ΠΑΝΕΠΙΣΤΉΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΉΣΟΥ

Διακριτές Πηγές με Μνήμη

Θεωρία Πληροφορίας και Κωδίκων

Εαρινό Εξάμηνο

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Νικόλαος Χ. Σαγιάς
Καθηγητής
Webpage: https://eclass.uop.gr/courses/DIT221/
e-mail: nsagias@uop.gr

13/4/2020 10:58:43 πμ

Πηγές Markov

- Η εντροπία μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης $H(\mathscr{L}) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2(P_i)$, όταν η διακριτή πηγή παράγει στατιστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους σύμβολα

- Ωστόσο, οι πραγματικές πηγές παράγουν στατιστικά εξαρτημένες ακολουθίες συμβόλων

- Για παράδειγμα, στην Ελληνική γλώσσα υπάρχει πολύ μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης ενός φωνήεντος μετά από σύμφωνο και ακόμα μεγαλύτερη μετά από δίψηφα σύμφωνα

Η γλώσσα κόκαλα δεν έχει και κόκαλα τσακίζει

- Η εντροπία πηγής που παράγει στατιστικά εξαρτημένες ακολουθίες συμβόλων θα είναι μικρότερη από μία πηγή που παράγει τα ίδια σύμβολα, αλλά τα οποία θα είναι στατιστικά ανεξάρτητα

Πηγές Markov

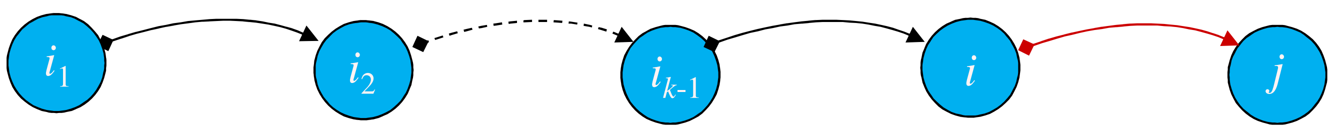
- Η εξάρτηση των συμβόλων που παράγονται αφορά σε παραπάνω από ένα προηγούμενα σύμβολα

- Θα περιοριστούμε σε διακριτές πηγές που δεδομένης της παρούσας κατάστασης, η επόμενη κατάσταση δεν εξαρτάται από το παρελθόν

- Τέτοιες διακριτές πηγές με μνήμη μπορούν να περιγράφουν από αλυσίδες Markov

- Μία διακριτή στοχαστική αλυσίδα ονομάζεται Markov όταν για κάθε k =1, 2,… ισχύει

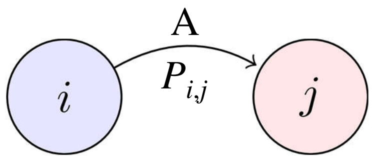
$$\mathbb{P}\{X_{k+1} = j \mid X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, X_1 = i_1\} = \mathbb{P}\{X_{k+1} = j \mid X_k = i\}$$



- Δηλαδή, η μνήμη της τυχαίας διαδικασίας περιορίζεται στην αμέσως προηγούμενη στιγμή

Πηγές Markov

- Συμβολίζουμε την μετάβαση από την κατάσταση i στην κατάσταση j ως $i \rightarrow j$



- Η αλυσίδα λέγεται ομογενής, όταν οι πιθανότητες μετάβασης $i \rightarrow j$ δεν αλλάζουν με το χρόνο k

$$\mathbb{P}\{X_{k+1} = j \mid X_k = i\} = \mathbb{P}\{X_2 = j \mid X_1 = i\}$$

- Η πιθανότητα μετάβασης $i \rightarrow j$ γράφεται εν συντομία

$$P_{i,j} = \mathbb{P}\{X_2 = j \mid X_1 = i\}$$

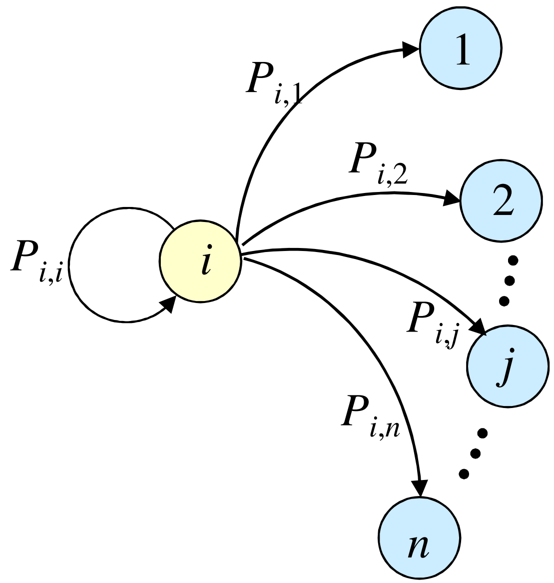
- Σε κάθε μετάβαση η αλυσίδα Markov ως πηγή συμβόλων με μνήμη παράγει 1 σύμβολο κάθε T_s, πχ κατά την μετάβαση $i \xrightarrow{\mathrm{A}} j$ παράγει το γράμμα «Α», με $1/T_s$ τον ρυθμό μετάδοσης συμβόλων

Πηγές Markov

- Έστω αλυσίδα Markov *n* καταστάσεων

- Για την περιγραφή όλων των πιθανοτήτων μετάβασης χρησιμοποιείται ο πίνακας μετάβασης καταστάσεων (*state transition matrix*) και αναπαρίσταται με το διάγραμμα καταστάσεων

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & P_{n,n} \end{pmatrix}$$



- Το άθροισμα όλων των *n* στοιχείων κάθε γραμμής *i* (με $i = 1, 2, \ldots, n$) του πίνακα μεταβάσεων ισούται με μονάδα

$$\sum_{j=1}^{n} P_{i,j} = 1$$

Πηγές Markov

- Όταν σε έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων η πηγή μπορεί να μεταβεί από μία κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη, η αλυσίδα Markov ονομάζεται αμείωτη (*irreducible*)

- Αν $i \rightarrow j$ και $j \rightarrow i$ (δηλαδή $i \leftrightarrow j$) σε συγκεκριμένο αριθμό βημάτων για όλες τις καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov, τότε η αλυσίδα είναι αμείωτη

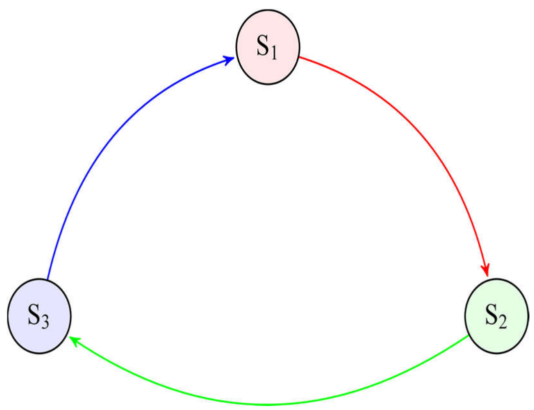
- Δηλαδή, μια αμείωτη αλυσίδα Markov n καταστάσεων δεν εγκλωβίζεται ποτέ σε ένα υποσύνολο των καταστάσεων αυτών

Πηγές Markov

- Μία κατάσταση μιας αλυσίδας Markov ονομάζεται περιοδική (*periodic*) με περίοδο k, όταν η αλυσίδα επιστρέφει στην κατάσταση αυτή μετά από k μεταβάσεις

- Μία αλυσίδα Markov λέγεται περιοδική όταν υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός k, τέτοιος ώστε

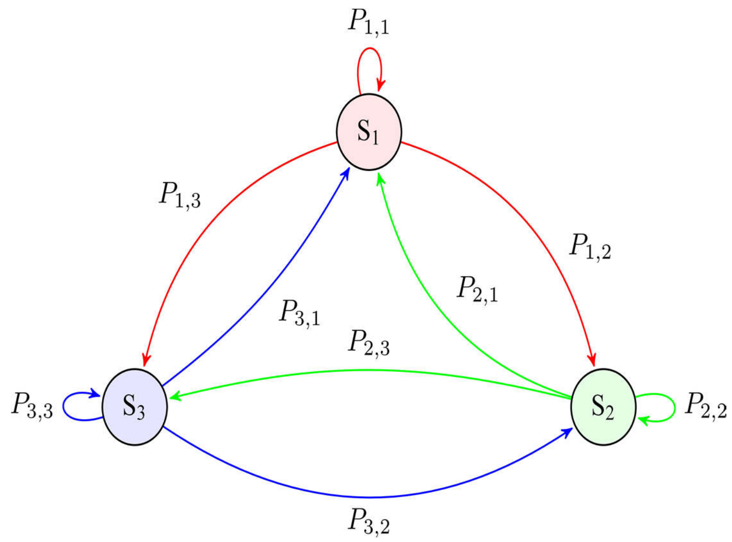
$$\mathbf{P}^k = \mathbf{P}$$



- Παράδειγμα: Η αλυσίδα Markov με πίνακα $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι περιοδική, αφού ότι $\mathbf{P}^3 = \mathbf{I}_3$ και άρα $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}\,\mathbf{I}_3 = \mathbf{P}$

- Αρκεί μία απεριοδική κατάσταση ώστε η αλυσίδα Markov να είναι απεριοδική

Πηγές Markov



- Στη συνέχεια, οι αλυσίδες Markov θεωρούνται:
  - Απεριοδικές
  - Αμείωτες
  - Ομογενείς

- Μία αλυσίδα Markov με τις τρεις παραπάνω ιδιότητες χαρακτηρίζεται ως εργοδική (*ergodic*)

- Στην συνέχεια, όλες οι αλυσίδες Markov θα θεωρούνται εργοδικές

Πηγές Markov

- Για μια εργοδική αλυσίδα Markov με π_i συμβολίζουμε την πιθανότητα εύρεσης στην κατάσταση i (με $i = 1, 2, \ldots, n$), δηλαδή

$$\mathbb{P}\{X_1 = i\} = \pi_i$$

- Εφόσον η αλυσίδα Markov είναι εργοδική, η πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση i είναι σταθερή με την πάροδο του χρόνου

- Η π_i ονομάζεται πιθανότητα στάσιμης κατάστασης (*steady-state probability*) και για ενιαία αναπαράσταση των n καταστάσεων χρησιμοποιείται ο πίνακας γραμμή

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

- Δεδομένου ότι η αλυσίδα βρίσκεται πάντα σε μία από τις n καταστάσεις ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

Πηγές Markov

- Οι πιθανότητες στάσιμης κατάστασης **π** σχηματίζουν με τον πίνακα μετάβασης καταστάσεων **P** ένα σύστημα *n* εξισώσεων με *n* αγνώστους π_i, το οποίο με πίνακες γράφεται

$$\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

- Αναλυτικότερα οι *n* εξισώσεις γράφονται

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi}}\underbrace{\begin{pmatrix}P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,n}\\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & P_{n,n}\end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi}}$$

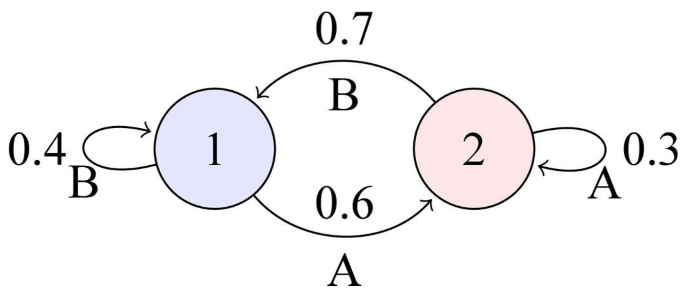
- Ωστόσο, η μία από τις παραπάνω *n* εξισώσεις είναι γραμμικώς εξαρτημένη από τις $n-1$ εξισώσεις

- Η επιπλέον εξίσωση που συμπληρώνει το σύστημα των *n* εξισώσεων είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω εργοδική πηγή Markov δύο καταστάσεων που παράγει τα γράμματα A και B βάσει του πίνακα μεταβάσεων $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$



- Κατά την επίλυση του συστήματος **π P = π**, προκύπτει

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0.4\,\pi_1 + 0.7\,\pi_2 = \pi_1 \\ 0.6\,\pi_1 + 0.3\,\pi_2 = \pi_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \pi_2 = \frac{6}{7}\pi_1$$

- Κάνοντας επιπλέον χρήση της εξίσωσης $\pi_1 + \pi_2 = 1$, το σύστημα επιλύεται ως

$$\pi_1 = 7/13 \qquad \text{και} \qquad \pi_2 = 6/13$$

- Δηλαδή στο 54% του χρόνου θα βρίσκεται στην κατάσταση 1 και στο 46% στην 2

Πηγές Markov

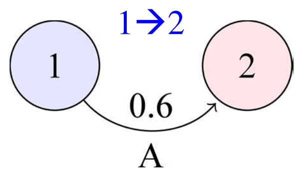
- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Θα υπολογίσουμε πιθανότητες εμφάνισης συμβόλων

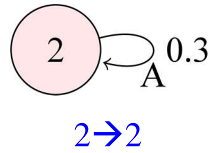
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί A

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 2\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2, S_2 = 2\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 2 \,|\, S_1 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 2 \,|\, S_1 = 2\} =$$

$$= \pi_1\, P_{1,2} + \pi_2\, P_{2,2} = 7/13 \times 0.6 + 6/13 \times 0.3 \approx 0.46$$



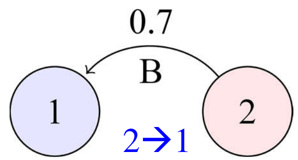


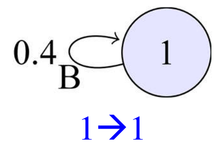
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί B

$$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 1\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2, S_2 = 1\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 1 \,|\, S_1 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 1 \,|\, S_1 = 2\} =$$

$$= \pi_1\, P_{1,1} + \pi_2\, P_{2,1} = 7/13 \times 0.4 + 6/13 \times 0.7 \approx 0.54$$



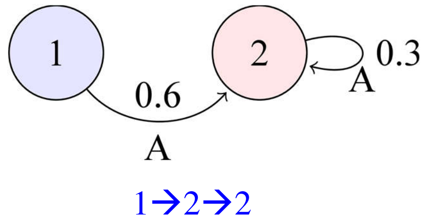


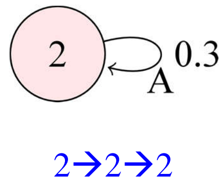
- Παρατηρούμε συνολικά ότι $\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} = 1$

- Το $\mathbb{P}\{A\}$ και $\mathbb{P}\{B\}$ είναι ουσιαστικά τα π_2 και π_1, αντίστοιχα

Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΑΑ





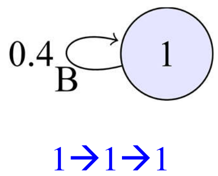
$$\mathbb{P}\{\mathrm{AA}\} = \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 1, \mathrm{S}_2 = 2, \mathrm{S}_3 = 2 \text{ ή } \mathrm{S}_1 = 2, \mathrm{S}_2 = 2, \mathrm{S}_3 = 2\} =$$

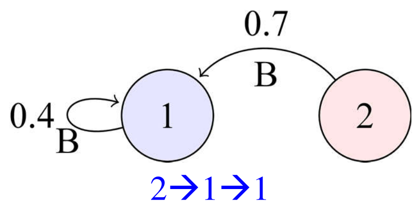
$$= \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 1, \mathrm{S}_2 = 2, \mathrm{S}_3 = 2\} + \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 2, \mathrm{S}_2 = 2, \mathrm{S}_3 = 2\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_2 = 2 \mid \mathrm{S}_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_3 = 2 \mid \mathrm{S}_2 = 2\} + \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_2 = 2 \mid \mathrm{S}_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_3 = 2 \mid \mathrm{S}_1 = 2\} =$$

$$= \pi_1\, P_{1,2}\, P_{2,2} + \pi_2\, P_{2,2}\, P_{2,2} = 7/13 \times 0.6 \times 0.3 + 6/13 \times 0.3 \times 0.3 \approx 0.14$$

- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΒΒ





$$\mathbb{P}\{\mathrm{BB}\} = \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 1, \mathrm{S}_2 = 1, \mathrm{S}_3 = 1 \text{ ή } \mathrm{S}_1 = 2, \mathrm{S}_2 = 1, \mathrm{S}_3 = 1\} =$$

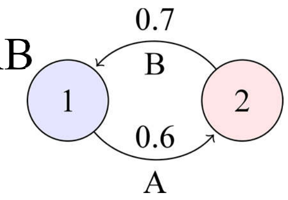
$$= \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 1, \mathrm{S}_2 = 1, \mathrm{S}_3 = 1\} + \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 2, \mathrm{S}_2 = 1, \mathrm{S}_3 = 1\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_2 = 1 \mid \mathrm{S}_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_3 = 1 \mid \mathrm{S}_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\mathrm{S}_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_2 = 1 \mid \mathrm{S}_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{\mathrm{S}_3 = 1 \mid \mathrm{S}_2 = 1\} =$$

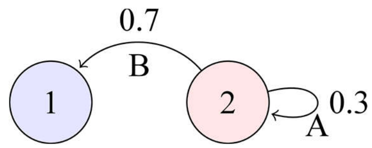
$$= \pi_1\, P_{1,1}\, P_{1,1} + \pi_2\, P_{2,1}\, P_{1,1} = 7/13 \times 0.4 \times 0.4 + 6/13 \times 0.7 \times 0.4 \approx 0.22$$

Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί AB



1→2→1



2→2→1

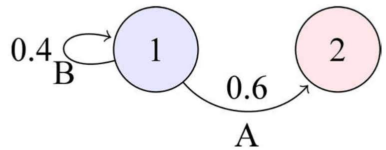
$\mathbb{P}\{\mathrm{AB}\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 1 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 2, S_3 = 1\} =$

$= \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2, S_2 = 2, S_3 = 1\} =$

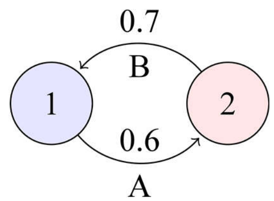
$= \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_1 = 1\} + \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_1 = 2\} =$

$= P_{2,1}\, P_{1,2}\, \pi_1 + P_{2,1}\, P_{2,2}\, \pi_2 = 0.7 \times 0.6 \times 7/13 + 0.7 \times 0.3 \times 6/13 \approx 0.32$

- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί BA



1→1→2



2→1→2

$\mathbb{P}\{\mathrm{BA}\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 2 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 1, S_3 = 2\} =$

$= \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 2\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2, S_2 = 1, S_3 = 2\} =$

$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 1\} =$

$= \pi_1\, P_{1,1}\, P_{1,2} + \pi_2\, P_{2,1}\, P_{1,2} = 7/13 \times 0.4 \times 0.6 + 6/13 \times 0.7 \times 0.6 \approx 0.32$

- Παρατηρούμε συνολικά ότι $\mathbb{P}\{\mathrm{AA}\} + \mathbb{P}\{\mathrm{BB}\} + \mathbb{P}\{\mathrm{AB}\} + \mathbb{P}\{\mathrm{BA}\} = 1$

Πηγές Markov

- Η επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων μπορεί ευκολότερα να γίνει με την μέθοδο απαλοιφής των Gauss-Jordan (Gauss-Jordan *elimination*)

- Στην μέθοδο απαλοιφής των Gauss-Jordan επιτρέπονται:
  - Εναλλαγή των θέσεων μεταξύ δύο γραμμών
  - Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με ένα μη μηδενικό αριθμό
  - Πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής σε μιαν άλλη γραμμή

- Στόχος της μεθόδου είναι η μετατροπή του πίνακα σε έναν τριγωνικό άνω

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Πηγές Markov

- Για την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής ακολουθούμε πρώτα τα παρακάτω βήματα

$$\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I})]^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \Leftrightarrow (\mathbf{P}-\mathbf{I})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$$

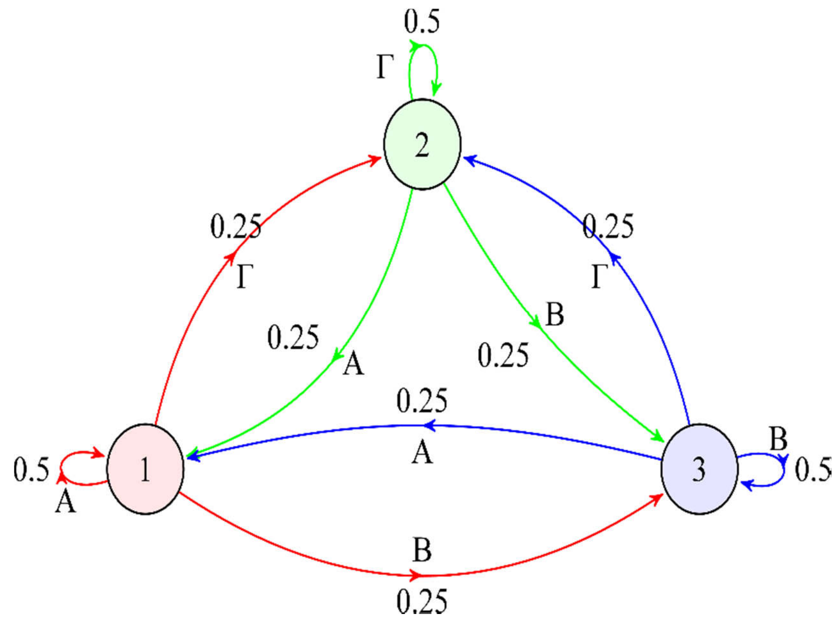
- Στην παραπάνω εξίσωση
  - Με $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ συμβολίζεται ο τελεστής της αναστροφής (γραμμές $\leftrightarrow$ στήλες)
  - Με $\mathbf{I}$ συμβολίζεται ο μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας $n \times n$
  - Με $\mathbf{0}$ συμβολίζεται ένας πίνακας γραμμή με όλα τα στοιχεία του μηδενικά διάστασης $1 \times n$

- Αναλυτικότερα, σε μορφή πινάκων η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_{1,1}-1 & P_{2,1} & \cdots & P_{n,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2}-1 & \cdots & P_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1,n} & P_{2,n} & \cdots & P_{n,n}-1 \end{pmatrix}}_{(\mathbf{P}-\mathbf{I})^{\mathsf{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{T}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}^{\mathsf{T}}}$$

Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω εργοδική πηγή Markov 3 καταστάσεων που παράγει τα γράμματα Α, Β και Γ



- Ο πίνακας μεταβάσεων της αλυσίδας Markov είναι

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- Συνεπώς ο πίνακας $(\mathbf{P} - \mathbf{I})^{\mathsf{T}}$ θα είναι

$$(\mathbf{P} - \mathbf{I})^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Πηγές Markov

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Με απαλοιφή Gauss-Jordan στην εξίσωση $(\mathbf{P} - \mathbf{I})^T \boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{0}^T$ προκύπτει

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & -0.5 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.375 & 0.375 & 0 \\ 0 & 0.375 & -0.375 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

- Συνεπώς καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Δηλαδή

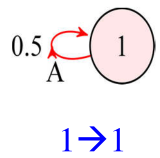
$$\left\{\begin{array}{ll} \pi_1 - \pi_3 = 0 & (1^{\eta}\ \text{γραμμή}) \\ \pi_2 - \pi_3 = 0 & (2^{\eta}\ \text{γραμμή}) \end{array}\right\} \pi_1 = \pi_2 = \pi_3$$

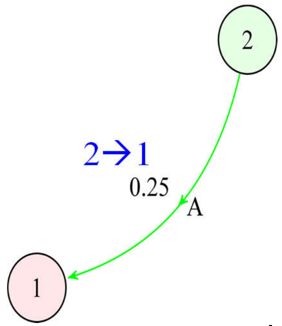
- Κάνοντας επιπλέον χρήση της εξίσωσης $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, τέλος προκύπτει

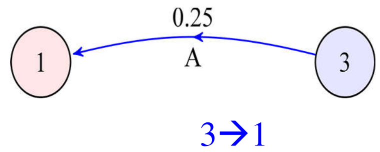
$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$$

Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί A



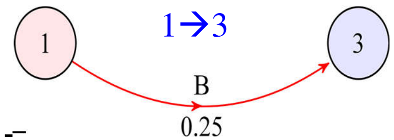


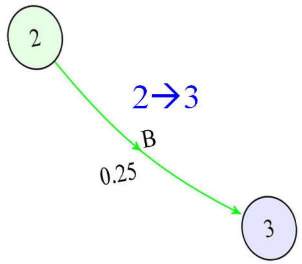


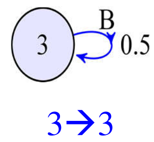
$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1 \text{ ή } S_1 = 1, S_2 = 2 \text{ ή } S_1 = 3, S_2 = 1\} =$

$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \,|\, S_1 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \,|\, S_1 = 2\} + \mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \,|\, S_1 = 3\} = 1/3$

- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί B



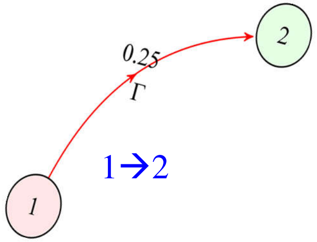


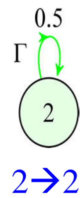


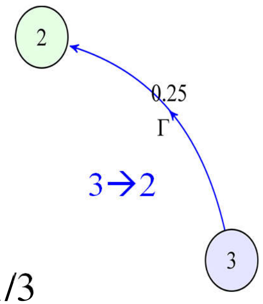
$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 3 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 3 \text{ ή } S_1 = 3, S_2 = 3\} =$

$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \,|\, S_1 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \,|\, S_1 = 2\} + \mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \,|\, S_1 = 3\} = 1/3$

- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί Γ







$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 2 \text{ ή } S_1 = 3, S_2 = 2\} =$

$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \,|\, S_1 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \,|\, S_1 = 2\} + \mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \,|\, S_1 = 3\} = 1/3$

- Παρατηρούμε συνολικά ότι $\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} + \mathbb{P}\{\Gamma\} = 1$

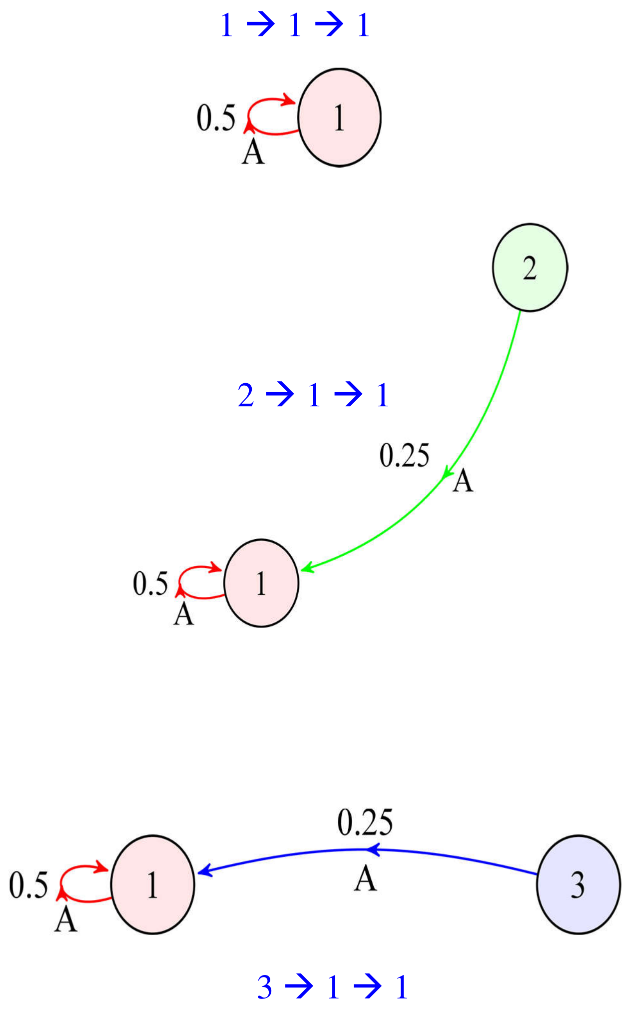
Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΑΑ

$$\mathbb{P}\{AA\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 1 \text{ ή }$$
$$S_1 = 2, S_2 = 1, S_3 = 1 \text{ ή }$$
$$S_1 = 3, S_2 = 1, S_3 = 1\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 1\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 1\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 1\}$$

$$= \pi_1 P_{1,1} P_{1,1} + \pi_2 P_{2,1} P_{1,1} + \pi_3 P_{3,1} P_{1,1} = 1/6$$



Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΒΒ

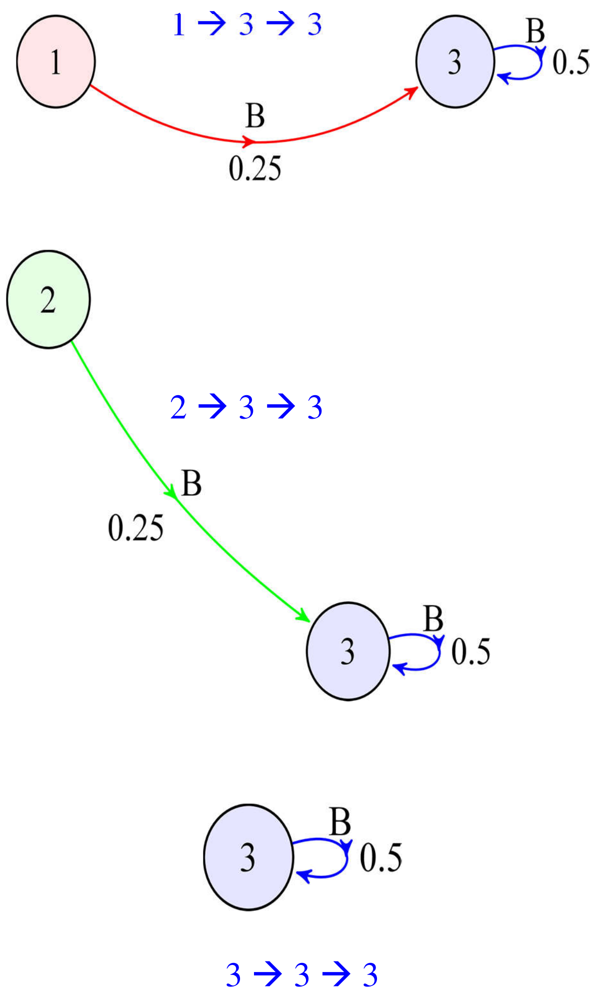
$$\mathbb{P}\{BB\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 3, S_3 = 3 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 3 \text{ ή } S_1 = 3, S_2 = 3, S_3 = 3\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 3\} +$$

$$\mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 3\} +$$

$$\mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 3\} =$$

$$= \pi_1 P_{1,3} P_{3,3} + \pi_2 P_{2,3} P_{3,3} + \pi_3 P_{3,3} P_{3,3} = 1/6$$



Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΓΓ

$$\mathbb{P}\{\Gamma\Gamma\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 2 \ \text{ή}$$

$$S_1 = 2, S_2 = 2, S_3 = 2 \ \text{ή}$$

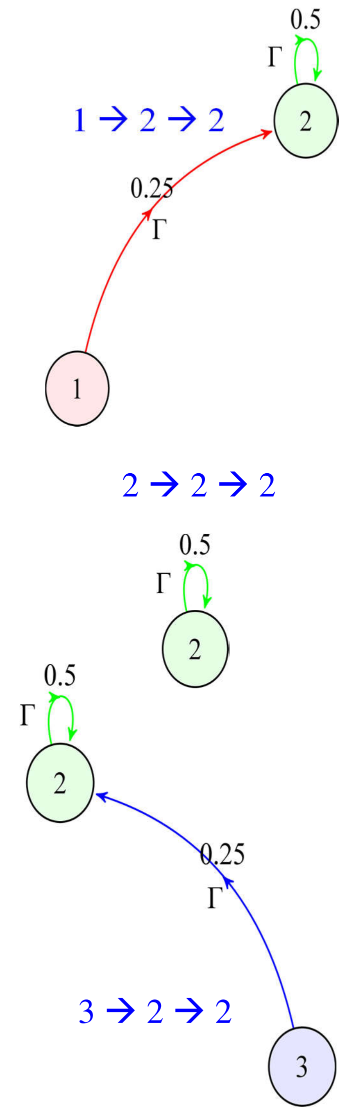
$$S_1 = 3, S_2 = 2, S_3 = 2\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 1\}\ \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 2\} +$$

$$\mathbb{P}\{S_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 2\}\ \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 2\} +$$

$$\mathbb{P}\{S_1 = 3\}\ \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 3\}\ \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 2\} =$$

$$= \pi_1\, P_{1,2}\, P_{2,2} + \pi_2\, P_{2,2}\, P_{2,2} + \pi_3\, P_{3,2}\, P_{2,2} = 1/6$$



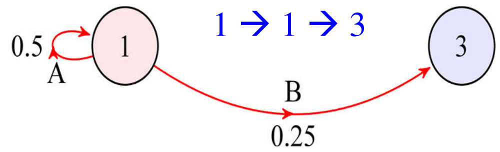
Πηγές Markov

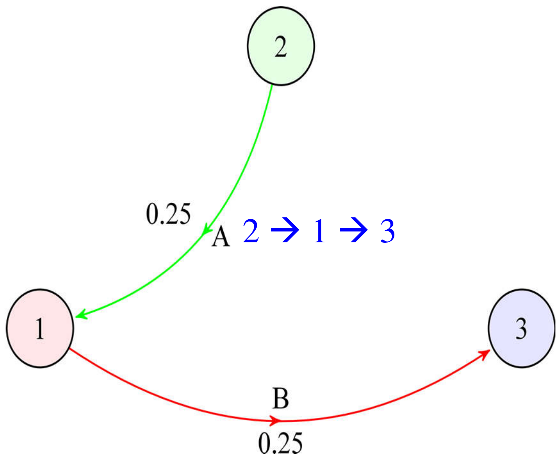
- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΑΒ

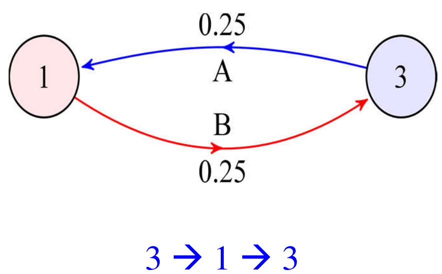
$$\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 3 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 1, S_3 = 3 \text{ ή } S_1 = 3, S_2 = 1, S_3 = 3\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 1\}$$

$$= \pi_1 P_{1,1} P_{1,3} + \pi_2 P_{2,1} P_{1,3} + \pi_3 P_{3,1} P_{1,3} = 1/12$$



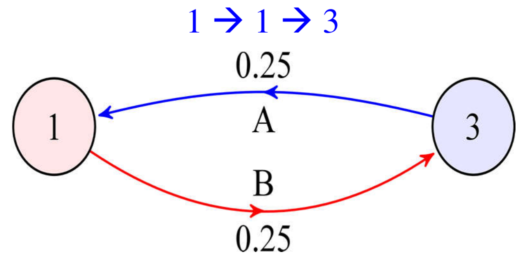


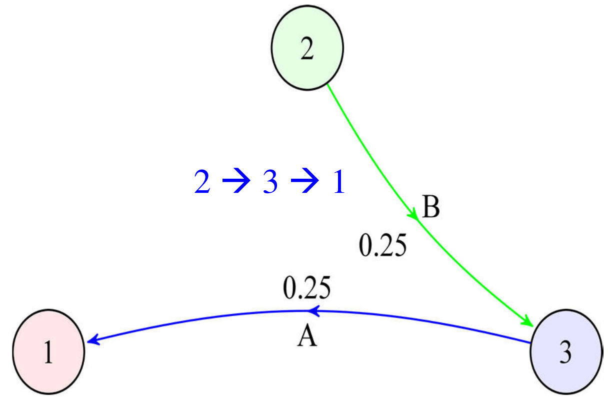


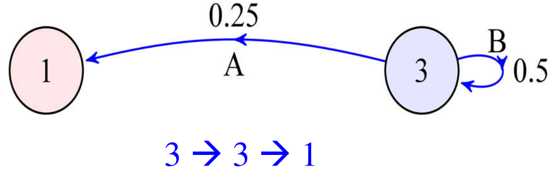
Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί BA

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{BA\} = \mathbb{P}\{ & S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 3 \quad ή \\
& S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 1 \quad ή \\
& S_1 = 3, S_2 = 3, S_3 = 1\} = \\
= {} & \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 1\} + \\
& \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\,\mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 2\}\,\mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 3\} + \\
& \mathbb{P}\{S_1 = 3\}\,\mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 3\}\,\mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 3\} \\
= {} & \pi_1 P_{1,3} P_{3,1} + \pi_2 P_{2,3} P_{3,1} + \pi_{\mathbf{3}} P_{3,3} P_{3,1} = 1/12
\end{aligned}
$$







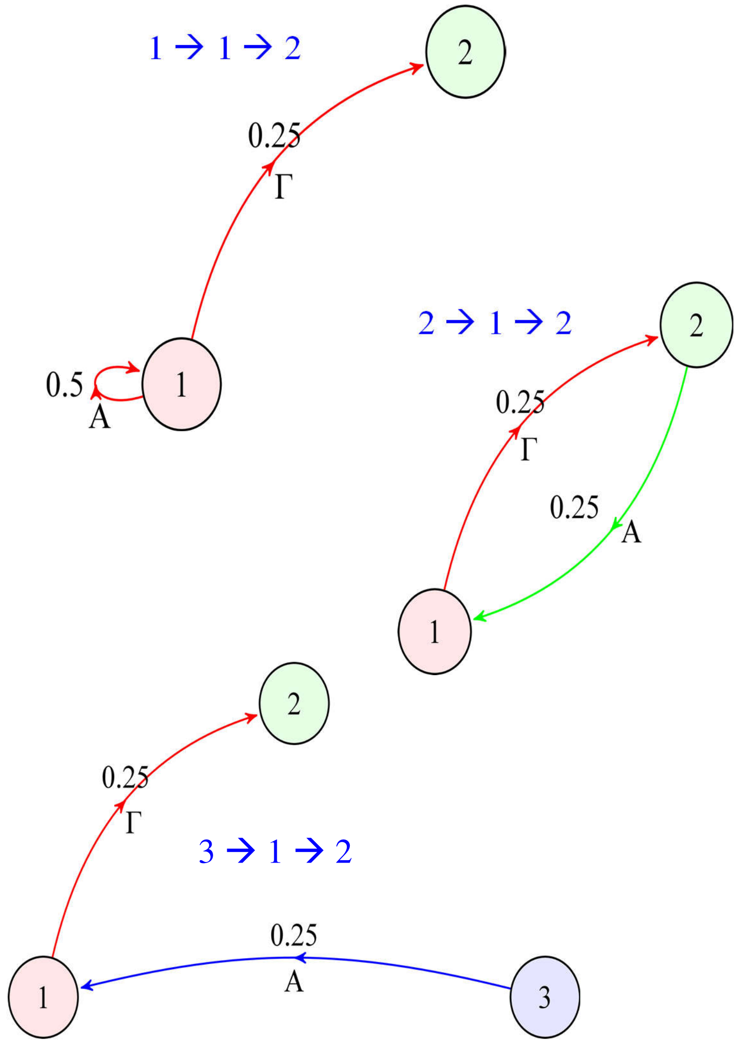
Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΑΓ

$$\mathbb{P}\{\text{ΑΓ}\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 2 \text{ ή } S_1 = 2, S_2 = 1, S_3 = 2 \text{ ή } S_1 = 3, S_2 = 1, S_3 = 2\} =$$

$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 1\} + \mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 1\}$$

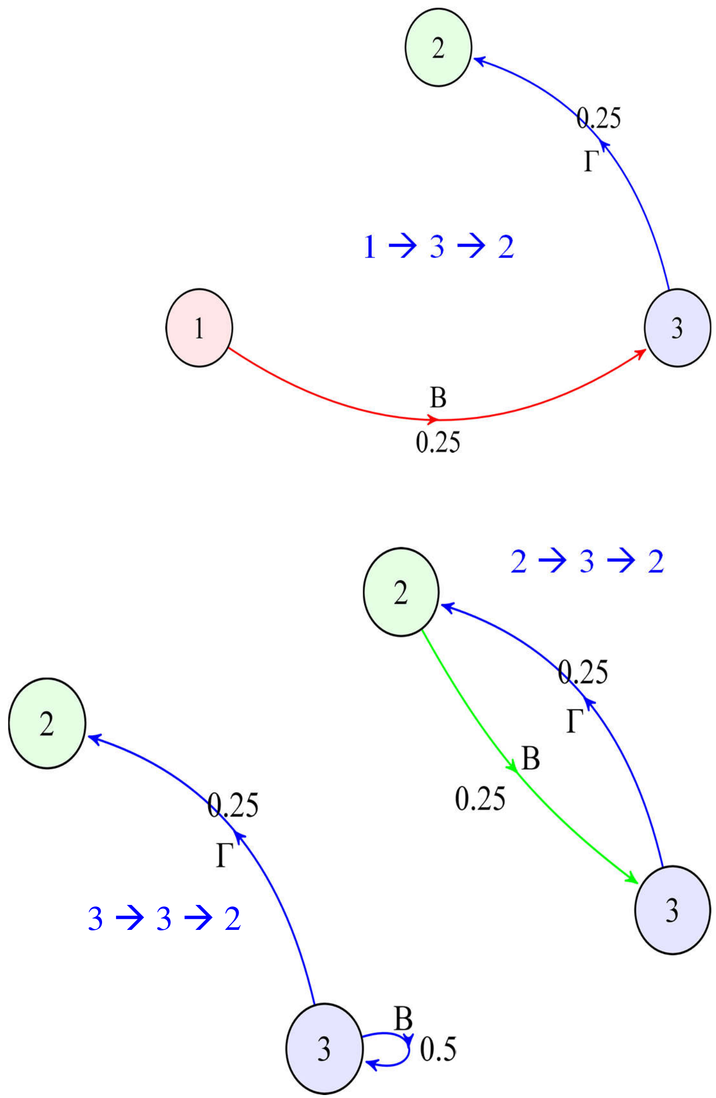
$$= \pi_1 P_{1,1} P_{1,2} + \pi_2 P_{2,1} P_{1,2} + \pi_3 P_{3,1} P_{1,2} = 1/12$$



Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΒΓ

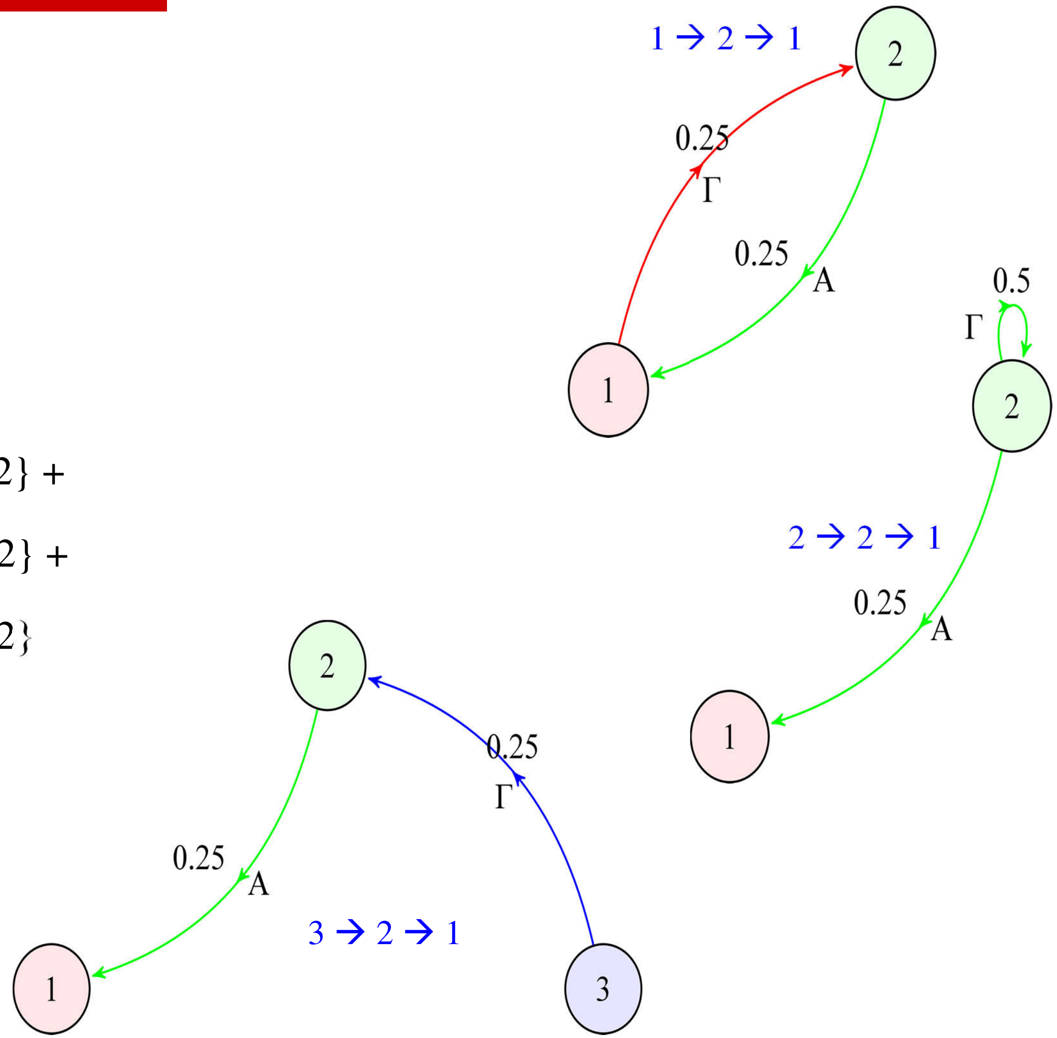
$$\mathbb{P}\{\Gamma B\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 3, S_3 = 2 \text{ ή}$$
$$S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 2 \text{ ή}$$
$$S_1 = 3, S_2 = 3, S_3 = 2\} =$$
$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 2 \mid S_2 = 3\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 3\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 3 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 3\}$$
$$= \pi_1 P_{1,3} P_{3,1} + \pi_2 P_{2,3} P_{3,1} + \pi_{\mathbf{3}} P_{3,3} P_{3,1} = 1/12$$



Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΓΑ

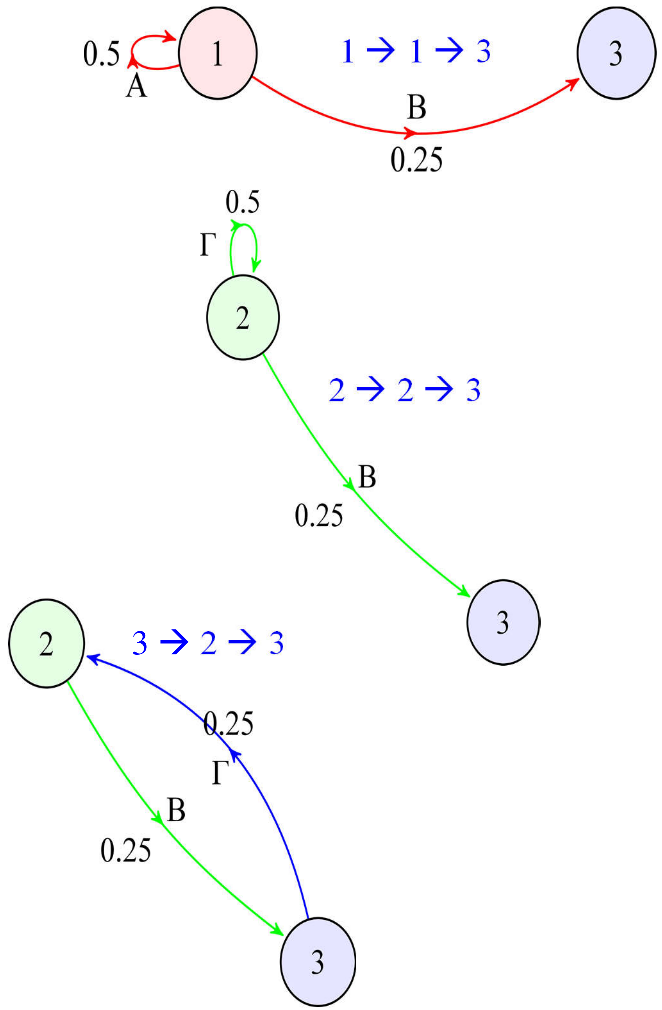
$$\mathbb{P}\{\Gamma\mathrm{A}\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 1 \text{ ή }$$
$$S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 1 \text{ ή }$$
$$S_1 = 3, S_2 = 2, S_3 = 1\} =$$
$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 2\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 2\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 1 \mid S_2 = 2\}$$
$$= \pi_1 P_{1,2} P_{2,1} + \pi_2 P_{2,2} P_{2,1} + \pi_{\mathbf{3}} P_{3,2} P_{2,1} = 1/12$$



Πηγές Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:
- Υπολογισμός πιθανότητας να παραχθεί ΓΒ

$$\mathbb{P}\{\Gamma B\} = \mathbb{P}\{S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 3 \;\; \text{ή}$$
$$S_1 = 2, S_2 = 2, S_3 = 3 \;\; \text{ή}$$
$$S_1 = 3, S_2 = 2, S_3 = 3\} =$$
$$= \mathbb{P}\{S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 1 \mid S_1 = 1\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 1\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 2\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 2\} +$$
$$\mathbb{P}\{S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_2 = 2 \mid S_1 = 3\}\, \mathbb{P}\{S_3 = 3 \mid S_2 = 2\}$$
$$= \pi_1 P_{1,1} P_{1,3} + \pi_2 P_{2,2} P_{2,3} + \pi_{\mathbf{3}} P_{3,2} P_{2,3} = 1/12$$



- Ως επαλήθευση των υπολογισμών παρατηρούμε ότι

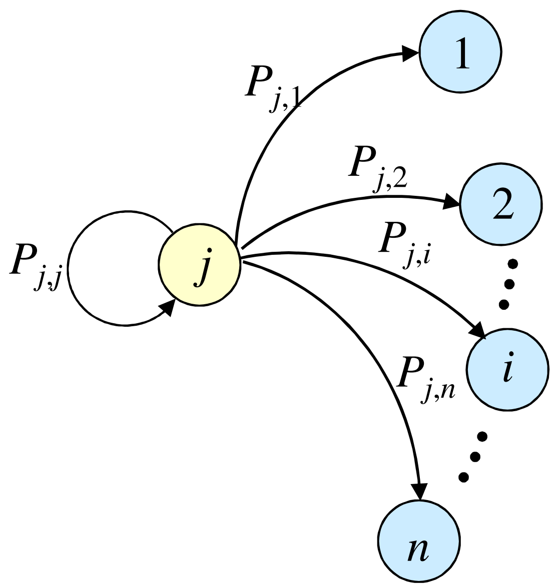
$$\mathbb{P}\{AA\} + \mathbb{P}\{BB\} + \mathbb{P}\{\Gamma\Gamma\} + \mathbb{P}\{AB\} + \mathbb{P}\{A\Gamma\} + \mathbb{P}\{BA\} + \mathbb{P}\{B\Gamma\} + \mathbb{P}\{\Gamma A\} + \mathbb{P}\{\Gamma B\} = 1$$

Εντροπία Πηγής Markov

- Έστω ότι μια εργοδική πηγή Markov n καταστάσεων βρίσκεται στην κατάσταση j (j = 1, 2,…, n)

- Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων που παράγονται από την κατάσταση j είναι

$$H(S_1 = j) = \sum_{i=1}^{n} P_{j,i} \log_2 \left(\frac{1}{P_{j,i}} \right)$$



Εντροπία Πηγής Markov

- Αν λάβουμε υπόψιν όλες τις *n* καταστάσεις και σταθμίσουμε πάνω σε αυτές, η εντροπία της εργοδικής πηγής Markov είναι

$$H(\mathscr{L}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j H(S_1 = j) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \sum_{i=1}^{n} P_{j,i} \log_2 \left(\frac{1}{P_{j,i}} \right)$$

- Ποιο σωστά, η παραπάνω έκφραση μας δίδει τον ρυθμό εντροπίας, αλλά για λόγους απλότητας θα συνεχίσουμε να την αποκαλούμε ως εντροπία

- Όπως και στις πηγές χωρίς μνήμη, η παραπάνω εντροπία εκφράζει τον μέσο αριθμό των bit ανά σύμβολο μιας μακροσκελούς ακολουθίας συμβόλων που παράγονται από την πηγή

- Αν η πηγή Markov παράγει $R_s = 1/T_s$ σύμβολα ανά sec, ο μέσος ρυθμός πληροφορίας σε bps είναι

$$R = R_s H(\mathscr{L})$$

Εντροπία Πηγής Markov

- Έστω το σύνολο (πλήθος A_N) των ακολουθιών (υπερσυμβόλων) μιας πηγής μήκους N συμβόλων

- Αν η πιθανότητα εμφάνισης της i-ωστής ακολουθίας είναι $\mathbb{P}\{m_i\}$ (με $i = 1, 2,.., A_N$), ορίζουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο (σε bit ανά υπερσύμβολο)

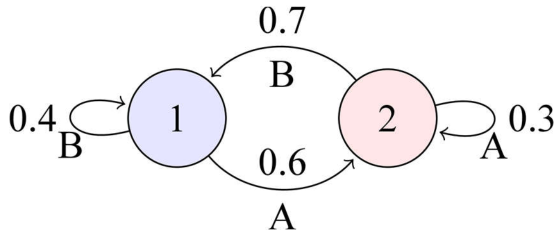
$$H(\mathscr{L}^N) = \sum_{i=1}^{A_N} \mathbb{P}\{m_i\} \log_2 \left(\frac{1}{\mathbb{P}\{m_i\}} \right)$$

- Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $G_N = H(\mathscr{L}^N)/N$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς N και η ελάχιστη τιμή της προκύπτει για $N \to \infty$ ως

$$\lim_{N\to\infty} \frac{H(\mathscr{L}^N)}{N} = H(\mathscr{L})$$

- Δηλαδή, η μέση ποσότητα πληροφορίας ανά σύμβολο μιας μακράς ακολουθίας συμβόλων, τείνει να γίνει ίση με την εντροπία της πηγής

Εντροπία Πηγής Markov



- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω η δίπλα εργοδική πηγή Markov, για την οποία έχουμε βρει τις πιθανότητες στάσιμης κατάστασης

$$\pi_1 = 7/13 \quad \text{και} \quad \pi_2 = 6/13$$

- Βάσει των πιθανοτήτων στάσιμης κατάστασης και των πιθανοτήτων μετάβασης μπορεί να υπολογιστεί η εντροπία της πηγής

$$H(\mathscr{L}) = \sum_{j=1}^{2} \pi_j \sum_{i=1}^{2} P_{j,i} \log_2\left(\frac{1}{P_{j,i}}\right) =$$

$$= -\pi_1 P_{1,1} \log_2(P_{1,1}) - \pi_1 P_{1,2} \log_2(P_{1,2}) - \pi_2 P_{2,1} \log_2(P_{2,1}) - \pi_2 P_{2,2} \log_2(P_{2,2}) =$$

$$= -\frac{7}{13}\times 0.4 \log_2(0.4) - \frac{7}{13}\times 0.6 \log_2(0.6) - \frac{6}{13}\times 0.7 \log_2(0.7) - \frac{6}{13}\times 0.3 \log_2(0.3) \text{ bit} \approx 0.93 \text{ bit}$$

- Σημειώνεται ότι η εντροπία μιας ισοδύναμης πηγής με ανεξάρτητα σύμβολα είναι

$$H(\mathscr{L}') = \sum_{i=1}^{2} \pi_i \log_2\left(\frac{1}{\pi_i}\right) = 0.996 \text{ bit} > H(\mathscr{L})$$

Εντροπία Πηγής Markov

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Επιπλέον έχουν βρεθεί οι πιθανότητες εμφάνισης ακολουθιών συμβόλων (υπερσυμβόλων ή αλλιώς μηνυμάτων) για μήκη $N = 1, 2, 3$, με αντίστοιχα πλήθη $A_N = 2, 4, 8$

Μήκος: $N = 1$ Πλήθος: $A_1 = 2$		**Μήκος: $N = 2$ Πλήθος: $A_2 = 4$**		**Μήκος: $N = 3$ Πλήθος: $A_3 = 8$**	
Μήνυμα	**Πιθανότητα**	**Μήνυμα**	**Πιθανότητα**	**Μήνυμα**	**Πιθανότητα**
A	6 / 13	AA	1.8 / 13	AAA	0.54 / 13
B	7 / 13	AB	4.2 / 13	AAB	1.26 / 13
		BB	2.8 / 13	ABA	2.52 / 13
		BA	4.2 / 13	ABB	1.68 / 13
				BAA	1.26 / 13
				BAB	2.94 / 13
				BBA	1.68 / 13
				BBB	1.12 / 13

Εντροπία Πηγής Markov

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Βάσει των πιθανοτήτων του προηγούμενου πίνακα μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ανά σύμβολο G_N
  - Για $N = 1$: Βρίσκουμε $G_1 \approx 0.996$ bit
  - Για $N = 2$: Βρίσκουμε $G_2 \approx 0.963$ bit
  - Για $N = 3$: Βρίσκουμε $G_3 \approx 0.952$ bit

- Παρατηρούμε ότι

$$G_1 > G_2 > G_3 > H(\mathscr{L})$$

- Δηλαδή, όντως, η συνάρτηση G_N ελαττώνεται καθώς αυξάνει το N και προσεγγίζει την εντροπία της πηγής, η οποία στο παράδειγμα αυτό είναι $H(\mathscr{L}) = 0.93$ bit ανά σύμβολο

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Ένας κωδικοποιητής πηγής δέχεται ως είσοδο σύμβολα s_i από πηγή πληροφορίας και εξάγει bit

- Τα υπερσύμβολα εισόδου στον κωδικοποιητή είναι μήκους N συμβόλων με το i-ωστό να έχει πιθανότητα εμφάνισης P_i (με $i = 1, 2, \ldots, A_N$) (δηλαδή υπάρχουν A_N ως προς το πλήθος)

- Ο κωδικοποιητής παράγει κωδικολέξεις $c(s_i)$ μήκους l_i bit

- Το μέσο μήκος των κωδικολέξεων σε bit ανά σύμβολο είναι

$$\overline{L}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{A_N} P_i \, l_i$$

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Αν ο κωδικοποιητής λειτουργεί βέλτιστα, το μέσο μήκος των bit ανά σύμβολο θα προσεγγίζει το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων

$$G_N \leq \overline{L}_N < G_N + \frac{1}{N}$$

- Για μακροσκελής ακολουθίες συμβόλων το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο θα προσεγγίζει την εντροπία της πηγής

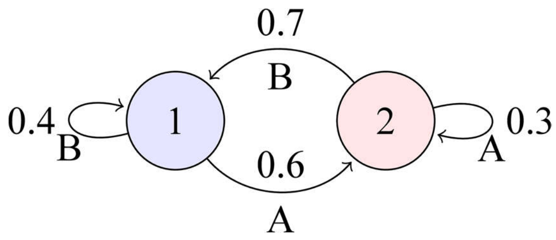
$$\overline{L}_N \to G_N \xrightarrow[N \to \infty]{} H(\mathscr{L})$$

- Η απόδοση ενός κωδικοποιητή που χρησιμοποιεί N σύμβολα ανά υπερσύμβολο ορίζεται

$$\eta_N = \frac{H(\mathscr{L})}{\overline{L}_N}$$

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα</u>: Προηγουμένως, για $N = 1$, υπολογίσαμε τη μέση ποσότητα πληροφορίας ανά σύμβολο $G_1 \approx 0.996$ bit



- Για $N = 1$, η κωδικοποίηση Shannon είναι τετριμμένη:
  - Το σύμβολο B κωδικοποιείται ως 0
  - Το σύμβολο A κωδικοποιείται ως 1

Μήκος: $N = 1$, **Πλήθος:** $A_1 = 2$						
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**Ψηφία** l_i	**10αδικό** $(F_i)_{10}$	**2αδικό** $(F_i)_2$	**Κωδική Λέξη** c_i
1	B	7 / 13	1	0	0.00000000	0
2	A	6 / 13	1	7/13	0.10001001	1

- Το μέσο μήκος των κωδικολέξεων του κώδικα Shannon είναι $\bar{L}_1 = 1$ bit (ανά σύμβολο)

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Για $N = 2$, προηγουμένως, υπολογίσαμε την μέση ποσότητα πληροφορίας ανά σύμβολο $G_2 \approx 0.963$ bit

Μήκος: $N = 2$, Πλήθος: $A_2 = 4$						
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**Ψηφία** l_i	**10αδικό** $(F_i)_{10}$	**2αδικό** $(F_i)_2$	**Κωδική Λέξη** c_i
1	AB	4.2 / 13	2	0	0.000	00
2	BA	4.2 / 13	2	4.2 / 13	0.0101001	01
3	BB	2.8 / 13	3	8.4 / 13	0.101001	101
4	AA	1.8 / 13	3	11.2 / 13	0.1101110	110

- Το μέσο μήκος των κωδικολέξεων ανά σύμβολο του κώδικα Shannon είναι

$$\overline{L}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_i\, l_i = \frac{1}{2}\left(\frac{4.2}{13}\times 2 + \frac{4.2}{13}\times 2 + \frac{2.8}{13}\times 3 + \frac{1.8}{13}\times 3\right) \approx 1.18 \text{ bit}$$

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Για N=3, η μέση ποσότητα πληροφορίας ανά σύμβολο είναι $G_3 \approx 0.95$ bit

Μήκος: $N = 3$, Πλήθος: $A_3 = 8$						
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**Ψηφία** l_i	**10αδικό** $(F_i)_{10}$	**2αδικό** $(F_i)_2$	**Κωδική Λέξη** c_i
1	BAB	2.94 / 13	3	0	0.00000	000
2	ABA	2.52 / 13	3	2.94 / 13	0.001110	001
3	ABB	1.68 / 13	3	5.46 / 13	0.0110101	011
4	BBA	1.68 / 13	3	7.14 / 13	0.1000110	100
5	AAB	1.26 / 13	4	8.82 / 13	0.1010110	1010
6	BAA	1.26 / 13	4	10.08 /13	0.11000110	1100
7	BBB	1.12 / 13	4	11.34 / 13	0.11011111	1101
8	AAA	0.54 / 13	5	12.46 / 13	0.1111010	11110

- Το μέσο μήκος των κωδικολέξεων ανά σύμβολο του κώδικα Shannon είναι

$$\overline{L}_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{8} P_i\, l_i = \frac{1}{3}\left(\frac{2.94}{13}\times 3 + \frac{2.52}{13}\times 3 + \frac{1.68}{13}\times 3 + \frac{1.68}{13}\times 3 + \frac{1.26}{13}\times 4 + \frac{1.26}{13}\times 4 + \frac{1.12}{13}\times 4 + \frac{0.54}{13}\times 5\right) \approx 1.12 \text{ bit}$$

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

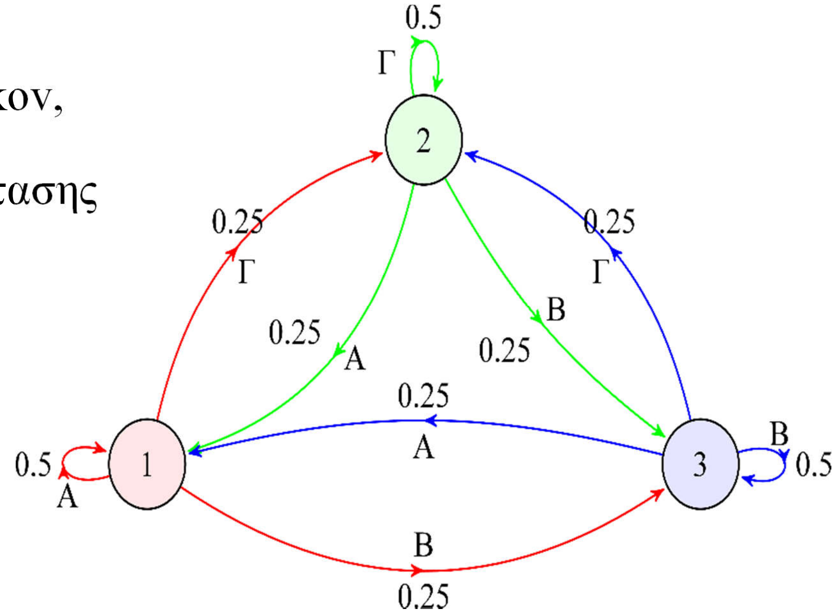
- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Συνοψίζοντας έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για τα διαφορετικά μήκη υπερσυμβόλων

Εντροπία Πηγής: $H(\mathscr{L}) = 0.93$ bit				
N	G_N (bit) $\leq$	$\overline{L}_N$ (bit) $<$	$G_N + 1/N$ (bit)	Απόδοση (%)
1	0.996	1	2	93.0
2	0.963	1.18	1.46	78.8
3	0.952	1.12	1.26	83.0

- Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνει το πλήθος των συμβόλων που αποτελούν τα υπερσύμβολα N:
  - Η μέση ποσότητα πληροφορίας ανά σύμβολο G_N ελαττώνεται και η απόδοση αυξάνει (εξαίρεση N=1)
  - Το μέσο μήκος των κωδικολέξεων ανά σύμβολο, όταν $N \to \infty$, τείνει να γίνει ίσο με το G_N

$$\overline{L}_N \to G_N \xrightarrow[N\to\infty]{} H(\mathscr{L})$$

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη



- <u>Παράδειγμα</u>: Έστω η δίπλα διαδικασία εργοδική πηγή Markov, για την οποία έχουμε βρει τις πιθανότητες στάσιμης κατάστασης

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$$

- Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- Να υπολογιστούν:
  - Η εντροπία της πηγής Markov
  - Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ανά σύμβολο για υπερσύμβολα μήκους $N = 1$, 2 και 3 σύμβολα
  - Οι κωδικολέξεις των υπερσυμβόλων από την κωδικοποίηση Huffman και το μέσο μήκος τους ανά σύμβολο για $N = 1$, 2 και 3 σύμβολα
  - Οι αντίστοιχες αποδόσεις της κωδικοποίησης Huffman

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Μήκος: $N = 1$ Πλήθος: $A_1 = 3$		**Μήκος: $N = 2$ Πλήθος: $A_2 = 9$**		**Μήκος: $N = 3$ Πλήθος: $A_3 = 27$**	
Μήνυμα	**Πιθανότητα**	**Μήνυμα**	**Πιθανότητα**	**Μήνυμα**	**Πιθανότητα**
Α	1 / 3	ΑΑ	1 / 6	ΑΑΑ	0.25 / 3
Β	1 / 3	ΑΒ	1 / 12	ΑΑΒ	0.125 / 3
Γ	1 / 3	ΑΓ	1 / 12	ΑΑΓ	0.125 / 3
		ΒΑ	1 / 12	ΑΒΑ	0.0625 / 3
		ΒΒ	1 / 6	ΑΒΒ	0.125 / 3
		ΒΓ	1 / 12	ΑΒΓ	0.0625 / 3
		ΓΑ	1 / 12	ΑΓΑ	0.0625 / 3
		ΓΒ	1 / 12	ΑΓΒ	0.0625 / 3
		ΓΓ	1 / 6	ΑΓΓ	0.125 / 3
				ΒΑΑ	0.125 / 3
				ΒΑΒ	0.0625 / 3
				ΒΑΓ	0.0625 / 3
				ΒΒΑ	0.125 / 3
				ΒΒΒ	0.25 / 3
				ΒΒΓ	0.125 / 3
				ΒΓΑ	0.0625 / 3
				ΒΓΒ	0.0625 / 3
				ΒΓΓ	0.125 / 3
				ΓΑΑ	0.125 / 3
				ΓΑΒ	0.0625 / 3
				ΓΑΓ	0.0625 / 3
				ΓΒΑ	0.0625 / 3
				ΓΒΒ	0.125 / 3
				ΓΒΓ	0.0625 / 3
				ΓΓΑ	0.125 / 3
				ΓΓΒ	0.125 / 3
				ΓΓΓ	0.25 / 3

- Προηγουμένως βρήκαμε τις πιθανότητες εμφάνισης των υπερσυμβόλων για μήκη $N = 1$ και 2, με αντίστοιχα πλήθη $A_N = 3$ και 9, αντίστοιχα

- Στον πίνακα έχει γίνει και ο αντίστοιχος υπολογισμός για υπερσύμβολα μήκους $N = 3$ συμβόλων με πλήθος υπερσυμβόλων $A_3 = 27$

- Στη συνέχεια γίνεται χρήση της λέξης υπερσύμβολα και μηνύματα έχοντας και οι δύο λέξεις την ίδια ακριβώς έννοια

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Με βάσει τις πιθανότητες στάσιμης κατάστασης και τις πιθανότητες μετάβασης, μπορεί να υπολογιστεί η εντροπία της πηγής Markov ως εξής

$$H(\mathscr{L}) = \sum_{j=1}^{3} \pi_j \sum_{i=1}^{3} P_{j,i} \log_2 \left(\frac{1}{P_{j,i}} \right) = \pi_1 H(S_1 = 1) + \pi_2 H(S_1 = 2) + \pi_3 H(S_1 = 3) = 1.5 \text{ bit}$$

- Μίας ισοδύναμη πηγής χωρίς μνήμη, η εντροπία θα ήταν μεγαλύτερη και συγκεκριμένα είναι

$$H(\mathscr{L}_0) = \sum_{i=1}^{3} \pi_i \log_2 \left(\frac{1}{\pi_i} \right) = 3 \times \frac{1}{3} \times \log_2(3) = 1.585 \text{ bit}$$

- $\mathbb{P}\{m_i\}$ είναι η πιθανότητα εμφάνισης του i-ωστου υπερσυμβόλου (πίνακα προηγούμενης σελίδας). Βάσει της παρακάτω σχέσης υπολογίζουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ανά σύμβολο:
  - Για $N = 1$: $G_1 = 1.585$ bit
  - Για $N = 2$: $G_2 = 1.543$ bit
  - Για $N = 3$: $G_3 = 1.528$ bit

$$G_N = \frac{1}{N} H(\mathscr{L}^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{A_N} \mathbb{P}\{m_i\} \log_2 \left(\frac{1}{\mathbb{P}\{m_i\}} \right)$$

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Για $N = 1$, το μέσο μήκος των κωδικολέξεων του κώδικά Huffman είναι

$$\overline{L}_1 = \sum_{i=1}^{3} P_i \, \ell_i = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 = 1.667 \, \text{bit}$$

Κωδικοποίηση Huffman				
α/α i	**Σύμβολο** s_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η Αναδιάταξη**	**Κωδική Λέξη** $c(s_i)$
1	s_1	1 / 3	2 / 3 0	1
2	s_2	1 / 3 0	1 / 3 1	0 0
3	s_3	1 / 3 1		0 1

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): $N = 2$: Διατάσσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των υπερσυμβόλων

Κωδικοποίηση Huffman										
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i								
1	m_1	1 / 6								
2	m_2	1 / 6								
3	m_3	1 / 6								
4	m_4	1 / 12								
5	m_5	1 / 12								
6	m_6	1 / 12								
7	m_7	1 / 12								
8	m_8	1 / 12								
9	m_9	1 / 12								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α *i*	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**							
1	m_1	1 / 6	1 / 6							
2	m_2	1 / 6	1 / 6							
3	m_3	1 / 6	1 / 6							
4	m_4	1 / 12	1 / 6							
5	m_5	1 / 12	1 / 12							
6	m_6	1 / 12	1 / 12							
7	m_7	1 / 12	1 / 12							
8	m_8	**1 / 12**	1 / 12							
9	m_9	**1 / 12**								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Κωδικοποίηση Huffman

			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**						
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6						
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6						
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12						
7	m_7	1 / 12	**1 / 12**	1 / 12						
8	m_8	1 / 12	**1 / 12**							
9	m_9	1 / 12								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Κωδικοποίηση Huffman											
			Αναδιατάξεις								
α/α i	Μήνυμα m_i	Πιθανότητα P_i	1η	2η	3η						
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6						
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6						
6	m_6	1 / 12	1 / 12	**1 / 12**	1 / 6						
7	m_7	1 / 12	1 / 12	**1 / 12**							
8	m_8	1 / 12	1 / 12								
9	m_9	1 / 12									

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**				
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3				
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6				
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6				
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6				
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	**1 / 6**	1 / 6				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12	**1 / 6**					
7	m_7	1 / 12	1 / 12	1 / 12						
8	m_8	1 / 12	1 / 12							
9	m_9	1 / 12								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α *i*	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**			
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3			
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3			
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6			
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	**1 / 6**	1 / 6			
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6	**1 / 6**				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12	1 / 6					
7	m_7	1 / 12	1 / 12	1 / 12						
8	m_8	1 / 12	1 / 12							
9	m_9	1 / 12								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	Μήνυμα m_i	Πιθανότητα P_i	1η	2η	3η	4η	5η	6η		
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3		
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3		
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	**1 / 6**	1 / 3		
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	**1 / 6**			
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12	1 / 6					
7	m_7	1 / 12	1 / 12	1 / 12						
8	m_8	1 / 12	1 / 12							
9	m_9	1 / 12								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1^{η}**	**2^{η}**	**3^{η}**	**4^{η}**	**5^{η}**	**6^{η}**	**7^{η}**	
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3	
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	**1 / 3**	1 / 3	
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	**1 / 3**		
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6			
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12	1 / 6					
7	m_7	1 / 12	1 / 12	1 / 12						
8	m_8	1 / 12	1 / 12							
9	m_9	1 / 12								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Κωδικοποίηση Huffman											
			Αναδιατάξεις								
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1^{η}**	**2^{η}**	**3^{η}**	**4^{η}**	**5^{η}**	**6^{η}**	**7^{η}**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$	
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0		
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1		
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1			
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1					
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1						
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1							
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1								
9	m_9	1 / 12 1									

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Διαδρομή για την κωδικοποίηση 1ου υπερσυμβόλου $c(m_1)$

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Διαδρομή για την κωδικοποίηση 2^ου^ υπερσυμβόλου $c(m_2)$

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α *i*	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση 3[ου] υπερσυμβόλου $c(m_3)$

Κωδικοποίηση Huffman

			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση 4ου υπερσυμβόλου $c(m_4)$

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση $5^{ου}$ υπερσυμβόλου $c(m_5)$

Κωδικοποίηση Huffman

			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	$1^η$	$2^η$	$3^η$	$4^η$	$5^η$	$6^η$	$7^η$	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				101
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση 6^{ου} υπερσυμβόλου $c(m_6)$

Κωδικοποίηση Huffman

			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				101
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					110
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση 7^ου^ υπερσυμβόλου $c(m_7)$

Κωδικοποίηση Huffman

			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				101
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					110
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						111
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση 8ου υπερσυμβόλου $c(m_8)$

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				101
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					110
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						111
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							0000
9	m_9	1 / 12 1								

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Διαδρομή για την κωδικοποίηση 9ου υπερσυμβόλου $c(m_9)$

Κωδικοποίηση Huffman

			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				101
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					110
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						111
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							0000
9	m_9	1 / 12 1								0001

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Για $N = 2$, το μέσο μήκος των κωδικολέξεων ανά σύμβολο είναι

$$\overline{L}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} P_i\,\ell_i = \frac{1}{2}\left(3\times\frac{1}{6}\times 3 + 4\times\frac{1}{12}\times 3 + 2\times\frac{1}{12}\times 4\right) = 1.5833\,\text{bit}$$

Κωδικοποίηση Huffman										
			Αναδιατάξεις							
α/α i	**Μήνυμα** m_i	**Πιθανότητα** P_i	**1η**	**2η**	**3η**	**4η**	**5η**	**6η**	**7η**	**Κωδική Λέξη** $c(m_i)$
1	m_1	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3	1 / 3	2 / 3 0	001
2	m_2	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 3	1 / 3 0	1 / 3 1	010
3	m_3	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 3 1		011
4	m_4	1 / 12	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1			100
5	m_5	1 / 12	1 / 12	1 / 6	1 / 6 0	1 / 6 1				101
6	m_6	1 / 12	1 / 12	1 / 12 0	1 / 6 1					110
7	m_7	1 / 12	1 / 12 0	1 / 12 1						111
8	m_8	1 / 12 0	1 / 12 1							0000
9	m_9	1 / 12 1								0001

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Για $N = 3$ διατάσσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των υπερσυμβόλων $m_1, m_2, \ldots, m_{27}$

- Ταξινομώντας βάσει πιθανότητας, υπάρχουν τρεις ομάδες:
  - 1η ομάδα: 3 υπερσύμβολα με πιθανότητα εμφάνισης για το καθένα 0.25/3
  - 2η ομάδα: 12 υπερσύμβολα με πιθανότητα εμφάνισης για το καθένα 0.125/3
  - 3η ομάδα: 12 υπερσύμβολα με πιθανότητα εμφάνισης για το καθένα 0.0625/3

- Χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα για σύντομη γραφή της κατάταξης των υπερσυμβόλων με βάση την πιθανότητα εμφάνισης

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

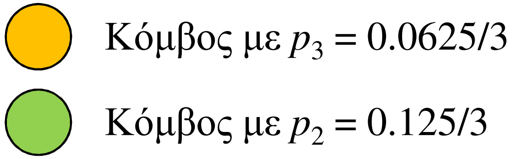
Μήκος: $N = 3$
Πλήθος: $A_3 = 27$

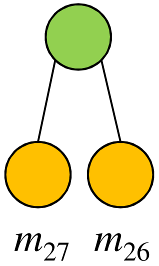
	Μήνυμα	Πιθανότητα
m_1	ΑΑΑ	0.25 / 3
m_4	ΑΑΒ	0.125 / 3
m_5	ΑΑΓ	0.125 / 3
m_{16}	ΑΒΑ	0.0625 / 3
m_6	ΑΒΒ	0.125 / 3
m_{17}	ΑΒΓ	0.0625 / 3
m_{18}	ΑΓΑ	0.0625 / 3
m_{19}	ΑΓΒ	0.0625 / 3
m_7	ΑΓΓ	0.125 / 3
m_8	ΒΑΑ	0.125 / 3
m_{20}	ΒΑΒ	0.0625 / 3
m_{21}	ΒΑΓ	0.0625 / 3
m_9	ΒΒΑ	0.125 / 3
m_2	ΒΒΒ	0.25 / 3
m_{10}	ΒΒΓ	0.125 / 3
m_{22}	ΒΓΑ	0.0625 / 3
m_{23}	ΒΓΒ	0.0625 / 3
m_{11}	ΒΓΓ	0.125 / 3
m_{12}	ΓΑΑ	0.125 / 3
m_{24}	ΓΑΒ	0.0625 / 3
m_{25}	ΓΑΓ	0.0625 / 3
m_{26}	ΓΒΑ	0.0625 / 3
m_{13}	ΓΒΒ	0.125 / 3
m_{27}	ΓΒΓ	0.0625 / 3
m_{14}	ΓΓΑ	0.125 / 3
m_{15}	ΓΓΒ	0.125 / 3
m_3	ΓΓΓ	0.25 / 3

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Κωδικοποιούμε με βάση το κωδικό δέντρο κατά Huffman

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$





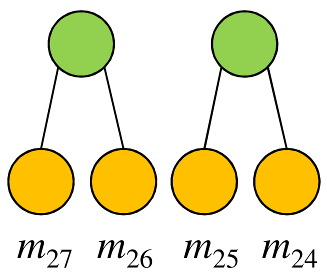
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_2 = 0.125/3$



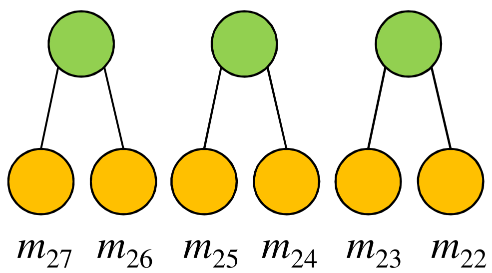
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_3 = 0.0625/3$

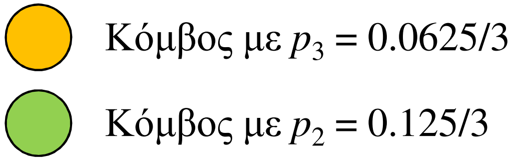
Κόμβος με $p_2 = 0.125/3$

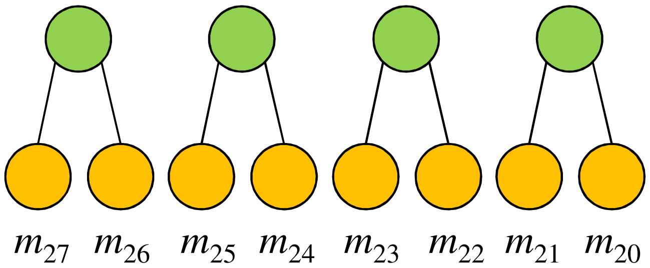


Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$





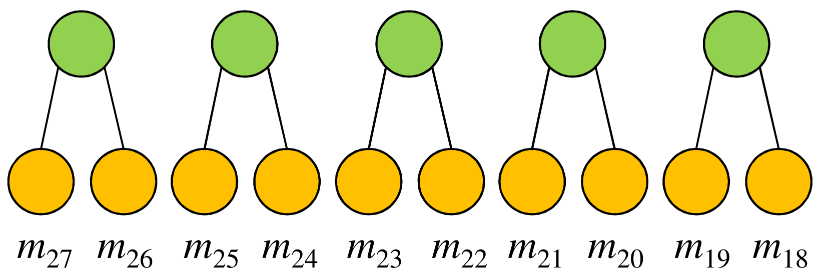
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_2 = 0.125/3$



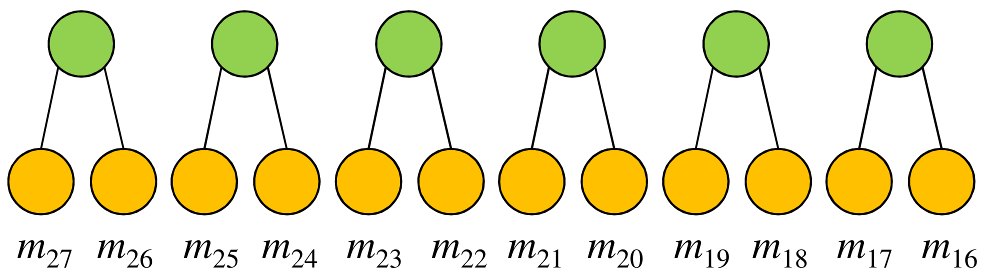
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_3 = 0.0625/3$

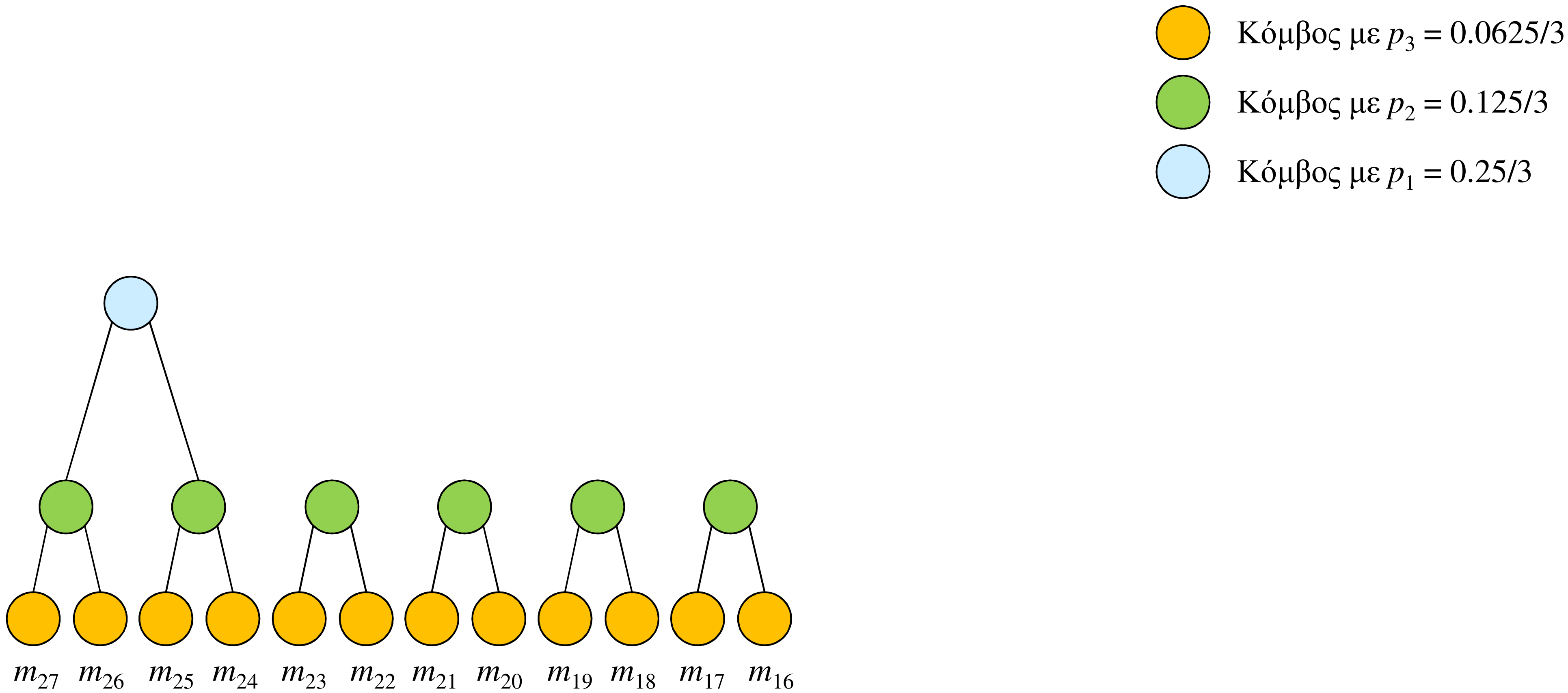
Κόμβος με $p_2 = 0.125/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

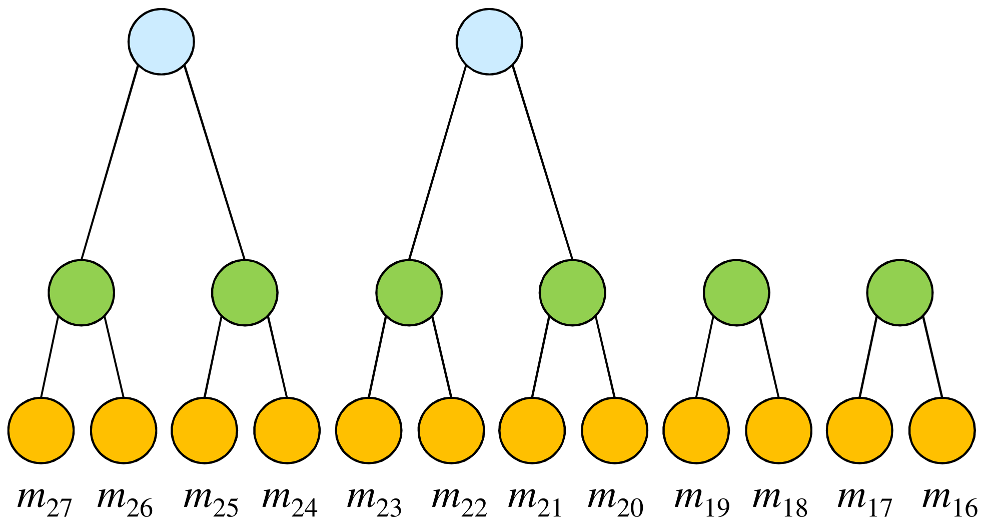
- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_2 = 0.125/3$

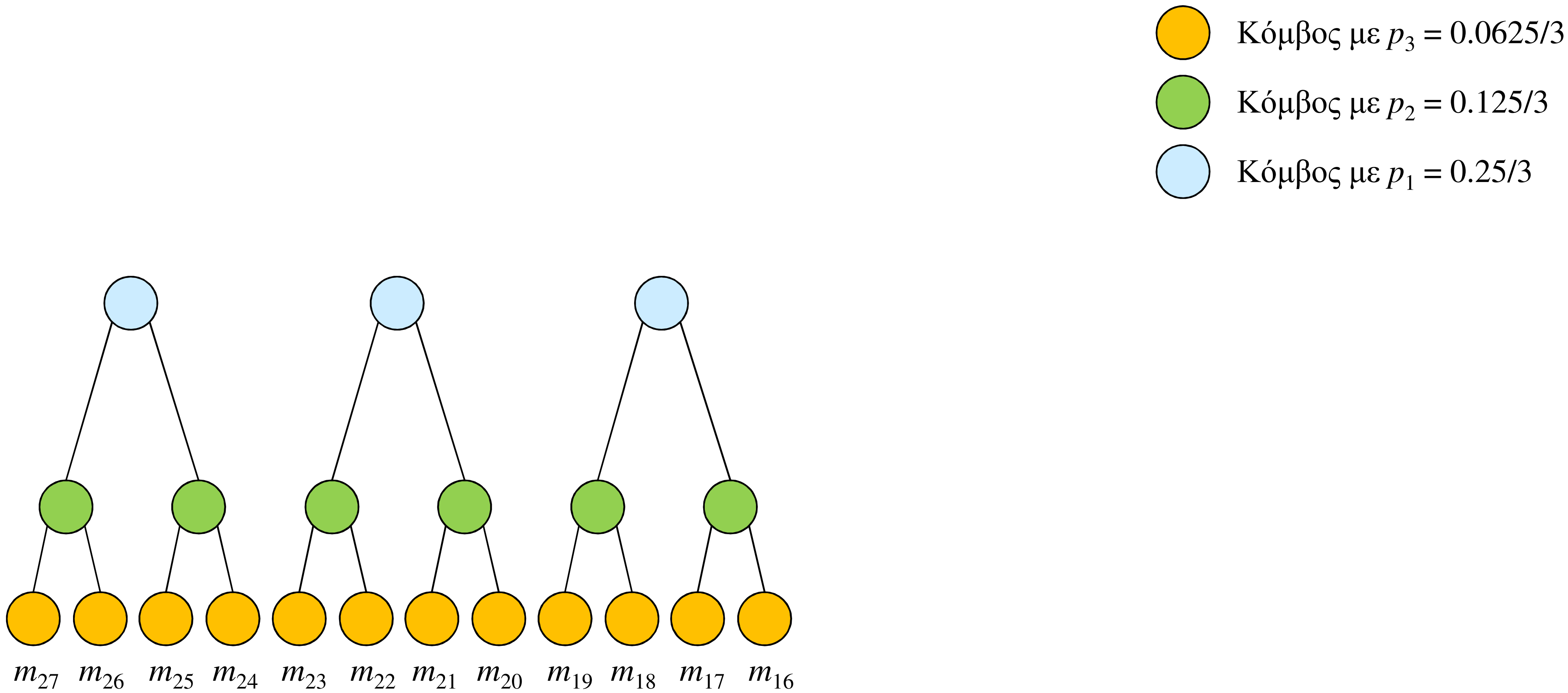
Κόμβος με $p_1 = 0.25/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

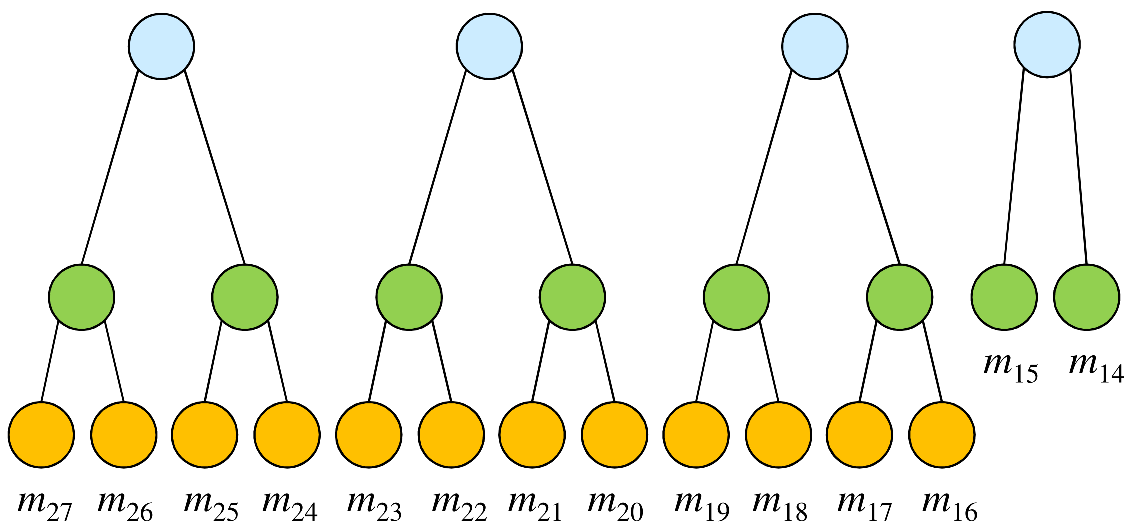
- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_2 = 0.125/3$

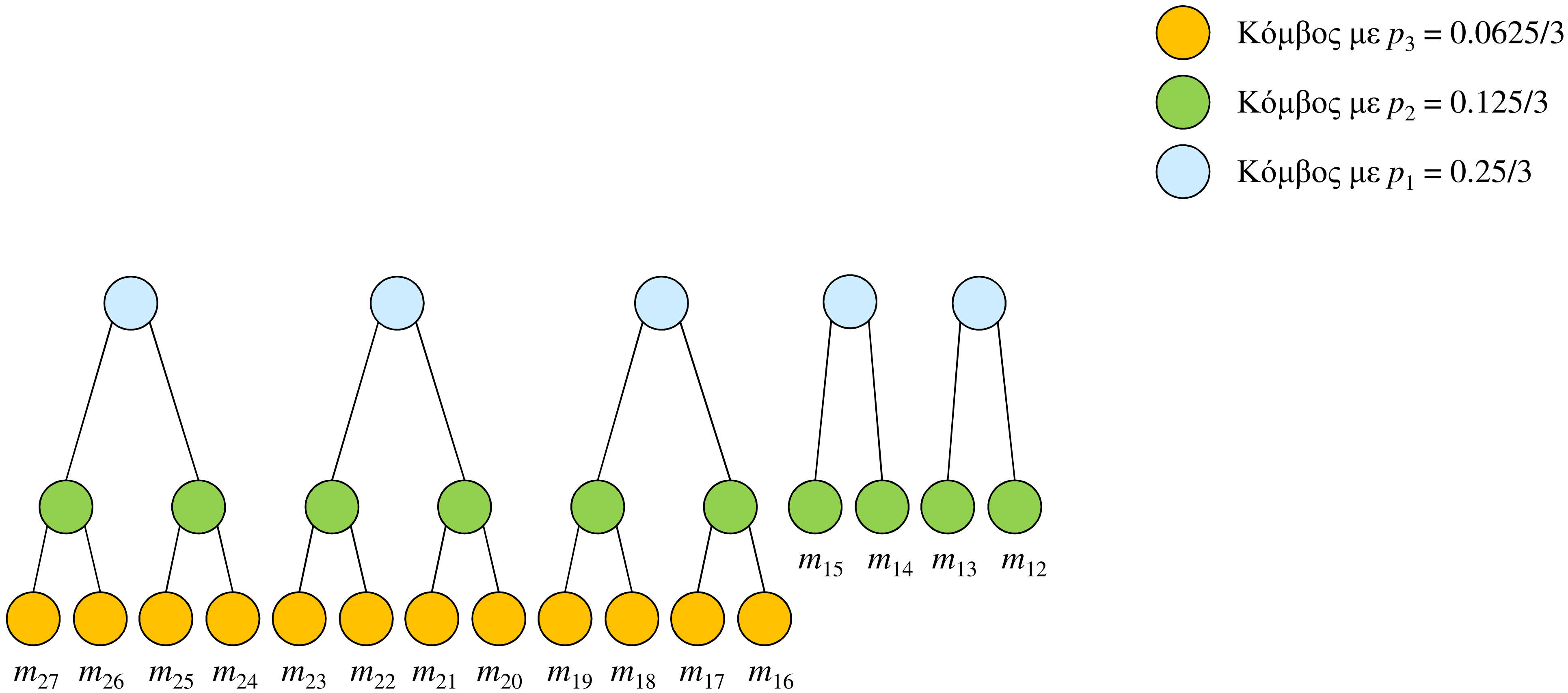
Κόμβος με $p_1 = 0.25/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

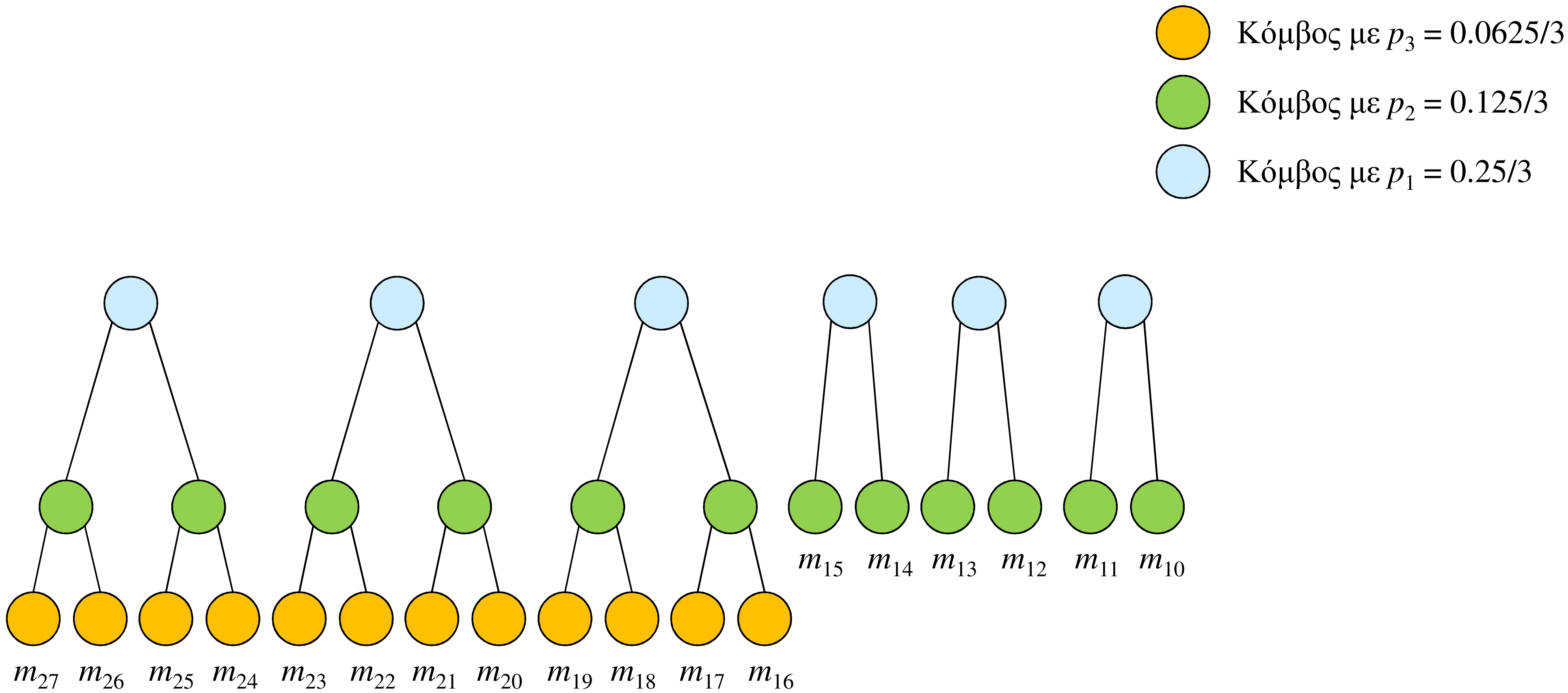
Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

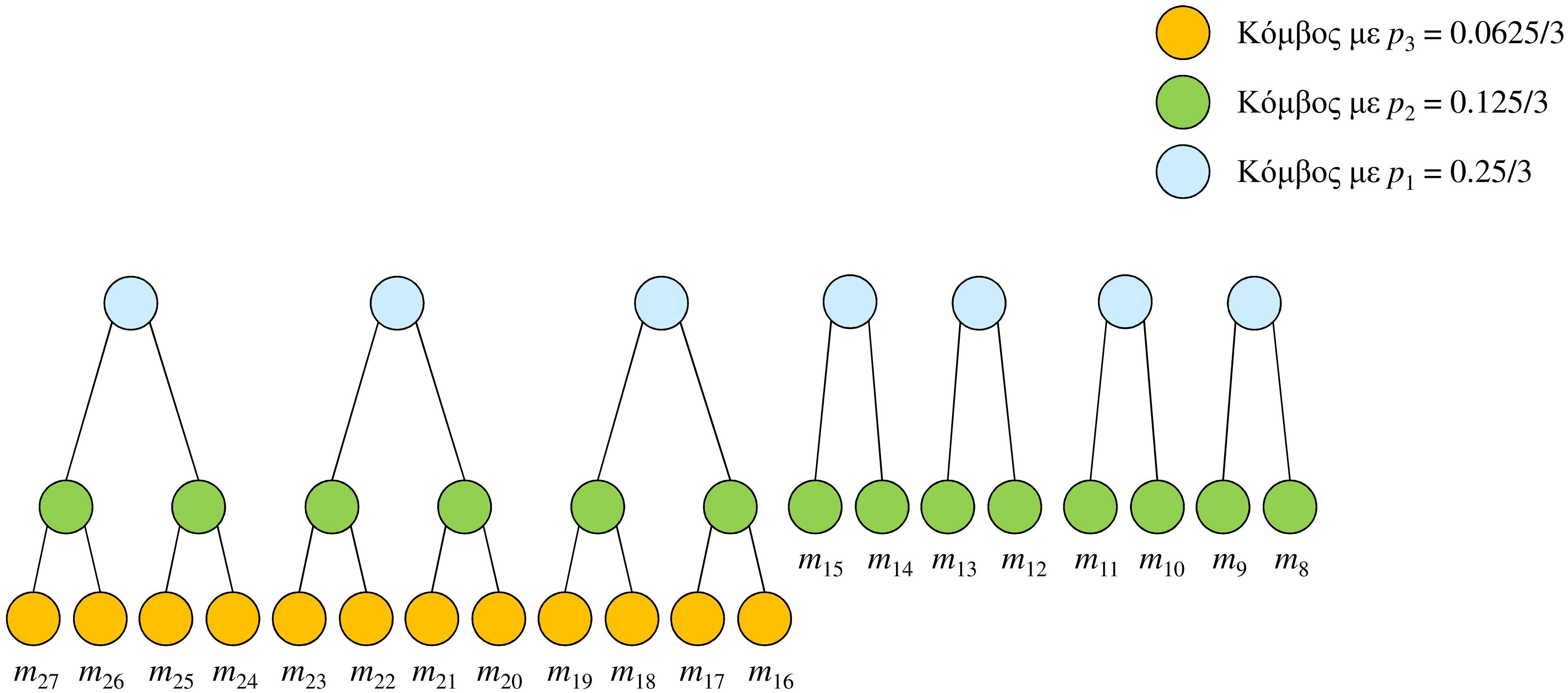
Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

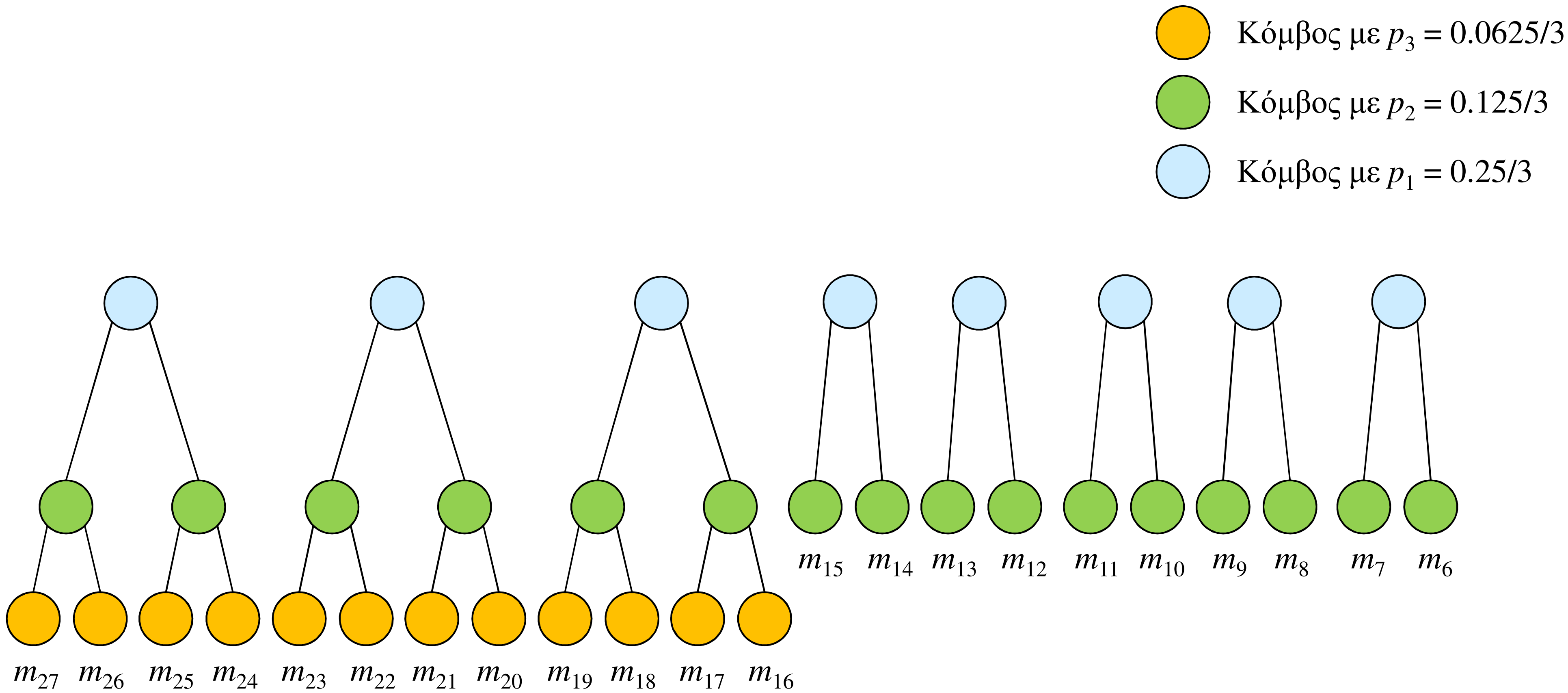
Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

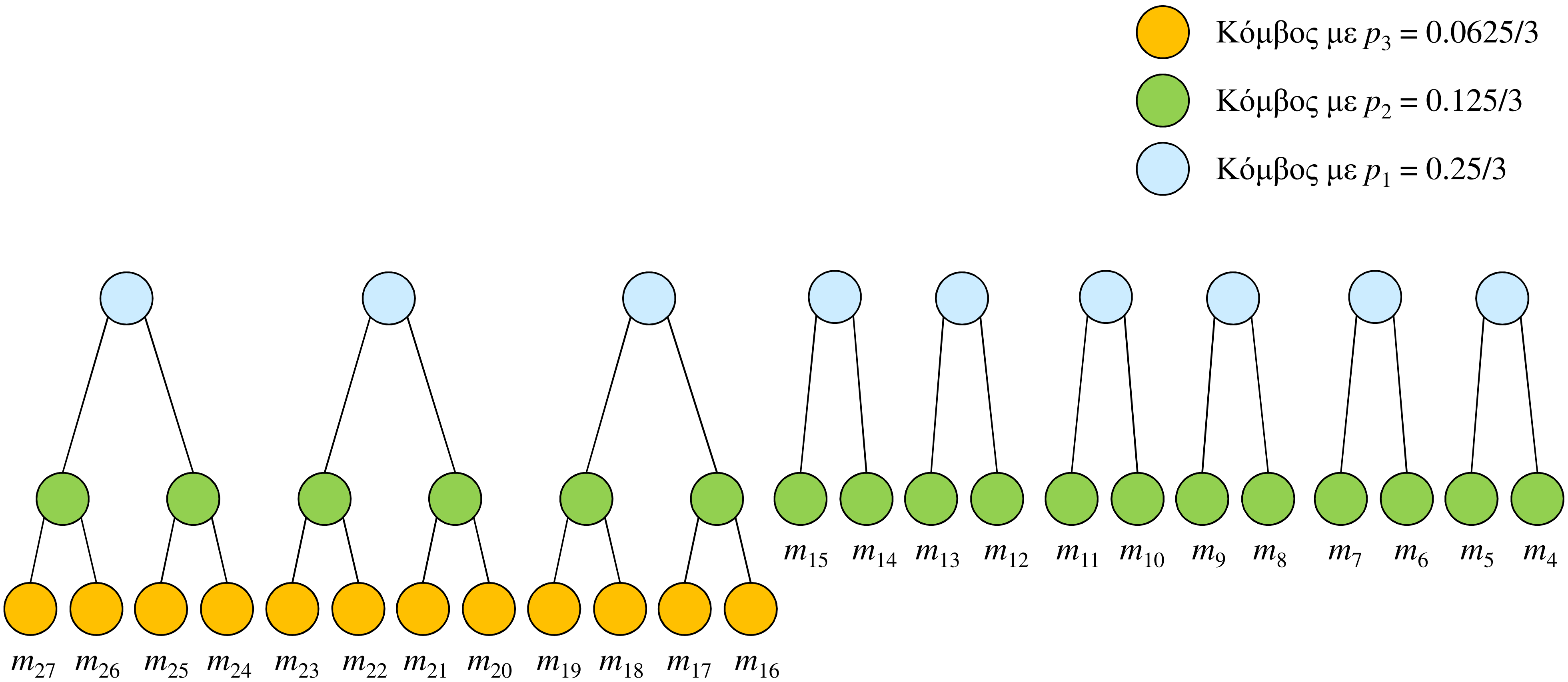
Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

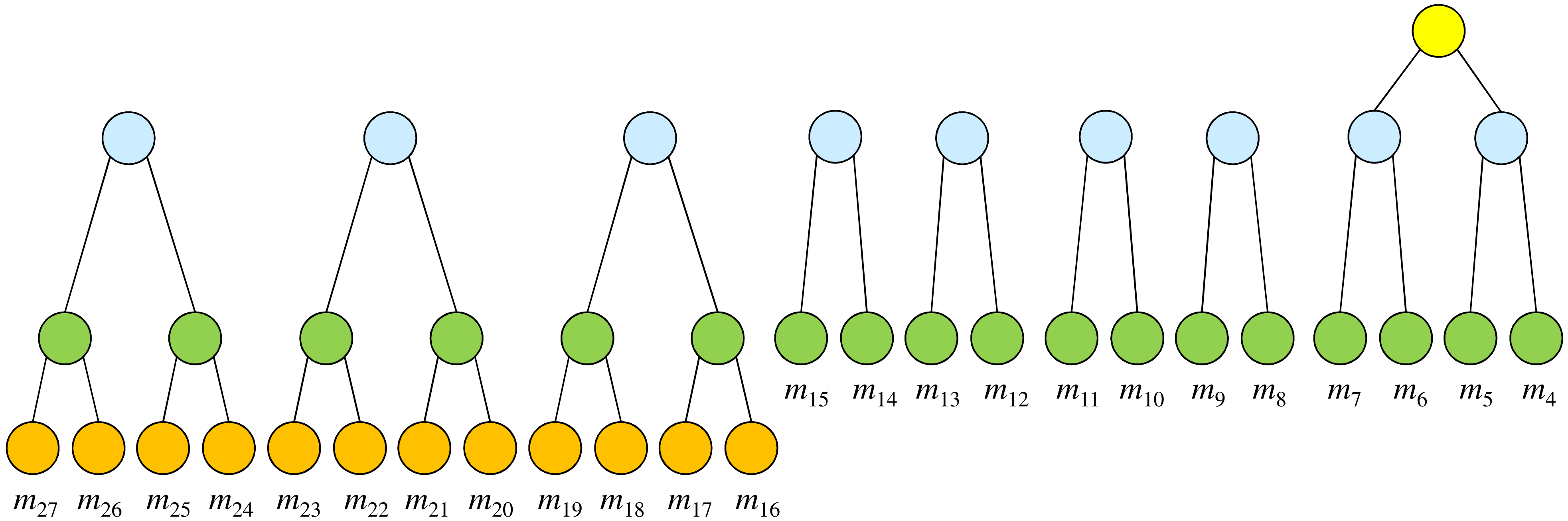


Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_4 = 0.5/3$

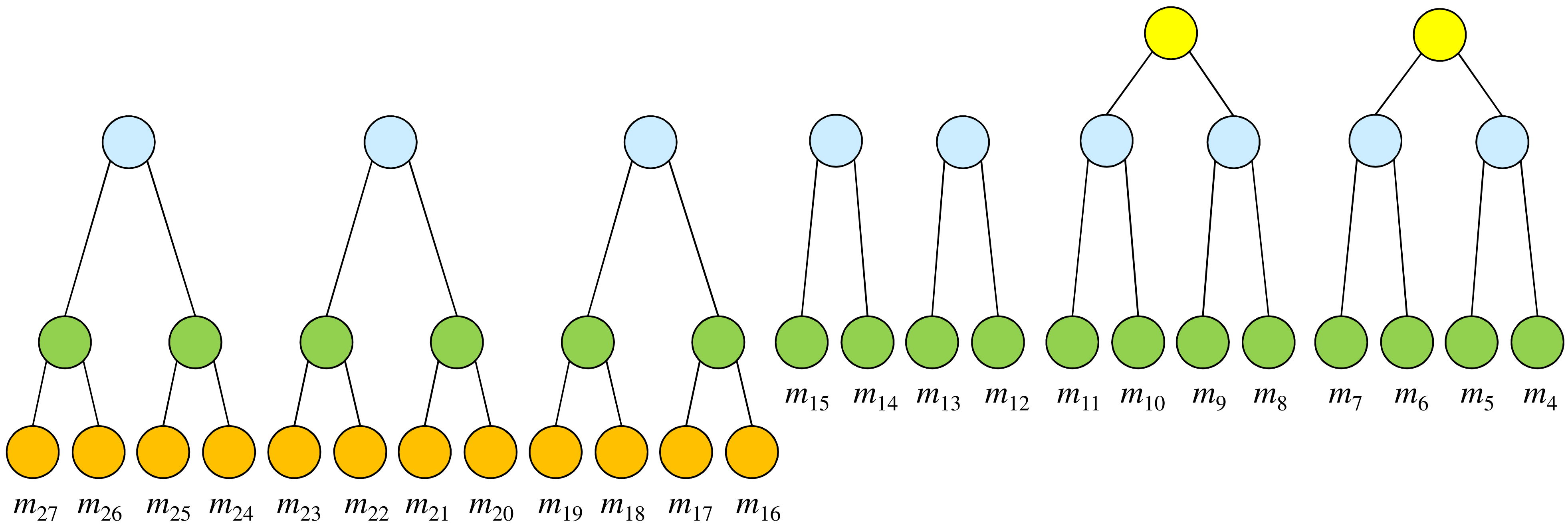


Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

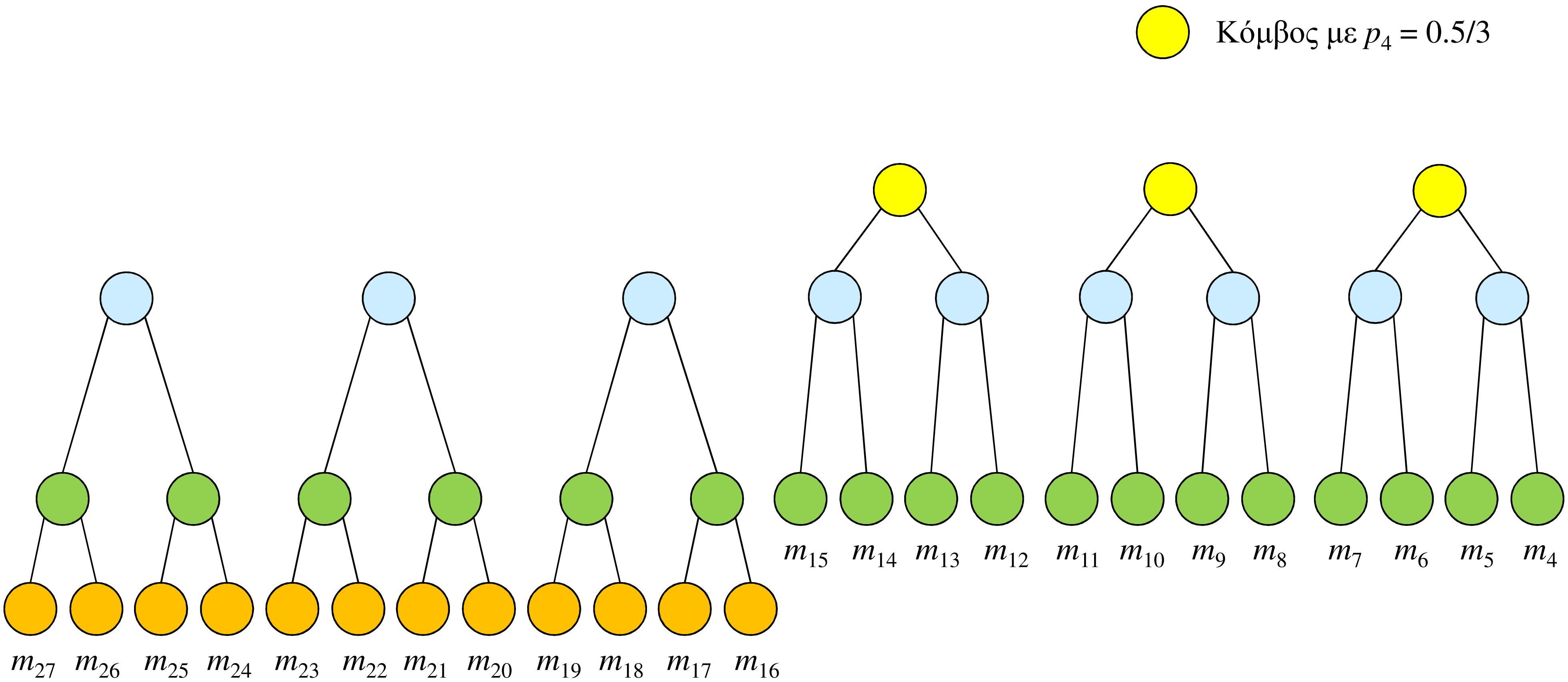
Κόμβος με $p_4 = 0.5/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

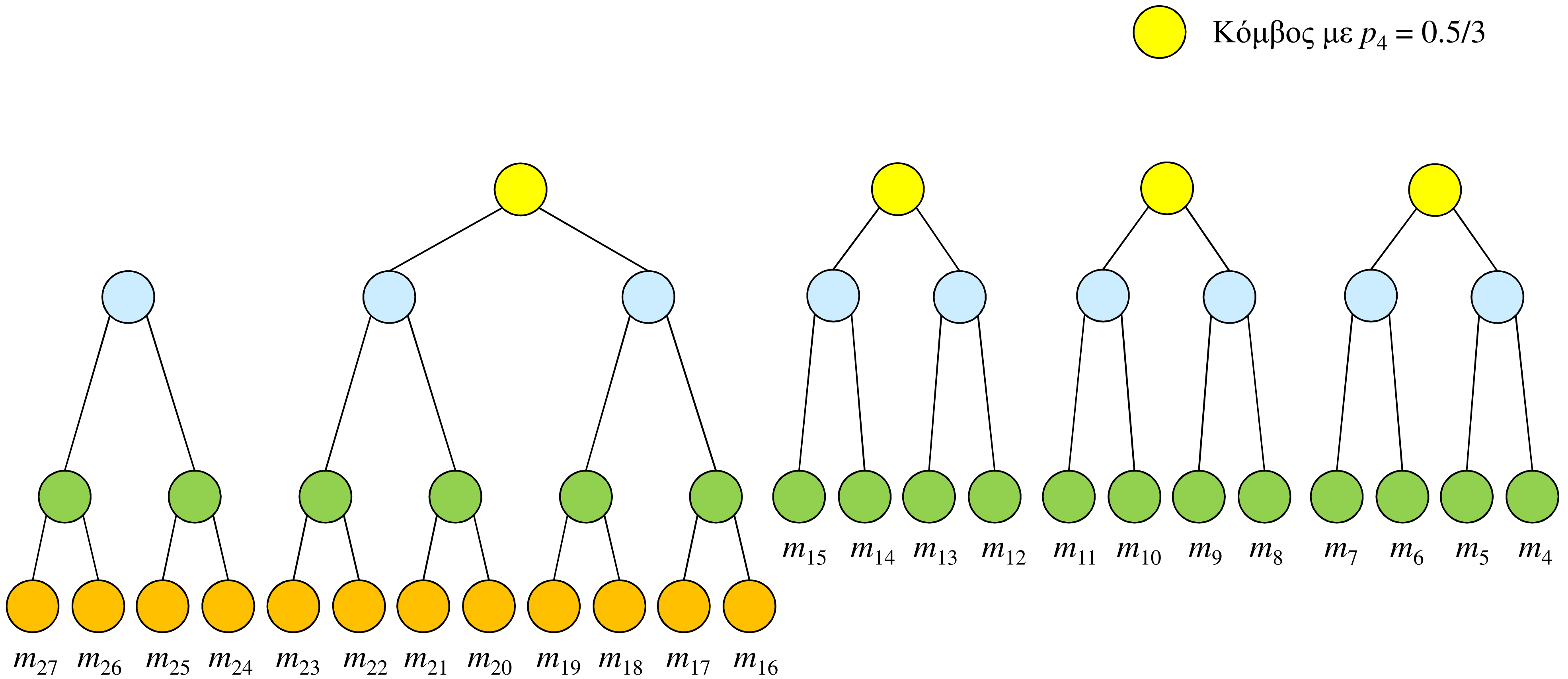
Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

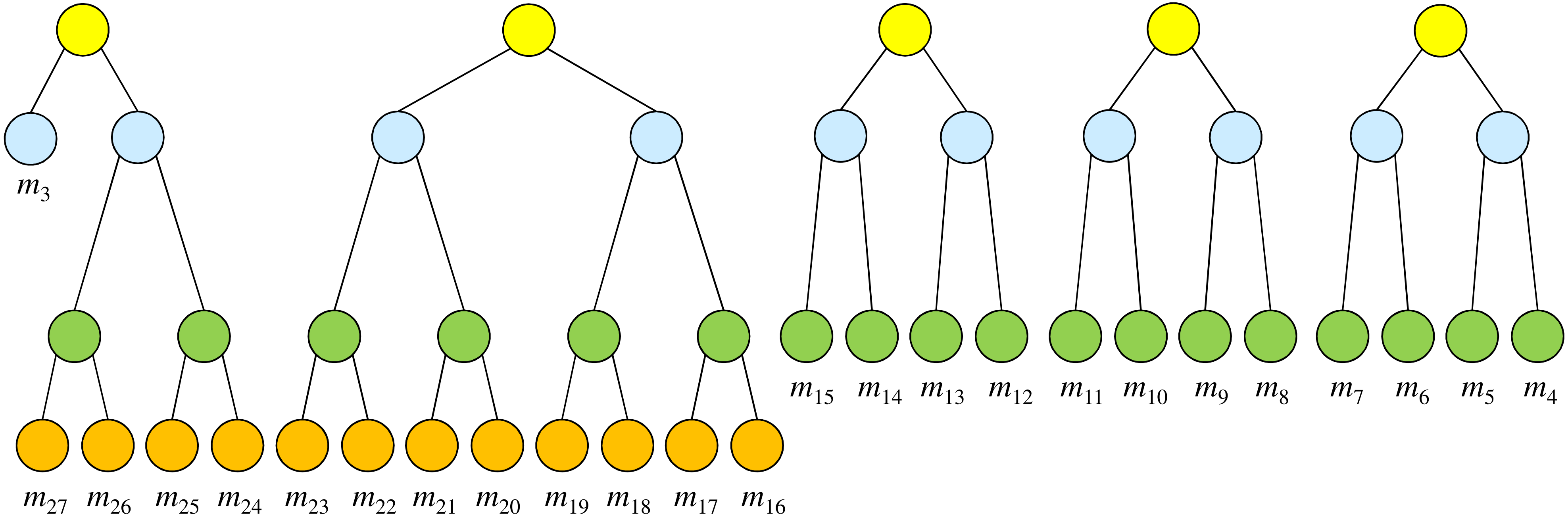


Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_4 = 0.5/3$

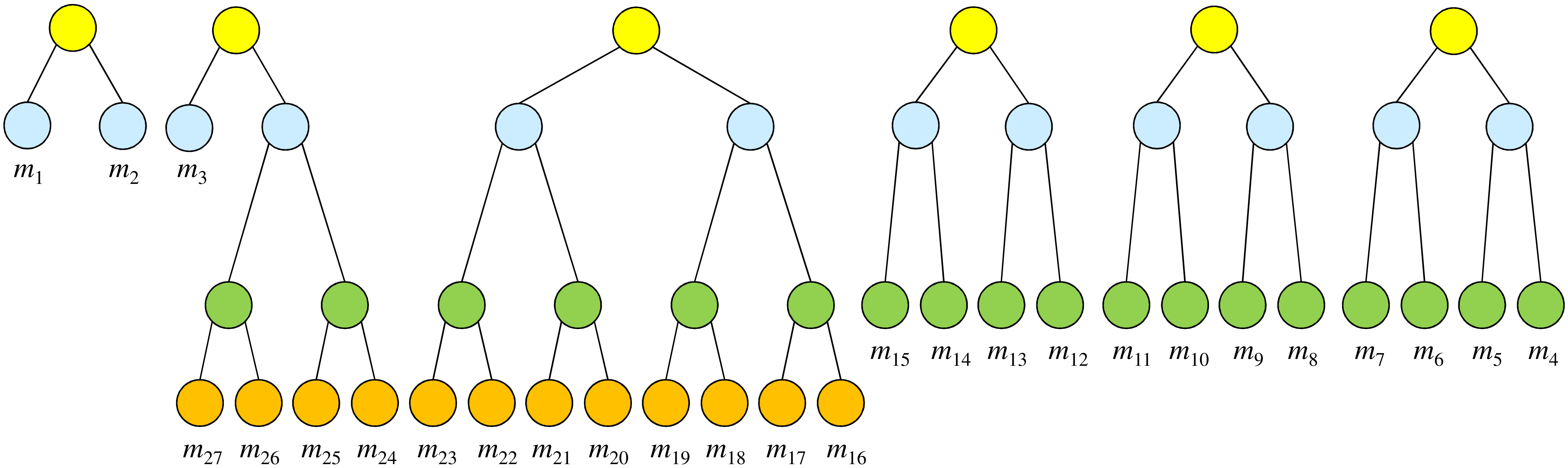


Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):

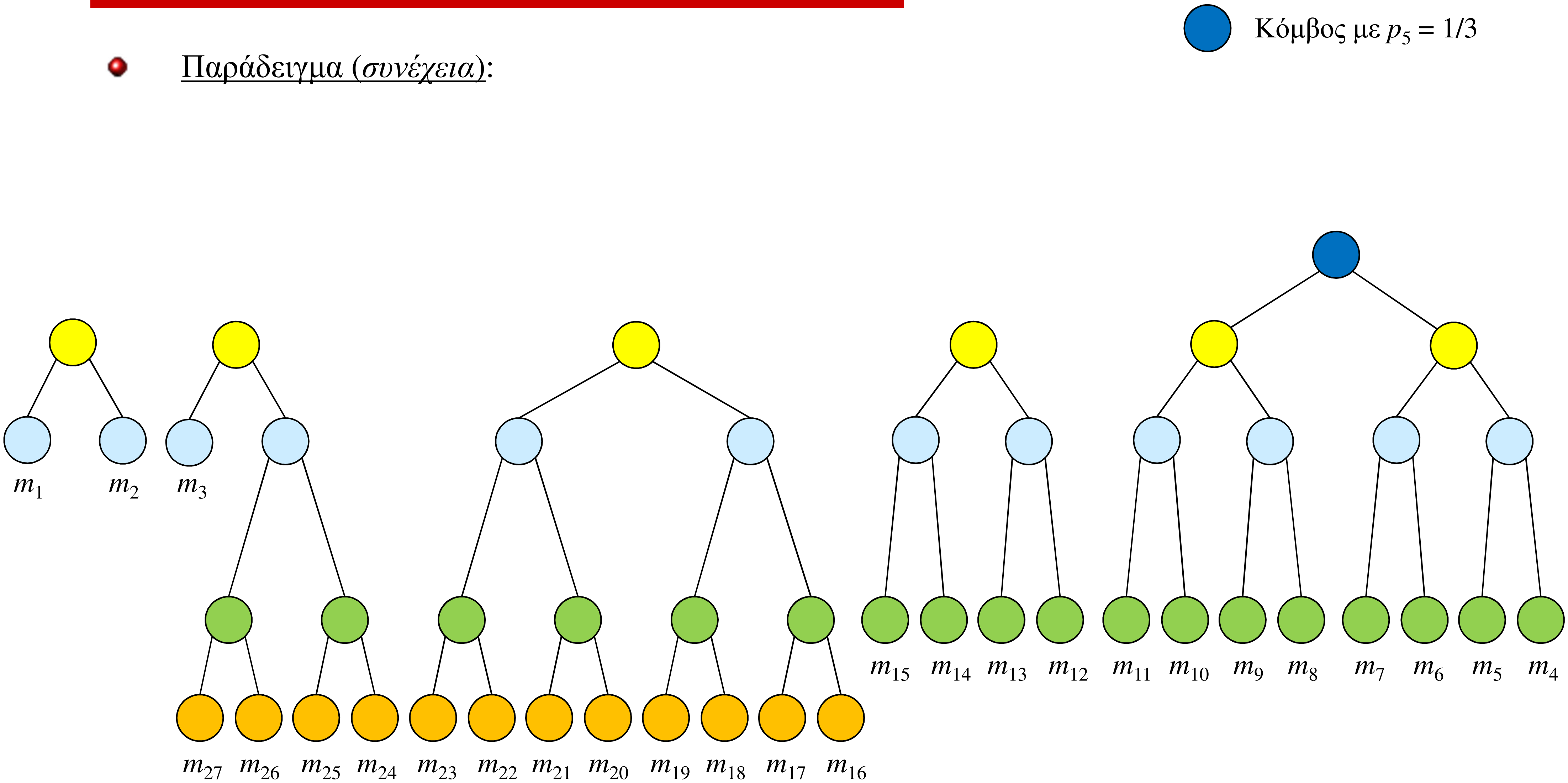
Υπερσύμβολα:	m_1 έως m_3	m_4 έως m_{15}	m_{16} έως m_{27}
Πιθανότητες:	$p_1 = 0.25/3$	$p_2 = 0.125/3$	$p_3 = 0.0625/3$

Κόμβος με $p_4 = 0.5/3$



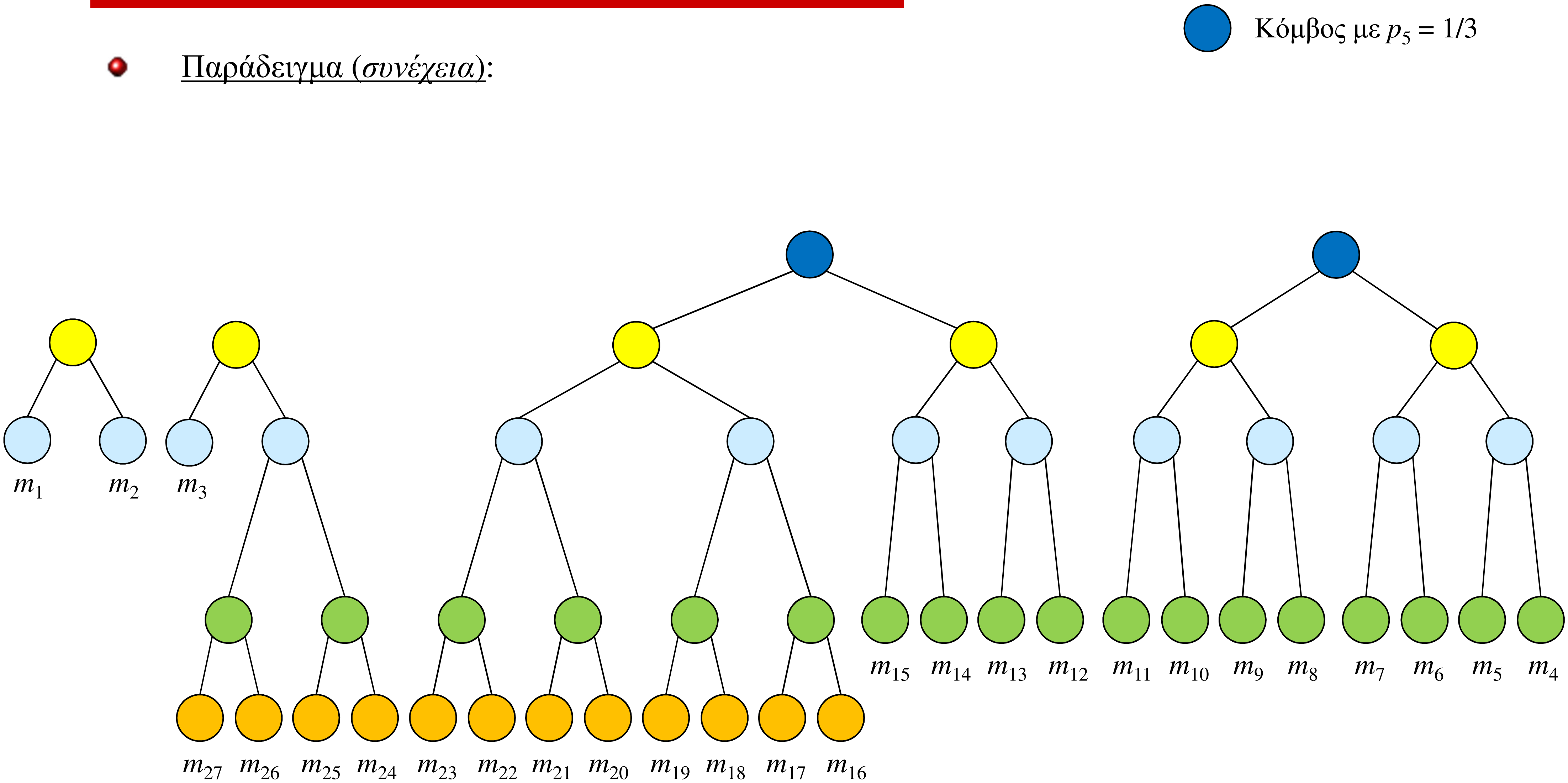
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:



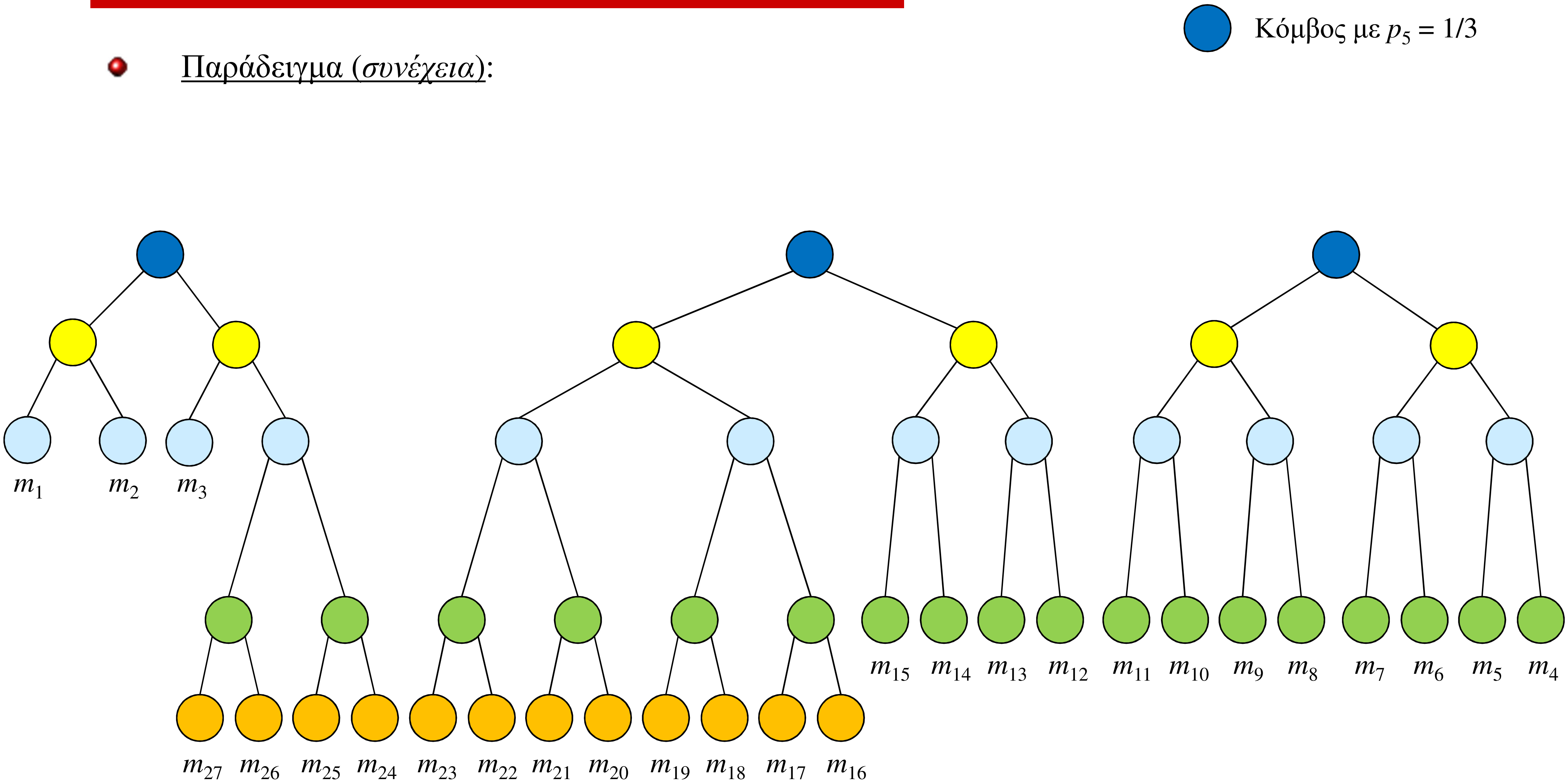
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:



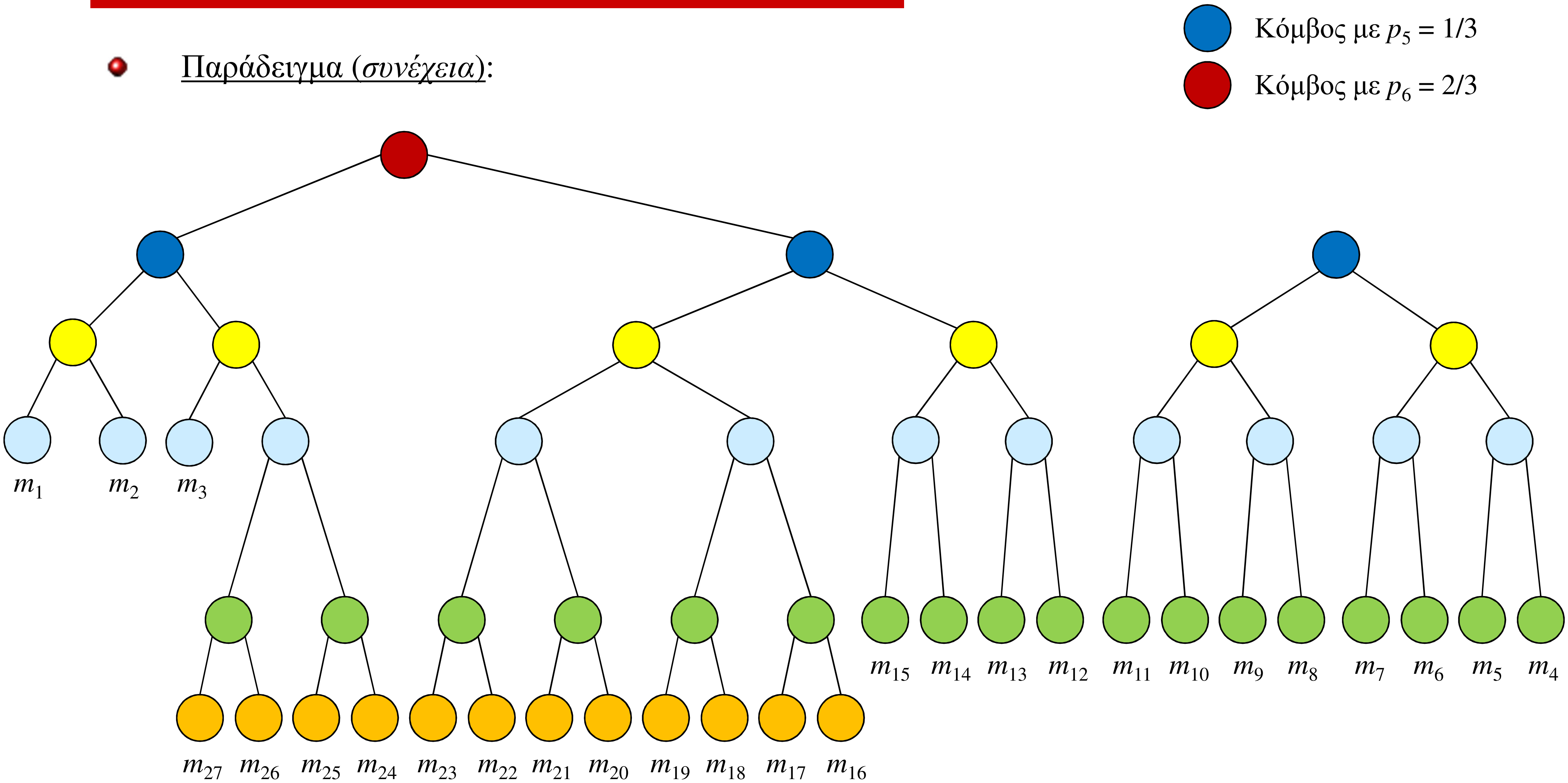
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:



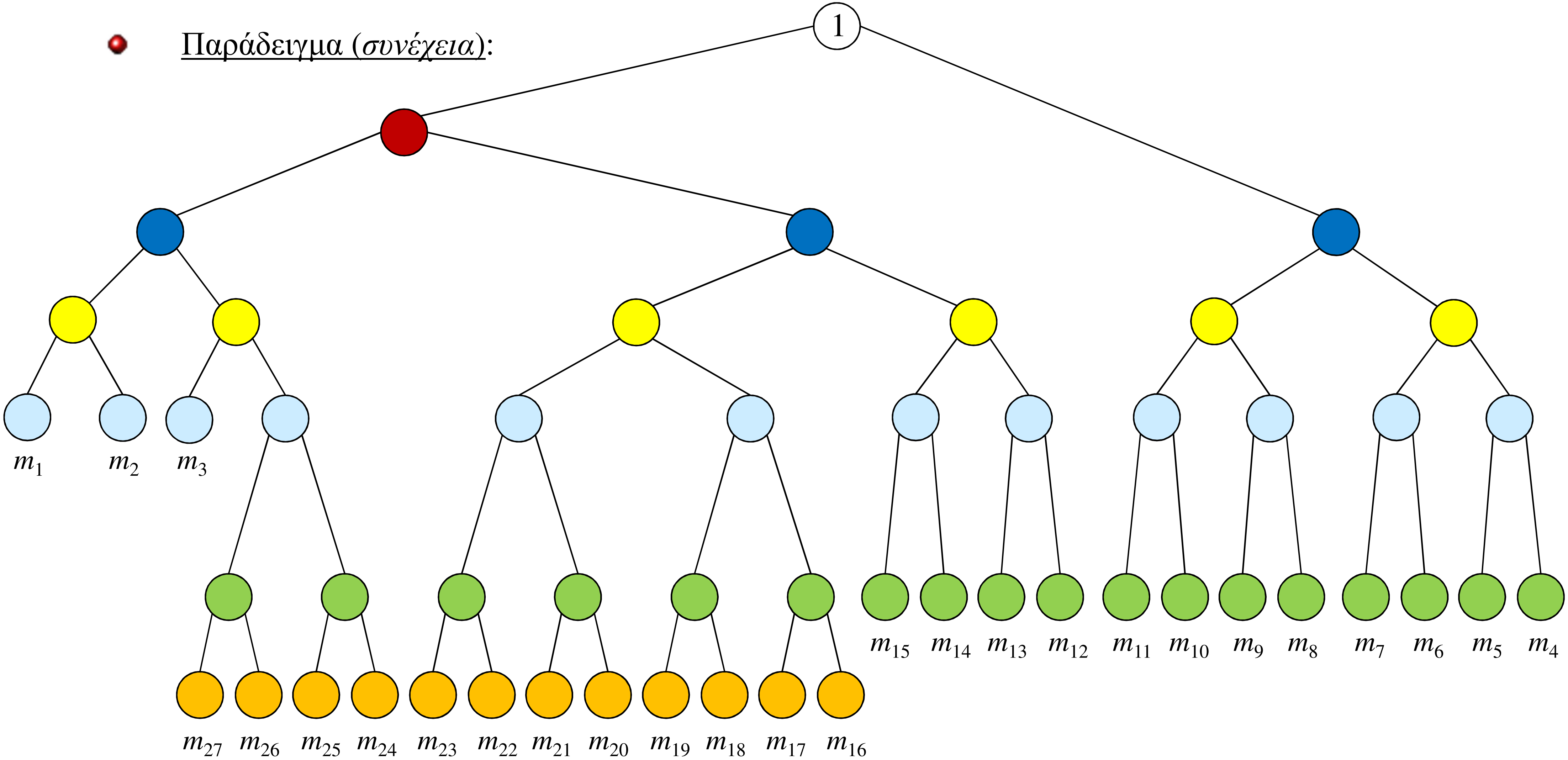
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:



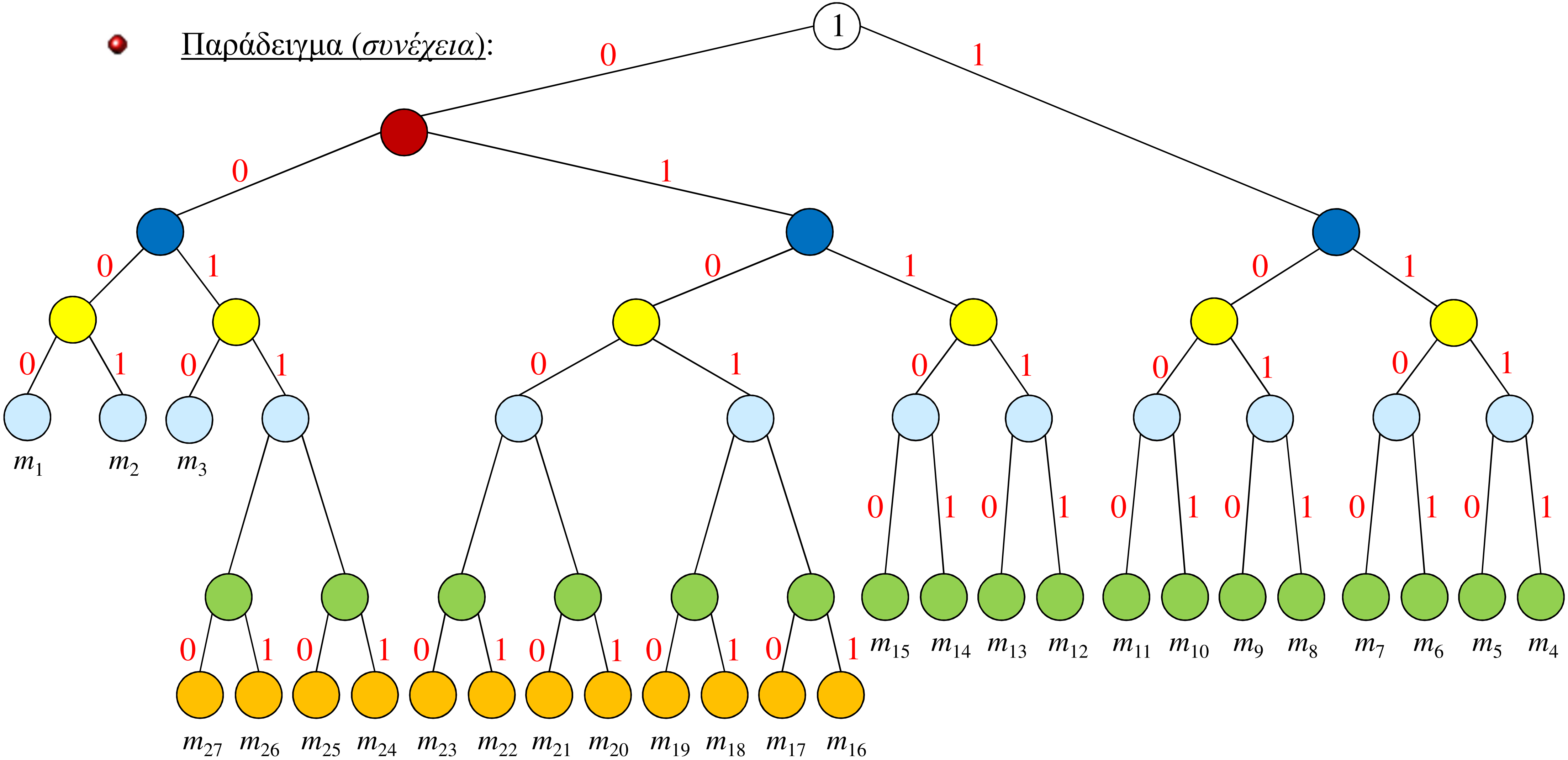
Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>:



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*):



Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- <u>Παράδειγμα (*συνέχεια*)</u>: Για $N = 3$, το μέσο μήκος των κωδικολέξεων ανά σύμβολο του κώδικά Huffman είναι

$$\overline{L}_3 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{27} P_i\,\ell_i =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3 \times \frac{0.25}{3} \times 4 + 8 \times \frac{0.125}{3} \times 4 + 4 \times \frac{0.125}{3} \times 5 + 12 \times \frac{0.0625}{3} \times 6\right) = 1.556\,\text{bit}$$

- Δηλαδή

$$G_3 = 1.528\ \text{bit} \le \overline{L}_3 = 1.556\ \text{bit} < G_3 + \frac{1}{3} = 1.862\ \text{bit}$$

	Μήκος: $N = 3$ **Πλήθος**: $A_3 = 27$		
l_i		**Μήνυμα**	**Πιθανότητα**
4	m_1	ΑΑΑ	0.25 / 3
4	m_4	ΑΑΒ	0.125 / 3
4	m_5	ΑΑΓ	0.125 / 3
6	m_{16}	ΑΒΑ	0.0625 / 3
4	m_6	ΑΒΒ	0.125 / 3
6	m_{17}	ΑΒΓ	0.0625 / 3
6	m_{18}	ΑΓΑ	0.0625 / 3
6	m_{19}	ΑΓΒ	0.0625 / 3
4	m_7	ΑΓΓ	0.125 / 3
4	m_8	ΒΑΑ	0.125 / 3
6	m_{20}	ΒΑΒ	0.0625 / 3
6	m_{21}	ΒΑΓ	0.0625 / 3
4	m_9	ΒΒΑ	0.125 / 3
4	m_2	ΒΒΒ	0.25 / 3
4	m_{10}	ΒΒΓ	0.125 / 3
6	m_{22}	ΒΓΑ	0.0625 / 3
6	m_{23}	ΒΓΒ	0.0625 / 3
4	m_{11}	ΒΓΓ	0.125 / 3
5	m_{12}	ΓΑΑ	0.125 / 3
6	m_{24}	ΓΑΒ	0.0625 / 3
6	m_{25}	ΓΑΓ	0.0625 / 3
6	m_{26}	ΓΒΑ	0.0625 / 3
5	m_{13}	ΓΒΒ	0.125 / 3
6	m_{27}	ΓΒΓ	0.0625 / 3
5	m_{14}	ΓΓΑ	0.125 / 3
5	m_{15}	ΓΓΒ	0.125 / 3
4	m_3	ΓΓΓ	0.25 / 3

Κωδικοποίηση Διακριτής Πηγής με Μνήμη

- Παράδειγμα (*συνέχεια*): Συγκεντρώνοντας όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε:
  - Εντροπία πηγής Markov: $H(\mathscr{L}) = 1.5$ bit
  - Μέση ποσότητα πληροφορίας και μέσο μήκος κωδικολέξεων ανά σύμβολο

	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
G_N (bit/σύμβολο):	1.585 bit	1.543 bit	1.528 bit
$\bar{L}_N$ (bit/σύμβολο):	1.667 bit	1.583 bit	1.556 bit
Απόδοση η_N:	90.0 %	94.7 %	96.4 %

- Όντως, βελτιώθηκε το μέσο μήκος κωδικολέξεων ανά σύμβολο και η απόδοση του κώδικα