Η επιτάχυνση υλικού σημείου το οποίο κινείται στον άξονα x ορίζεται από την εξίσωση: $a = 2x$ (S.I). Δίνεται ότι για $t = 0$ είναι $x_0 = 0$ και $\upsilon_0 = 4$ m/s. Να βρείτε: α) Την ταχύτητα του υλικού σημείου σε συνάρτηση με το x και β) Τη θέση του υλικού σημείου σε συνάρτηση με το χρόνο t.

Λύση

α) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης και τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \text{ ή } a = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \text{ ή } a = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} \text{ ή } \int_4^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = \int_0^x 2x dx \text{ ή } \frac{1}{2}\upsilon^2 - 8 = x^2 \text{ ή } \upsilon^2 = 2x^2 + 16 \text{ (S.I)}$$

β) Όμοια για την ταχύτητα έχουμε: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$ ή $dt = \dfrac{dx}{\upsilon}$ ή $\displaystyle\int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x^2+16}}$ ή $\displaystyle t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x^2+16}}$.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θέτουμε:

$\sqrt{2x^2+16} = \omega - \sqrt{2}x$ οπότε $2x^2 + 16 = \omega^2 - 2\sqrt{2}\omega x + 2x^2$ ή $x = \dfrac{\omega^2 - 16}{2\sqrt{2}\omega}$ και $dx = \dfrac{(\omega^2+16)d\omega}{2\sqrt{2}\omega^2}$.

Για $x = 0$ είναι $\omega = 4$ m. Συνεπώς: $\displaystyle t = \int_4^{\omega} \frac{\frac{\omega^2+16}{2\sqrt{2}\omega^2}}{\omega - \sqrt{2}\frac{(\omega^2-16)}{2\sqrt{2}\omega}} = \int_4^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}$ ή $t = \ln\omega - \ln 4$ ή $t = \ln\omega - 2\ln 2$ ή

$t = \ln\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+16}\right) - 2\ln 2$ (S.I).

Σώμα κινείται ευθύγραμμα εκτελώντας επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση $a = -k\sqrt{\upsilon}$ όπου k θετική σταθερά και $\upsilon > 0$ το μέτρο της ταχύτητάς του. Αν είναι γνωστό ότι για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ να υπολογιστούν: α) το μέτρο της ταχύτητας υ σαν συνάρτηση του χρόνου, β) το μέτρο της ταχύτητας υ σαν συνάρτηση του διαστήματος που διανύει το σώμα, γ) το διάστημα x που διανύει το σώμα σαν συνάρτηση του χρόνου και δ) ο ολικός χρόνος $t_{ολ}$ που απαιτείται για να σταματήσει το σώμα καθώς και το ολικό διάστημα που θα έχει διανύσει.

Λύση

α) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $\dfrac{d\upsilon}{dt} = -k\sqrt{\upsilon}$ ή $\displaystyle\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = -k\int_0^t dt$ ή

$2\sqrt{\upsilon}\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -kt\Big|_0^t$ ή $2\left(\sqrt{\upsilon} - \sqrt{\upsilon_0}\right) = -kt$ ή $\sqrt{\upsilon} = \sqrt{\upsilon_0} - \dfrac{k}{2}t$ απ' όπου τελικά παίρνουμε:

$$\upsilon(t) = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 \qquad (1)$$

β) Επειδή $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ ή $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\upsilon$ η επιτάχυνση γράφεται: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}\upsilon$ ή $-k\sqrt{\upsilon} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\upsilon$ ή $\dfrac{\upsilon}{\sqrt{\upsilon}}d\upsilon = -kdx$

ή $\displaystyle\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\sqrt{\upsilon}d\upsilon = -k\int_0^x dx$ ή $\dfrac{2}{3}\sqrt{\upsilon_0^3}\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -kx\Big|_0^x$ ή $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{\upsilon^3} - \sqrt{\upsilon_0^3}\right) = -kx$ ή $\sqrt{\upsilon^3} = \sqrt{\upsilon_0^3} = -\dfrac{3}{2}kx$

απ' όπου τελικά παίρνουμε: $$\upsilon(x) = \left(\upsilon_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}kx\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (2)$$

γ) Από τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε: $\upsilon(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Η σχέση αυτή με βάση την (1) γίνεται:

$\left(\sqrt{\upsilon_0} - \dfrac{k}{2}t\right)^2 = \dfrac{dx}{dt}$ ή $dx = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \dfrac{k}{2}t\right)^2 dt$ ή $\displaystyle\int_0^x dx = \int_0^t\left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{k}{2}t\right)^2 dt$ ή $\displaystyle x\Big|_0^x = \int_0^t\left(\upsilon_0 + \frac{k^2}{4}t^2 - k\sqrt{\upsilon_0}t\right)dt$

απ' όπου τελικά περνούμε: $x(t) = \dfrac{k^2}{12}t^3 - \dfrac{k}{2}\sqrt{\upsilon_0}t^2 + \upsilon_0 t$

δ) Ο ολικός χρόνος $t_{ολ}$ έως ότου το σώμα σταματήσει, βρίσκεται από την (1) όταν $\upsilon(t) = 0$.

Έτσι: $\upsilon(t) = 0$ ή $\left(\sqrt{\upsilon_0} - \dfrac{k}{2}t_{ολ}\right)^2 = 0$ ή $t_{ολ} = \dfrac{2}{k}\sqrt{\upsilon_0}$.

Το ολικό διάστημα $x_{ολ}$ που διανύει το σώμα έως ότου σταματήσει βρίσκεται από την (2) όταν $\upsilon(x) = 0$.

Έτσι: $\upsilon(x) = 0$ ή $\left(\upsilon_0^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}kx_{ολ}\right)^{\frac{2}{3}} = 0$ απ' όπου τελικά περνούμε: $x_{ολ} = \dfrac{2}{3k}\upsilon_0^{\frac{3}{2}}$.

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = 32 - 4\upsilon$ (S.I) όπου υ η ταχύτητά του. Αν είναι γνωστό ότι για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ με μέτρο ταχύτητας $\upsilon_0 = 4$ m/s να υπολογισθούν: α) η ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και β) το διανυόμενο διάστημα x σαν συνάρτηση i) του χρόνου και ii) της ταχύτητας.

Λύση

α) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $32 - 4\upsilon = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $\displaystyle\int_4^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{32-4\upsilon} = \int_0^t dt$ ή

$-\dfrac{1}{4}\ln(32-4\upsilon)\Big|_4^{\upsilon} = t\Big|_0^t$ ή $-\dfrac{1}{4}\left[\ln(32-4\upsilon) - \ln(32-4\cdot 4)\right] = t$ ή $\ln\dfrac{32-4\upsilon}{16} = -t$ ή $\ln\dfrac{32-4\upsilon}{16} = e^{-4t}$

απ' όπου τελικά παίρνουμε: $\upsilon(t) = 8 - 4e^{-4t}$ (1)

β) Από τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$

Αυτή με βάση την (1) δίνει: $8 - 4e^{-4t} = \dfrac{dx}{dt}$ ή $\displaystyle\int_0^x dx = \int_0^t \left(8 - 4e^{-4t}\right)dt$ ή $\displaystyle x(t) = \int_0^t 8dt - 4\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^t e^{-4t}d(4t)$ ή

$x(t) = 8t\Big|_0^t + 1\cdot e^{-4t}\Big|_0^t$ ή $x(t) = 8t + e^{-4t} - 1$.

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $a = \dfrac{d\upsilon}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ ή $a = \dfrac{d\upsilon}{dx}\upsilon$ ή $32 - 4\upsilon = \dfrac{d\upsilon}{dx}\upsilon$ ή

$dx = \dfrac{\upsilon d\upsilon}{32-4\upsilon}$ ή $\displaystyle\int_0^x dx = \int_4^{\upsilon} \frac{\upsilon d\upsilon}{32-4\upsilon}$ απ' όπου τελικά παίρνουμε: $x(\upsilon) = 1 - \dfrac{\upsilon}{4} - 2\ln\dfrac{8-\upsilon}{4}$.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται ως εξής:

$$\int \frac{\upsilon d\upsilon}{32-4\upsilon} = -\frac{1}{4}\int \frac{-4\upsilon d\upsilon}{32-4\upsilon} = -\frac{1}{4}\int \frac{32-4\upsilon-32}{32-4\upsilon}d\upsilon = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{32-4\upsilon}{32-4\upsilon} - \frac{32}{32-4\upsilon}\right)d\upsilon =$$

$$-\frac{1}{4}\int\left(1 - \frac{32}{32-4\upsilon}\right)d\upsilon = \int\left(-\frac{1}{4}d\upsilon + \frac{8}{32-4\upsilon}d\upsilon\right) = -\frac{1}{4}\int d\upsilon + 8\int\frac{d\upsilon}{32-4\upsilon}$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\displaystyle\int\frac{d\upsilon}{32-4\upsilon}$ γίνεται θέτοντας $32 - 4\upsilon = \omega$ ή $-4d\upsilon = d\omega$ απ' όπου

$d\upsilon = -\dfrac{1}{4}d\omega$. Έτσι: $\displaystyle\int\frac{d\upsilon}{32-4\upsilon} = -\frac{1}{4}\int\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{4}\ln\omega = -\frac{1}{4}\ln(32-4\upsilon)$.

Η τροχιά υλικού σημείου καθορίζεται από τη σχέση $\vec{r}(t) = (at^2 + bt)\vec{i} + (ct + d)\vec{j}$ όπου a, b, c, d σταθερές που έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις. Να βρείτε: α) Τη μετατόπιση του υλικού σημείου μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 1$ s και $t_2 = 3$ s και β) Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.

Λύση

α) Η μετατόπιση του κινητού είναι $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ όπου:

$$\vec{r}(t_2) = (9\alpha + 3b)\vec{i} + (3c + d)\vec{j}$$
$$\vec{r}(t_1) = (\alpha + b)\vec{i} + (c + d)\vec{j}$$

Συνεπώς $\Delta\vec{r} = (8\alpha + 2b)\vec{i} + 2c\vec{j}$.

β) Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του υλικού σημείου κάθε στιγμή υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\vec{\upsilon}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Συνεπώς: $\vec{\upsilon}(t) = (2\alpha t + b)\vec{i} + c\vec{j}$ και $\vec{\alpha}(t) = 2\alpha\vec{i}$ ανεξάρτητη του χρόνου.

Για $t = 2$ s βρίσκουμε $\upsilon = 4\alpha\vec{i}$ και $\vec{\alpha} = 2\alpha\vec{i}$.

Υλικό σημείο κινείται με επιτάχυνση $\vec{\alpha} = 2e^{-t}i + 4\cos t\cdot j$ (S.I). Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στο σημείο (1, –2) (m) και κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ (S.I). Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) την ταχύτητα του υλικού σημείου β) τη μετατόπιση του υλικού σημείου.

Λύση

Είναι $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ ή $d\vec{\upsilon} = \vec{a}\cdot dt$ ή $\displaystyle\int d\vec{\upsilon} = \vec{i}\cdot 2\int e^{-t}dt + j\ 4\int \cos t dt$ ή $\upsilon = -2e^{-t}\vec{i} + 4\sin t\,\vec{j} + \vec{c}_1$.

Για $t=0$ είναι $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0$ ή $2\vec{i}-4\vec{j}=-2\vec{i}+\vec{c}_1$ ή $\vec{c}_1=4\vec{i}-4\vec{j}$ ή

$$\vec{\upsilon}=\left(4-2e^{-t}\right)\vec{i}+(4\sin t-4)\vec{j}\ \ (\text{S.I}) \qquad (1)$$

β) Από τη σχέση $\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ προκύπτει $d\vec{r}=\vec{\upsilon}\cdot dt$ ή λόγω της (1)

$$\int d\vec{r}=\vec{i}\left(4\int dt-2\int e^{-t}dt\right)+\vec{j}\left(4\int \sin\cdot dt-4\int dt\right) \text{ ή } \vec{r}=\left(4t+2e^{-t}\right)\vec{i}-(4\cos t+4)\,\vec{j}+c_2$$

Για $t_0=0$ είναι $\qquad \vec{r}=\vec{r}_0=\vec{i}-2\vec{j} \qquad (2)$

$\vec{i}-2\vec{j}=2\vec{i}-8\vec{j}+\vec{c}_2$ ή $\vec{c}_2=-\vec{i}+6\vec{j}$ ή

$$\vec{r}=\left(4t+2e^{-t}-1\right)\vec{i}+(2-4\cos t)\vec{j} \qquad (3)$$

Η μετατόπιση του υλικού σημείου είναι $\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0$ και λόγω των (2), (3):

$$\Delta\vec{r}=\left(4t+2e^{-t}-2\right)\vec{i}+(4-4\cos t)\vec{j}$$

Το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου καθορίζεται από την εξίσωση $\vec{r}=\alpha\cos\omega t\,\vec{i}+\alpha\sin\omega t\,\vec{j}$. α) Να δείξετε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης του υλικού σημείου είναι σταθερό. β) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς του υλικού σημείου;

Λύση

α) Έχουμε: $\qquad \vec{\upsilon}=\dot{\vec{r}}=-\omega\alpha\cdot\sin\omega t\,\vec{i}+\omega\alpha\cdot\cos\omega t\,\vec{j} \qquad (1)$

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι $\vec{a}=\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\ddot{\vec{r}}$

Συνεπώς από (1) προκύπτει: $\qquad \vec{a}=\ddot{\vec{r}}=\omega^2\alpha\cdot\cos\omega t\,\vec{i}-\omega^2\alpha\cdot\sin\omega t\,\vec{j}$.

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι: $a=\omega^2\alpha=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$

β) Από την εξίσωση $\vec{r}=\alpha\cos\omega t\,\vec{i}+\alpha\sin\omega t\,\vec{j}$ έχουμε: $x=\alpha\cdot\cos\omega t$, $y=\alpha\cdot\sin\omega t$.

Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει ότι: $x^2+y^2=\alpha^2$

Η τροχιά του υλικού σημείου είναι κύκλος ακτίνας α.

Κινητό κινείται στο επίπεδο xy με διάνυσμα θέσης $\vec{r}=\alpha t\,\vec{i}-bt^3\,\vec{j}$, όπου α και b σταθερές. Να υπολογισθούν: α) η εξίσωση της τροχιάς, β) η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και η επιταχυνση $\vec{a}$ συναρτήσει του χρόνου, καθώς και τα μέτρα τους και γ) η χρονική εξάρτηση της γωνίας φ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$.

Λύση

α) Οι συντεταγμένες της θέσης του κινητού είναι: $x=\alpha t$ και $y=-bt^3$. Με απαλοιφή του χρόνου παίρνουμε την εξίσωση τροχιάς: $y=-\dfrac{b}{\alpha^3}x^3$ που παριστάνει υπερβολή.

β) Από τους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης παίρνουμε:

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j} \text{ ή } \vec{\upsilon}=\alpha\vec{i}-3bt^2\vec{j} \text{ με μέτρο } \upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2} \text{ ή } \upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+9bt^4}.$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i}+\frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} \text{ ή } a=-6bt\,\vec{j} \text{ με μέτρο } a=\sqrt{a_x^2+a_y{}^2} \text{ ή } a=\sqrt{(-6bt)^2} \text{ ή } a=6bt.$$

γ) Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$ έχουμε:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}=\upsilon a\cos\varphi \text{ ή } \cos\varphi=\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}}{\upsilon a} \text{ ή } \cos\varphi=\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}}{6bt\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}} \qquad (1)$$

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}=(\alpha\,\vec{i}-3bt^2\vec{j})\cdot(-6bt\,\vec{j}) \text{ ή } \vec{\upsilon}\cdot\vec{a}=\alpha\cdot 0+(-3bt^2)(-6bt) \text{ ή } \vec{\upsilon}\cdot\vec{a}=18b^2+3 \qquad (2)$$

Από (1), (2) παίρνουμε: $\cos\varphi=\dfrac{18b^2+3}{6bt\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}}$ ή $\cos\varphi=\dfrac{3bt^2}{\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}}$ ή $\varphi(t)=\cos^{-1}\left(\dfrac{3bt^2}{\sqrt{\alpha^2+9b^2t^4}}\right)$.

Στην προέκταση της κάνης πυροβόλου βρίσκεται ακίνητος στόχος που αφήνεται (χωρίς αρχική ταχύτητα) να πέσει ελεύθερα τη στιγμή που εξέρχεται το βλήμα από το πυροβόλο. Να δειχθεί ότι το βλήμα θα συναντήσει το στόχο κατά την πτώση του ανεξάρτητα από τη γωνία βολής, την αρχική ταχύτητα υ_0 του βλήματος, το ύψος του στόχου και της απόστασης πυροβόλου στόχου. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και το g σταθερό.

Λύση

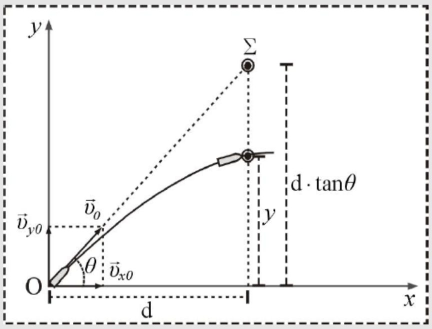
i) Για να δείξουμε ότι το βλήμα θα κτυπήσει το στόχο πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία το βλήμα και ο στόχος έχουν ίδιες συντεταγμένες.
Έστω (x_Σ, y_Σ) και (x_β, y_β) οι συντεταγμένες του στόχου και του βλήματος αντίστοιχα (Σχήμα 2.23).
ii) Για το στόχο έχουμε $x_\Sigma = d$ κάθε στιγμή ενώ για το βλήμα $x_\beta = \upsilon_0\cos\theta \cdot t$. Όταν συμβαίνει $x_\Sigma = x_\beta$ θα είναι

$$t_1 = \frac{d}{\upsilon_0\cos\theta} \qquad (1)$$

iii) Εξετάζουμε αν τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσες και οι συντεταγμένες y_Σ και y_β.

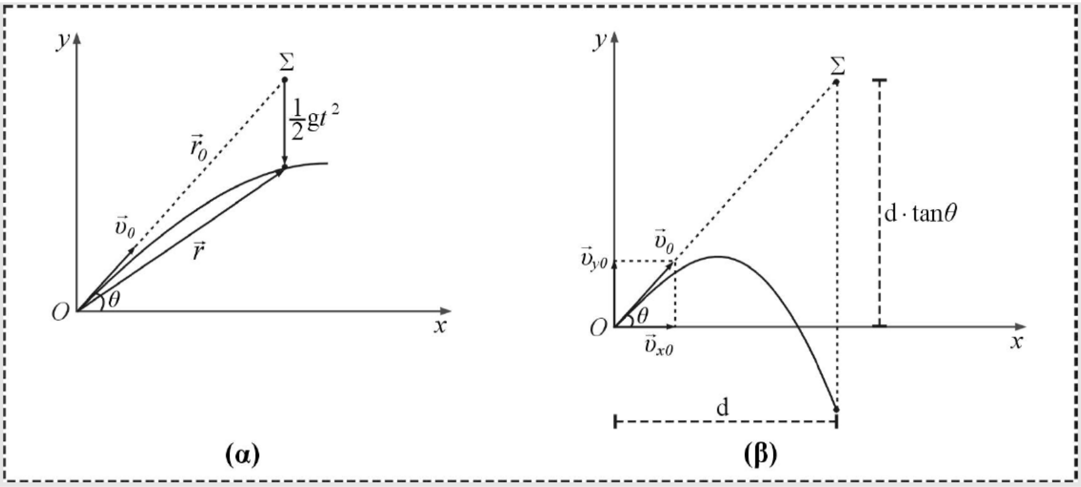
Έχουμε $$y_\Sigma = d\cdot\tan\theta - \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad (2)$$

$$y_\beta = \upsilon_0\sin\theta\cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad (3)$$



Σχήμα 2.23 *Τη στιγμή της συνάντησης το βλήμα και ο στόχος έχουν ίδιες συντεταγμένες.*

Από (1) και (3) προκύπτει: $y_\beta = \upsilon_0\sin\theta\cdot\frac{d}{\upsilon_0\cos\theta} - \frac{1}{2}gt_1^2$ ή $y_\beta = d\cdot\tan\theta - \frac{1}{2}gt_1^2 = y_\Sigma$



Συνεπώς το βλήμα πετυχαίνει το στόχο ανεξάρτητα από την τιμή της υ_0. Αν δεν υπήρχε η βαρύτητα ο στόχος θα έμενε ακίνητος και το βλήμα θα κινούνταν ευθύγραμμα και θα τον κτυπούσε. Εφόσον υπάρχει βαρύτητα τόσο ο στόχος όσο και το βλήμα πέφτουν κατά ίσες αποστάσεις $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ από τις θέσεις που θα είχαν αν $g = 0$ και το βλήμα πάλι πετυχαίνει το στόχο. Η συνάντηση βλήματος – στόχου γίνεται πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση βολής, αν συμβαίνει $d < \beta$ όπου β το βεληνεκές της βολής (Σχήμα 2.24β).
Αν είναι $d > \beta$ τότε η συνάντηση βλήματος – στόχου θα γίνει κάτω από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση βολής (Σχήμα 2.24α).

Σχόλιο: Η θέση του βλήματος κάθε στιγμή καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{r}_\beta = \vec{\upsilon}_0\cdot t + \frac{1}{2}gt^2$ ενώ η θέση του στόχου από το διάνυσμα $\vec{r}_\Sigma = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}gt^2$. Για να γίνει συνάντηση θα πρέπει $\vec{r}_\beta = \vec{r}_\Sigma$. Αυτό συμβαίνει τη στιγμή t_1 που βρίσκεται από τις προηγούμενες εξισώσεις.

Αποδείξτε ότι σε επίπεδη κίνηση με σταθερή διανυσματική επιτάχυνση ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
α) $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0\cdot\vec{\upsilon}_0+2\vec{a}\cdot(\vec{r}+\vec{r}_0)$, β) $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{\upsilon}_0\cdot t+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot t^2$ και γ) $\vec{r}=\vec{r}_0+\frac{1}{2}(\vec{\upsilon}_0+\vec{\upsilon})\cdot t$.

Λύση

Κατά την κίνηση υλικού σημείου στο επίπεδο Oxy με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$ οι συνιστώσες $\vec{a}_x$ και $\vec{a}_y$ είναι σταθερές. Έτσι έχουμε μια κίνηση που μπορεί να περιγραφεί σαν άθροισμα δυο κινήσεων που γίνονται ταυτόχρονα με σταθερή επιτάχυνση σε δυο διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση στο επίπεδο $x-y$	
x – Διεύθυνση	**y – Διεύθυνση**
1. $\upsilon_x=\upsilon_{x0}+a_x\cdot t$	1΄. $\upsilon_y=\upsilon_{y0}+a_y\cdot t$
2. $x=x_0+\upsilon_{x0}\cdot t+\frac{1}{2}a_x t^2$	2΄. $y=y_0+\upsilon_{y0}\cdot t+\frac{1}{2}a_y t^2$
3. $x=x_0+\frac{1}{2}(\upsilon_{x0}+\upsilon_x)t$	3΄. $y=y_0+\frac{1}{2}(\upsilon_{y0}+\upsilon_y)t$
4. $\upsilon_x^2=\upsilon_{x0}^2+2a_x(x-x_0)$	4΄. $\upsilon_y^2=\upsilon_{y0}^2+2a_y(y-y_0)$

Το υλικό σημείο θα κινείται πάνω στο επίπεδο, γενικά, σε καμπύλη τροχιά. Αυτό είναι δυνατό ακόμα και αν μια συνιστώσα της επιτάχυνσης, έστω η a_x είναι ίση με μηδέν γιατί τότε η αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας η υ_x, μπορεί να έχει μια σταθερή μη μηδενική τιμή. Παράδειγμα τέτοιας κίνησης είναι η κίνηση βλήματος το οποίο διαγράφει καμπύλη τροχιά σε κατακόρυφο επίπεδο αν αμελήσουμε την αντίσταση του αέρα και θεωρήσουμε την επιτάχυνση $\vec{g}$ σταθερή.
Στην επίπεδη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση ισχύουν οι εξισώσεις του παραπάνω πίνακα.
α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (4) και (4΄) και έχουμε:

$$\upsilon_x^2+\upsilon_y^2=(\upsilon_{x0}^2+\upsilon_{y0}^2)+2(a_x\cdot x+a_y\cdot y)-2(a_x\cdot x_0+a_y\cdot y_0)\cdot$$

Όμως $\upsilon_x^2+\upsilon_y^2=\upsilon^2=\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}$ και $\upsilon_{x0}^2+\upsilon_{y0}^2=\upsilon_0^2=\vec{\upsilon}_0\cdot\vec{\upsilon}_0$

$$a_x x+a_y y=a_x\vec{i}\cdot x\vec{i}+a_y\vec{j}\cdot y\vec{j}=(\vec{a}_x+\vec{a}_y)\cdot(x\vec{i}+y\vec{j})=\vec{a}\cdot\vec{r} \quad \text{και} \quad a_x x_0+a_y y_0=\vec{a}\cdot\vec{r}_0$$

Συνεπώς: $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0\cdot\vec{\upsilon}_0+2\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)$
β) Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (2) και (2΄) στην εξίσωση $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ και έχουμε:

$$\vec{r}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+(\upsilon_{x0}\vec{i}+\upsilon_{y0}\vec{j})t+\frac{1}{2}(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})t^2$$

Είναι: $x_0\vec{i}+y_0\vec{j}=\vec{r}_0$, $\upsilon_{x0}\vec{i}+\upsilon_{y0}\vec{j}=\vec{\upsilon}_0$, $a_x\vec{i}+a_y\vec{j}=\vec{a}$. Συνεπώς: $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{\upsilon}_0\cdot t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$
γ) Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3) και (3΄) στην εξίσωση $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ και έχουμε:

$$\vec{r}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+\frac{1}{2}(\upsilon_{x0}\vec{i}+\upsilon_x\vec{i})t+\frac{1}{2}(\upsilon_{y0}\vec{j}+\upsilon_y\vec{j})t \quad ή \quad \vec{r}=(x_0\vec{i}+y_0\vec{j})+\frac{1}{2}(\upsilon_{x0}\vec{i}+\upsilon_x\vec{i})t+\frac{1}{2}(\upsilon_{y0}\vec{j}+\upsilon_y\vec{j}) \quad ή$$

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\frac{1}{2}(\vec{\upsilon}_0+\vec{\upsilon})t.$$

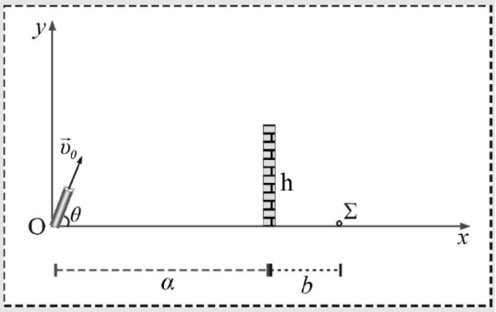
Η θέση πυροβόλου όπλου απέχει οριζόντια απόσταση α από κατακόρυφο τοίχο ύψους h. Πίσω από τον τοίχο σε οριζόντια απόσταση b υπάρχει στόχος Σ. Να βρείτε: α) τη γωνία με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το βλήμα ώστε να κτυπήσει το στόχο και β) το ελάχιστο μέτρο της αρχικής ταχύτητας.

Λύση

α) Οι εξισώσεις κίνησης του βλήματος (Σχήμα 2.25) είναι: $x = \upsilon_0 \cos\theta \cdot t$, $y = \upsilon_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

Με απαλοιφή του χρόνου t μεταξύ των δυο αυτών εξισώσεων προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς

$$y = x \cdot \tan\theta - \frac{g x^2}{\upsilon_0^2 \cos^2\theta \cdot t}$$



Σχήμα 2.25 Η κίνηση του βλήματος γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxy.

Για $x = \alpha$ και $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ έχουμε:

$$y = \alpha \cdot \tan\theta - \frac{g\alpha^2}{2\upsilon_0^2}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

Για να κτυπηθεί ο στόχος πρέπει:

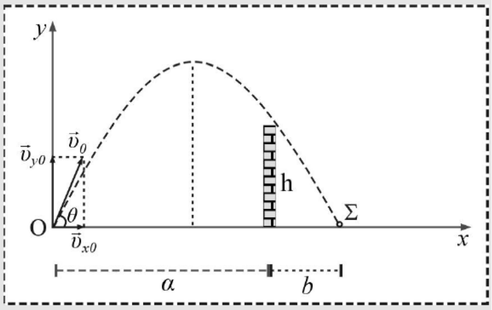
$$y \geq h \quad ή \quad \alpha \cdot \tan\theta - \frac{g\alpha^2}{2\upsilon_0^2}\left(1 + \tan^2\theta\right) \geq h \qquad (1)$$

και $\alpha + b = \frac{\upsilon_0^2}{g} \cdot \sin 2\theta$ ή $\alpha + b = \frac{\upsilon_0^2}{g} \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ ή

$$\alpha + b = \frac{\upsilon_0^2}{g} \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} \quad ή$$

$$\alpha + b = \frac{2\upsilon_0^2}{g} \frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \quad ή$$

$$\frac{g}{2\upsilon_0^2} = \frac{\tan\theta}{(\alpha + b)\left(1 + \tan^2\theta\right)} \qquad (2)$$



Σχήμα 2.26 Για $\upsilon_0 = \upsilon_{0min}$ η παραβολική τροχιά του βλήματος εφάπτεται της κορυφής του τοίχου και διέρχεται από τη θέση του στόχου.

Από (1) (2) έχουμε:

$$\alpha \cdot \tan\theta - \frac{\tan\theta}{(\alpha + b)(1 + \tan^2\theta)} \cdot \left(1 + \tan^2\theta\right) \geq h \quad ή$$

$$\tan\theta \geq \frac{h(\alpha + b)}{\alpha b} \quad ή \qquad \tan\theta_0 = \frac{h(\alpha + b)}{\alpha b} \qquad (3)$$

β) Η ελάχιστη τιμή $\upsilon_{0\,min}$ της αρχικής ταχύτητας θα αντιστοιχεί σε $\theta = \theta_0$ (Σχήμα 2.26).

Από (2), (3) βρίσκουμε: $\upsilon_{0,min} = \sqrt{\frac{gab}{2h}\left[1 + \left(h\frac{\alpha + b}{\alpha b}\right)^2\right]}$.

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματίου είναι: $x = 2t^3 - 3t^2$ και $y = t^2 - 2t + 1$ (S.I). α) Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του συναρτήσει του χρόνου. β) Για ποιες τιμές του χρόνου η ταχύτητα μηδενίζεται; γ) Για ποιες τιμές του χρόνου η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα y; δ) Να βρεθούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Λύση

α) Από τους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης έχουμε:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad ή \quad \vec{\upsilon} = \frac{d}{dt}\left(2t^3 - 3t^2\right)\vec{i} + \frac{d}{dt}\left(t^2 - 2t + 1\right)\vec{j} \quad ή \quad \vec{\upsilon} = \left(6t^2 - 6t\right)\vec{i} + (2t - 2)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6t^2 - 6t\right)\vec{i} + \frac{d}{dt}(2t - 2)\vec{j} \quad ή \quad \vec{a} = (12t - 6)\vec{i} + 2\vec{j}$$

β) Η ταχύτητα μηδενίζεται όταν οι συνιστώσες υ_x και υ_y μηδενίζονται. Έτσι:

$\upsilon_x = 0$ ή $6t^2 - 6t = 0$ ή $t = 0$ και $t = 1\text{s}$

$\upsilon_y = 0$ ή $2t - 2 = 0$ ή $t = 1\text{s}$. Άρα για $t = 1\text{s}$ η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται.

γ) Η επιτάχυνση είναι παράλληλη στον άξονα y όταν η συνιστώσα της a_x είναι μηδέν. Έτσι:

$a_x = 0$ ή $12t - 6 = 0$ ή $t = 0{,}5\text{s}$

δ) Ισχύει: $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$ ή $\upsilon = \sqrt{\left(6t^2 - 6t\right)^2 + (2t - 2)^2}$ ή $\upsilon = (t - 1)\sqrt{36t^2 + 4}$

Όμως $a_t = \frac{d\upsilon}{dt}$ ή $a_t = \frac{d(t - 1)}{dt}\sqrt{36t^2 + 4} + (t - 1)\frac{d\left(\sqrt{36t^2 + 4}\right)}{dt}$ ή $a_t = \frac{36t^2 + 4}{\sqrt{36t^2 + 4}} + \frac{(t - 1)36t}{\sqrt{36t^2 + 4}}$.

Για $t = 0$ είναι $a_t = 2\text{m/s}^2$.

Ισχύουν: $a^2 = a_x^2 + a_y^2$ ή $a = \sqrt{(12\text{t} - 6)^2 + 2^2}$. Για $t = 0$ έχουμε $a_t = \sqrt{40}\text{m/s}^2$.

$a^2 = a_n^2 + a_t^2$ ή $a_n^2 = a^2 - a_t^2$. Για $t = 0$ έχουμε $a_n^2 = 40 - 4$ ή $a_n = 6\text{m/s}^2$.

Σωμάτιο κινείται με εξισώσεις κίνησης $x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 - 3$ (S.I). α) Να γραφεί η εξίσωση της τροχιάς του και να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του τη χρονική στιγμή $t = 2\,\text{s}$, β) Να υπολογισθούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή.

Λύση

α) Με απαλοιφή του χρόνου μεταξύ των δοσμένων εξισώσεων κίνησης εύκολα βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς $y = x^2 - 2x - 3$ που παριστάνει μια παραβολή.

Από τον ορισμό της ταχύτητα έχουμε:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad ή \quad \vec{\upsilon} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} \quad ή \quad \vec{\upsilon} = \frac{d(t^2)}{dt}\vec{i} + \frac{d(t^4 - 2t^2 - 3)}{dt}\vec{j} \quad ή \quad \vec{\upsilon} = 2t\,\vec{i} + (4t^3 - 4t)\vec{j}.$$

Το μέτρο της είναι: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$ ή $\upsilon = \sqrt{(2t)^2 + (4t^3 - 4t)^2}$.

Για $t = 2\,\text{s}$ βρίσκουμε $\upsilon = 24{,}3\,\text{m/s}$.

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad ή \quad \vec{a} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} \quad ή \quad \vec{a} = \frac{d(2t)}{dt}\vec{i} + \frac{d(4t^3 - 4t)}{dt}\vec{j} \quad ή \quad \vec{a} = 2\vec{i} + (12t^2 - 4)\vec{j}.$$

Το μέτρο της είναι $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ ή $a = \sqrt{2^2 + (12t^2 - 4)^2}$. Για $t = 2\,\text{s}$ βρίσκουμε $a = 44{,}0\ \text{m/s}^2$.

β) Ισχύει: $a_\varepsilon = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ ή $a_t = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{(2t)^2 + (4t^3 - 4t)^2}\right)$ ή $a_t = \dfrac{4t + (4t^2 - 4t)(12t^2 - 4)}{\sqrt{4t^2 + (4t^3 - 4t)^2}}$.

Για $t = 2\,\text{s}$ βρίσκουμε $a_t = 43{,}7\,\text{m/s}^2$

Ισχύει: $a^2 = a_n^2 + a_t^2$ ή $a_n^2 = a^2 - a_t^2$ ή $a_n = \sqrt{1940 - 1912{,}31}$ ή $a_n = 5{,}26\ \text{m/s}^2$.

Σωμάτιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R με σταθερή επιτρόχια επιτάχυνση a_t. Να βρεθούν: α) ο χρόνος t' που απαιτείται έτσι ώστε η γωνία της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και της επιτάχυνσης $\vec{a}$ να γίνει φ και β) το διάστημα s που διανύει το σωματίδιο στο χρόνο αυτό.

Λύση

α) Ισχύει:
$$\vec{\upsilon} \cdot \vec{a} = \upsilon a \cos\varphi \qquad (1)$$

Όμως $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ οπότε η (1) γίνεται: $\vec{\upsilon} \cdot (\vec{a}_t + \vec{a}_n) = \upsilon a\cos\varphi$ ή $\vec{\upsilon} \cdot \vec{a}_t + \vec{\upsilon} \cdot \vec{a}_n = \upsilon a\cos\varphi$ ή

$\upsilon a_t \cos 0^o + \upsilon a_n \cos 90^o = \upsilon a\cos\varphi$ ή $\upsilon a_t = \upsilon a\cos\varphi$ ή

$$a_t = a\cos\varphi \qquad (2)$$

Γνωρίζουμε ότι $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ και $a^2 = a_n^2 + a_t^2$. Με συνδυασμό παίρνουμε:

$$a = \sqrt{\frac{\upsilon^4}{R^2} + a_t^2} \qquad (3)$$

Από τον ορισμό της επιτρόχιας επιτάχυνσης έχουμε:

$$a_t = \frac{d\upsilon}{dt} \quad ή \quad \int_0^\upsilon d\upsilon = a_t \int_0^{t'} dt \quad ή \quad \upsilon = a_t t' \qquad (4)$$

Από τις (3), (4) παίρνουμε: $a = \sqrt{\dfrac{a_t^4 t'^4}{R^2} + a_t^2}$. Αυτή και (2) δίνουν: $\dfrac{a_t}{\cos\varphi} = \sqrt{\dfrac{a_t^4 t'^4}{R^2} + a_t^2}$ ή

$$\frac{a_t^2}{\cos^2\varphi} = \frac{a_t^4 t'^4}{R^2} + a_t^2 \quad ή \quad \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{a_t^2 t'^4}{R^2} + 1 \quad ή \quad \frac{a_t^2 t'^4}{R^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 \quad ή \quad \frac{a_t^2 t'^4}{R^2} = \frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} \quad ή$$

$$\frac{a_t^2 t'^4}{R^2} = \tan^2\varphi \quad ή \quad t' = \sqrt{\frac{R\tan\varphi}{a_t}}.$$

β) Εφόσον η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι σταθερά η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την (4). Έτσι: $\upsilon = a_t t$. Τότε από τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε:

$$\upsilon(t) = \frac{ds}{dt} \quad ή \quad \int_0^s ds = \int_0^{t'} \upsilon(t)dt \quad ή \quad s = \int_0^{t'} a_t t dt \quad ή \quad s = \frac{1}{2}a_t t'^2 \quad ή \quad s = \frac{1}{2}a_t \frac{R\tan\varphi}{a_t} \quad ή \quad s = \frac{R\tan\varphi}{2}.$$

Υλικό σημείο κινείται πάνω σε κύκλο σύμφωνα με την εξίσωση $s = t^3 + 2t^2$ (S.I) όπου s μετριέται κατά μήκος του κύκλου. Αν τη χρονική στιγμή $t = 2$ s η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι $16\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου είναι $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ με μέτρο $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$.

Όμως $a_t = \frac{dv}{dt}$ και $a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Από τη σχέση $s = t^3 + 2t^2$ έχουμε: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$.

Τότε $a_t = 6t + 4$ και $a_n = \frac{(3t^2 + 4t)^2}{\rho}$. Συνεπώς $a = \sqrt{(6t+4)^2 + \left[\frac{(3t^2+4t)^2}{\rho}\right]^2}$.

Για $t = 2$ s και $a = 16\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ βρίσκουμε $\rho = 25$ m.

2.1 Η θέση υλικού σημείου, το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$, καθορίζεται από την εξίσωση $x = t^3 - 3t^2 - 24t + 40$ (S.I). Να προσδιορίσετε: α) τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ταχύτητα του σημείου θα είναι ίση με μηδέν, β) τη θέση του σημείου τη στιγμή t_1, γ) τη μετατόπιση του σημείου από t_0= 0 μέχρι τη στιγμή t_1, δ) την επιτάχυνση του σημείου τη στιγμή t_1, ε) την απόσταση που διήνυσε το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα [3 s, 6 s].

2.2 Η θέση υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ ορίζεται από την εξίσωση $x = t^3 - 8t^2 + 20t - 4$ (S.I). Τη χρονική στιγμή $t = 4$ s να προσδιορίσετε για το υλικό σημείο: α) τη θέση του, β) την ταχύτητα του, γ) την επιτάχυνσή του.

2.3 Η κίνηση υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ περιγράφεται από την εξίσωση: $x = 2t^3 - 9t^2 + 20$ (S.I). Όταν η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι ίση με μηδέν, να προσδιορίσετε: α) τη θέση του, β) την επιτάχυνσή του.

2.4 Η εξίσωση της κίνησης υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ είναι:

$$x = 2t^2 + 20t + 60 \quad \text{(S.I)}$$

Α. Να βρείτε πότε η ταχύτητα του είναι ίση με μηδέν.
Β. Τη χρονική στιγμή $t = 8$ s να προσδιορίσετε: α) τη θέση του υλικού σημείου, β) την απόσταση που έχει διανύσει το υλικό σημείο.

2.5 Η εξίσωση της κίνησης σημειακού αντικειμένου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ είναι: $x = 2t^3 - 18t^2 + 48t + 14$ (S.I).
Α. Να βρείτε πότε η ταχύτητα του αντικειμένου μηδενίζεται.
Β. Όταν η επιταχυνση του αντικειμένου είναι ίση με μηδέν, να προσδιορίσετε: α) τη θέση του, β) τη συνολική απόσταση που διανύθηκε από το αντικείμενο από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι να γίνει η επιτάχυνση του ίση με μηδέν.

2.6 Βαρύ υλικό σημείο εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από την κορυφή πύργου ύψους 20 m με ταχύτητα μέτρου 20 m/s. Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται σταθερή με μέτρο 10 m/s^2.

2.11 Η εξίσωση τροχιάς ενός σώματος είναι $y = x^2$. Αν είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του σώματος έχει σταθερή συνιστώσα κατά τη διεύθυνση x με $\upsilon_x = 3$ m/s να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για $x = \frac{2}{3}$ m.

2.12 Η επιτάχυνση σημειακού αντικειμένου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x΄x είναι ανάλογη του χρόνου t. Για $t = 0$ η ταχύτητα του αντικειμένου είναι $\upsilon = -48$ m/s. Αν είναι γνωστό ότι για $t = 4$ s είναι υ = 0 και x = 0, να γράψετε τις εξισώσεις: α) $\alpha = f(t)$, β) $\upsilon = f(t)$ και γ) $x = f(t)$.

2.13 Η επιτάχυνση ταλαντούμενου υλικού σημείου ορίζεται από την εξίσωση $\alpha = -\mathrm{k}x$. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε $\upsilon = 4$ m/s όταν $x = 0$ και $x = 0{,}4$ m όταν $\upsilon = 0$.

2.14 Σημειακό αντικείμενο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ με επιτάχυνση που ορίζεται από τη σχέση $\alpha = -\mathrm{k}/x^2$. Το αντικείμενο ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x_0 = 4$ m με μηδενική ταχύτητα και στη θέση $x = 2$ m η ταχύτητα του είναι υ = – 4 m/s. Να βρείτε: α) την τιμή του k, β) την ταχύτητα του αντικειμένου στη θέση $x = 1$ m.

2.15 Υλικό σημείο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x΄x με επιτάχυνση που ορίζεται από την εξίσωση $\alpha = -5\upsilon$ (S.I). Δίνεται ότι για $t = 0$ είναι $\upsilon_0 = 20$ m/s. Να βρείτε: α) την απόσταση που θα διανύσει το υλικό σημείο μέχρι να σταματήσει, β) το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να σταματήσει το υλικό σημείο, γ) ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα του υλικού σημείου θα έχει ελαττωθεί κατά 75% από την αρχική της τιμή;

2.16 Υλικό σημείο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ με επιτάχυνση $\alpha = -2$ m/s^2. Για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\upsilon = +10$ m/s.

Α. Να γράψετε τις εξισώσεις:α) $\upsilon = f(t)$ και β) $x = f(t)$.

Β. Να υπολογίσετε την απόσταση που διανύει το υλικό σημείο από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή $t = 8$ s.

2.17 Η επιτάχυνση υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x΄x$ ορίζεται από την εξίσωση: $\alpha = 48 - 9t^2$ όπου α σε cm/s^2 και t σε s. Το υλικό σημείο ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με $\upsilon_0 = 0$ από τη θέση $x = +20$ cm. Να βρείτε: α) τη χρονική στιγμή t κατά την οποία η ταχύτητα του υλικού σημείου γίνεται πάλι ίση με μηδέν, β) τη θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου τη στιγμή $t = 6$ s, γ) τη συνολική απόσταση που διήνυσε το κινητό από $t = 0$ μέχρι $t = 6$ s.

2.18 Η επιτάχυνση υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ ορίζεται από την εξίσωση $\alpha = \mathrm{k}t^2$. α) Αν, για $t = 0$ είναι $\upsilon_0 = -8/3$ m/s και για $t = 2$ s είναι $\upsilon_0 = 8/3$ m/s να υπολογίσετε τη σταθερά k, β) Να γράψετε τις εξισώσεις $\upsilon = f(t)$ και $x = f(t)$ αν γνωρίζετε ότι για $t = 2$ s είναι $x = 0$.

2.19 Σημειακό αντικείμενο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x΄x με επιταχυνση που ορίζεται από τη σχέση $\alpha = 45 - 15x^2$ (S.I). Δίνεται ότι για $t = 0$ είναι $\upsilon_0 = 0$ και $\mathrm{x} = 0$. Να βρείτε: α) την ταχύτητα του αντικειμένου όταν $x = 2$ m, β) τη θέση στην οποία η ταχύτητα είναι πάλι ίση με μηδέν, γ) τη θέση στην οποία η ταχύτητα έχει μέγιστο μέτρο.

2.20 Η επιτάχυνση ταλαντούμενου υλικού σημείου ορίζεται από την εξίσωση $\alpha = -\mathrm{k}x$. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε $\upsilon = 4$ m/s όταν $\mathrm{x} = 0$ και $x = 0{,}4$ m όταν $\upsilon = 0$.

2.21 Σημειακό αντικείμενο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ με επιτάχυνση που ορίζεται από τη σχέση $\alpha = -\mathrm{k}/x^2$. Το αντικείμενο ξεκινάει τη στιγμή t = 0 από τη θέση $x_0 = 4$ m με μηδενική ταχύτητα και στη θέση $x = 2$ m η ταχύτητα του είναι $\upsilon = -4$ m/s. Να βρείτε: α) την τιμή του k, β) την ταχύτητα του αντικειμένου στη θέση $x = 1$ m.

2.22 Η επιτάχυνση υλικού σημείου το οποίο κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ ορίζεται από την εξίσωση $\alpha = -\frac{1}{80}\upsilon^2$ (S.I). Αν η αρχική ταχύτητα του υλικού σημείου είναι υ_0, να βρείτε την απόσταση που θα διανύσει: α) μέχρι η ταχύτητα του να γίνει $\upsilon = \upsilon_0/2$, β) μέχρι να σταματήσει.

2.23 Υλικό σημείο ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ από τη θέση $y = 0$ με μηδενική ταχύτητα και πέφτει μέσα στην ατμόσφαιρα της Γης. Η επιτάχυνση του σημείου ορίζεται από τη σχέση $\alpha = \mathrm{g}(1 - \mathrm{k}^2\upsilon^2)$. α) Δείξτε ότι η ταχύτητα του για κάθε t, υπολογίζεται από την εξίσωση: $\upsilon = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \tan h \cdot (\mathrm{kg}t)$, β) Να βρείτε την εξίσωση από την οποία υπολογίζεται η ταχύτητα του υλικού σημείου για κάθε y, γ) Να δικαιολογήσετε γιατί η ταχύτητα $\upsilon_t = \frac{1}{\mathrm{k}}$ ονομάζεται οριακή ταχύτητα.