤΜ X να πάρει την τιμή x_i υπό τη συνθήκη ότι η ΤΜ Y έχει την τιμή y_j

$$\mathbb{P}\{\ X = x_i \,|\, Y = y_j\ \} = p(x_i|y_j)$$

με $p(x_i\,|\,y_j)$ την υπό συνθήκη ΣΠΜ των X και Y και

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j) = 1 \qquad \text{και} \qquad \sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i) = 1$$

- Η υπό συνθήκη πιθανότητα σχετίζεται με την από κοινού ΣΠΜ όπως παρακάτω

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \qquad \text{και} \qquad p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$

με τις $p(x_i)$ και $p(y_j)$ να ονομάζονται περιθώριες ΣΠΜ

- Αν οι X και Y είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, τότε ισχύει ότι

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j)$$

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Για την προηγούμενη από κοινού ΣΠΜ, να βρεθούν οι υπό συνθήκη πιθανότητες $\mathbb{P}\{X=1 \mid Y=1\}$ και $\mathbb{P}\{Y \leq 2 \mid X=1\}$

- Η πιθανότητα $\mathbb{P}\{X=1 \mid Y=1\}$ μπορεί να βρεθεί με βάση την από κοινού ΣΠΜ ως εξής

$$\Pr\{X=1|Y=1\} = p(x_2=1|y_2=1) = \frac{p(x_2=1, y_2=1)}{p(y_2=1)} = \frac{1/14}{3/14} = \frac{1}{3}$$

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	
$x_1 = 0$	0	1 / 42	1 / 21	1 / 14	1 / 7
$x_2 = 1$	1 / 21	1 / 14	2 / 21	5 / 42	1 / 3
$x_3 = 2$	2 / 21	5 / 42	1 / 7	1 / 6	11 / 21
	1 / 7	3 / 14	2 / 7	5 / 14	1

Εισαγωγικά στις Τυχαίες Μεταβλητές

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Η πιθανότητα $\mathbb{P}\{Y \leq 2 \mid X = 1\}$ μπορεί να βρεθεί με βάση την από κοινού ΣΠΜ ως εξής

$$\Pr\{Y \leq 2|X = 1\} = \Pr\{Y = 0|X = 1\} + \Pr\{Y = 1|X = 1\} + \Pr\{Y = 2|X = 1\} =$$

$$= \frac{\Pr\{Y = 0, X = 1\}}{\Pr\{X = 1\}} + \frac{\Pr\{Y = 1, X = 1\}}{\Pr\{X = 1\}} + \frac{\Pr\{Y = 2, X = 1\}}{\Pr\{X = 1\}} = \frac{1/21}{1/3} + \frac{1/14}{1/3} + \frac{2/21}{1/3} = \frac{9}{14}$$

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	
$x_1 = 0$	0	1 / 42	1 / 21	1 / 14	1 / 7
$x_2 = 1$	1 / 21	1 / 14	2 / 21	5 / 42	1 / 3
$x_3 = 2$	2 / 21	5 / 42	1 / 7	1 / 6	11 / 21
	1 / 7	3 / 14	2 / 7	5 / 14	1