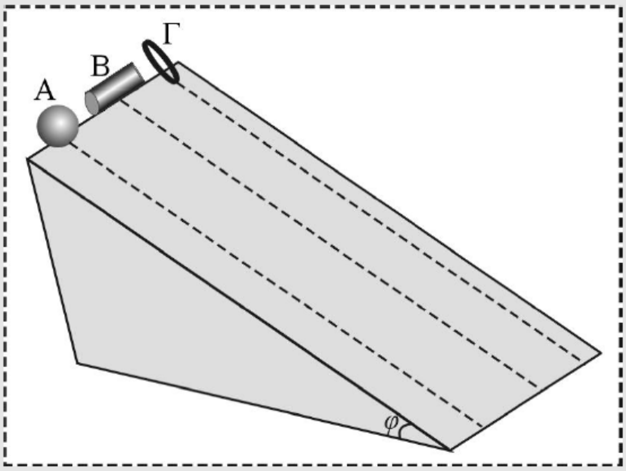
Τρία ομογενή σώματα μια συμπαγής σφαίρα (Α) ένας ομογενής κύλινδρος (Β) και ένα κυκλικό στεφάνι (Γ), έχουν τοποθετηθεί στο πάνω μέρος πλάγιου επιπέδου και αρχικά ηρεμούν. Αφήνουμε ταυτόχρονα ελευθέρα τα τρία σώματα και αρχίζουν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν. Ποιο από τα τρία σώματα κυλίεται ταχύτερα κατά την κάθοδο στο πλάγιο επίπεδο και γιατί; Θεωρούμε αμελητέες της τριβή κύλισης και την αντίσταση του αέρα.



Σχήμα 7.19 Ποιο από τα τρία σώματα κυλίεται ταχύτερα κατά την κάθοδο στο πλάγιο επίπεδο;

Λύση

Εφόσον η κύλιση γίνεται χωρίς ολίσθηση ισχύουν τα εξής: i) $\upsilon_{cm} = R \cdot \omega$, ii) Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.
Κάθε σώμα ξεκινάει από την ηρεμία στο ανώτερο σημείο του πλάγιου επιπέδου όπου $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ και φθάνει στο κατώτερο σημείο όπου έχει κινητική ενέργεια K_2 και $U_2 = 0$. Συνεπώς: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ ή

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm} \cdot \omega^2 \qquad (1)$$

Οι ροπές αδράνειας των κυλιόμενων σωμάτων, ως προς άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους, μπορούν να υπολογιστούν από την έκφραση $I_{cm} = \lambda \cdot MR^2$ όπου λ είναι καθαρός αριθμός μεταξύ 0 και 1, $(0 < \lambda < 1)$ ο οποίος εξαρτάται από το σχήμα του σώματος.

Η εξίσωση (1) γράφεται: $Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\lambda \cdot MR^2 \cdot \frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} = \frac{1}{2}(1+\lambda) \cdot M\upsilon_{cm}^2$ ή

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda}} \qquad (2)$$

Από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι η ταχύτητα υ_{cm} δεν εξαρτάται ούτε από τη μάζα του σώματος ούτε από την ακτίνα του.
Όλες οι ομογενείς σφαίρες έχουν στο κατώτερο σημείο του πλάγιου επιπέδου την ίδια ταχύτητα υ_{cm} και στην περίπτωση που έχουν διαφορετικές μάζες και διαφορετικές ακτίνες, γιατί όλες έχουν το ίδιο λ.
Όσο μικρότερη είναι η τιμή του λ τόσο ταχύτερα κινείται το σώμα στο κατώτερο σημείο του πλάγιου επιπέδου, αλλά και σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής.
Τα σώματα που έχουν μικρό λ πάντοτε προπορεύονται των σωμάτων μεγάλου λ, γιατί δεσμεύουν μικρότερο ποσοστό της ολικής ενέργειας τους σε κινητική ενέργεια περιστροφής.
Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διαθέτουν μεγαλύτερο ποσοστό ενέργειας για τη μεταφορική κίνηση.
Για τα τρία σώματα Α, Β, Γ έχουμε αντίστοιχα

$$I_A = \frac{2}{5} \cdot MR^2 \text{ ή } \lambda_A = 0{,}4, \; I_B = \frac{1}{2} \cdot MR^2 \text{ ή } \lambda_B = 0{,}5, \; I_\Gamma = MR^2 \text{ ή } \lambda_\Gamma = 1$$

Για τις τιμές του λ έχουμε $\lambda_A < \lambda_B < \lambda_\Gamma$

Συνεπώς στο κατώτερο σημείο του πλάγιου επιπέδου αλλά και σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής για τις ταχύτητες των τριών σωμάτων θα ισχύει: $\upsilon_{cm,A} > \upsilon_{cm,B} > \upsilon_{cm,\Gamma}$
Η σειρά τερματισμού των σωμάτων είναι:
Πρώτη η σφαίρα, Δεύτερος ο κύλινδρος, Τρίτο το στεφάνι.

Ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R ξεκινάει από την ηρεμία και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος πλάγιου εκτεταμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ. [Σχήμα 7.20]. Να υπολογίσετε:
α) Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. β) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν αυτό έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση h. γ) Για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

Λύση

α) Από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος με εφαρμογή των εξισώσεων (7.14) έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm,x} \text{ ή } M \cdot g\sin\varphi - f = M \cdot \alpha_{cm} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } N - M \cdot g \cdot \cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma\tau_c = I_{cm} \cdot \alpha_\omega \text{ ή } f \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha_\omega \qquad (4)$$

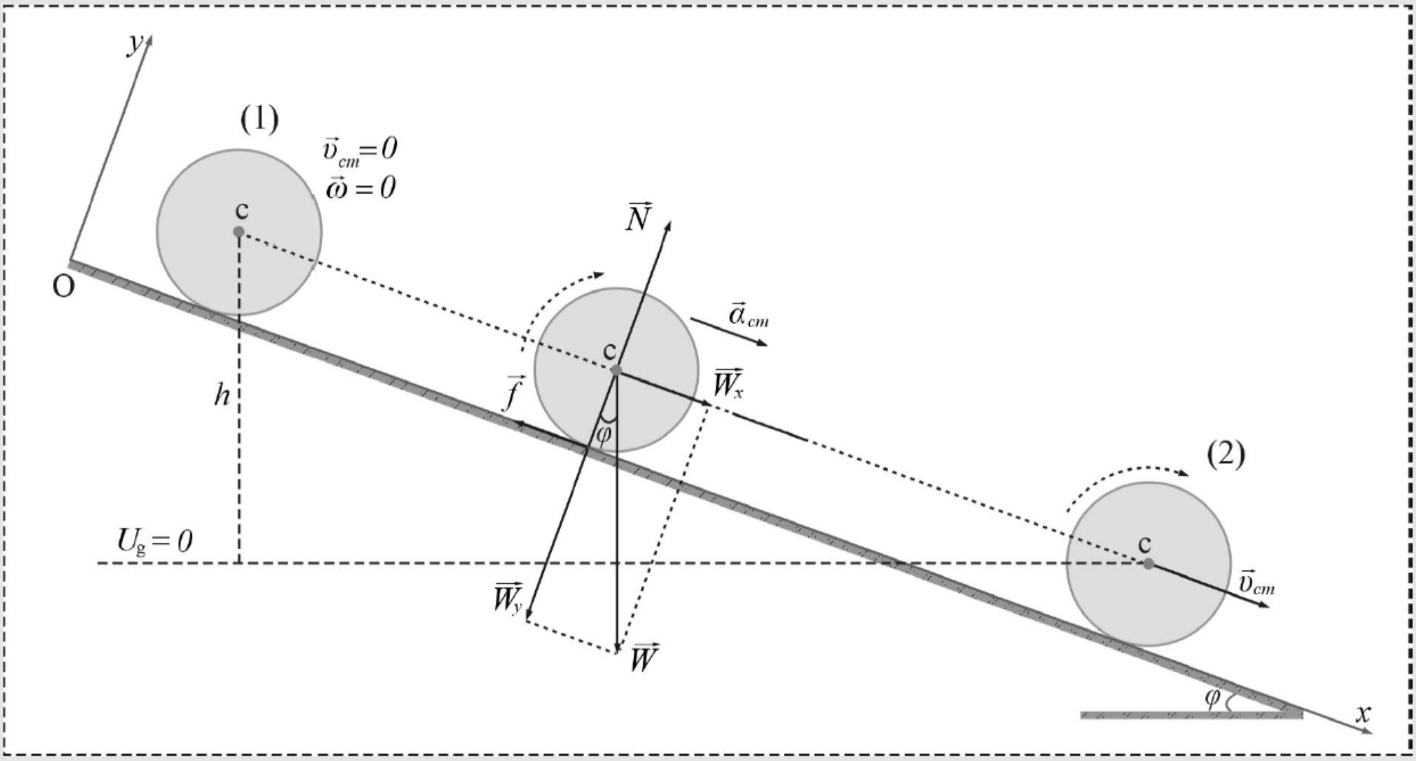
Εφόσον ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει $\alpha_{cm} = R \cdot \alpha_\omega$ οπότε $f \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R}$ ή

$$f = \frac{1}{2}M \cdot \alpha_{cm} \qquad (3)$$

Από (1), (2) βρίσκουμε $\alpha_{cm} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\varphi$

β) Η Μηχανική ενέργεια κατά την κύλιση του κυλίνδρου διατηρείται. Συνεπώς: $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ ή $Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm} \cdot \omega^2$. Επειδή η κύλιση γίνεται χωρίς ολίσθηση θα είναι $\upsilon_{cm} = R \cdot \omega$ όποτε $Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2}$ ή $Mgh = \frac{4}{3}M\upsilon_{cm}^2$ ή $\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

γ) Για να κυλίεται ο κύλινδρος χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει



Σχήμα 7.20 Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για κύλινδρο ο οποίος κυλίεται χωρίς ολίσθηση κατά μήκος του πλάγιου επιπέδου.

$$f \le \mu_S \cdot N \qquad (5)$$

Από (3), (4) προκύπτει $\quad f = \frac{1}{3}M \cdot g \cdot \sin\varphi \qquad (6)$

Από (2), (5), (6) έχουμε $\frac{1}{3}M \cdot g \cdot \sin\varphi \le \mu_s \cdot M \cdot g \cdot \cos\varphi$ ή $\mu_s \ge \frac{1}{3}\tan\varphi$

Τροχός ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_{cm} = v_0 \cdot \vec{i}$ πάνω σε οριζόντιο εκτεταμένο δάπεδο. Για ένα σημείο Α της περιμέτρου του τροχού το οποίο για $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_A = y_A = 0$ (Σχήμα 7.21) να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο: α) τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του. β) τις εξισώσεις της ταχύτητας του. γ) τις εξισώσεις της επιτάχυνσης του.

Λύση

α) Τη στιγμή t, το κέντρο μάζας του τροχού θα βρίσκεται στη θέση $x_{c,1} = v_0 \cdot t$ και επειδή η κύλιση δε συνοδεύεται από ολίσθηση το τόξο ΒΑ θα έχει επίσης μήκος $s = v_0 \cdot t$.

Συνεπώς η γωνία $\widehat{BC_1A} = \varphi = \frac{s}{R}$ ή $\varphi = \frac{v_0 \cdot t}{R}$.

Από τη γεωμετρία του σχήματος εύκολα βρίσκουμε τις συντεταγμένες (x, y) του κινητού σημείου Α. Έχουμε:

$$x = x_c - R \cdot \sin\varphi \text{ ή } x = v_0 \cdot t - R \cdot \sin\frac{v_0 \cdot t}{R} \quad (1)$$

$$y = y_c - R \cdot \cos\varphi \text{ ή } y = R - R \cdot \cos\frac{v_0 \cdot t}{R} \quad (2)$$

Οι εξισώσεις (1) και (2) είναι οι παραμετρικές (με παράμετρο t) εξισώσεις της τροχιάς του σημείου Α και παριστάνουν καμπύλη η οποία ονομάζεται κυκλοειδής.

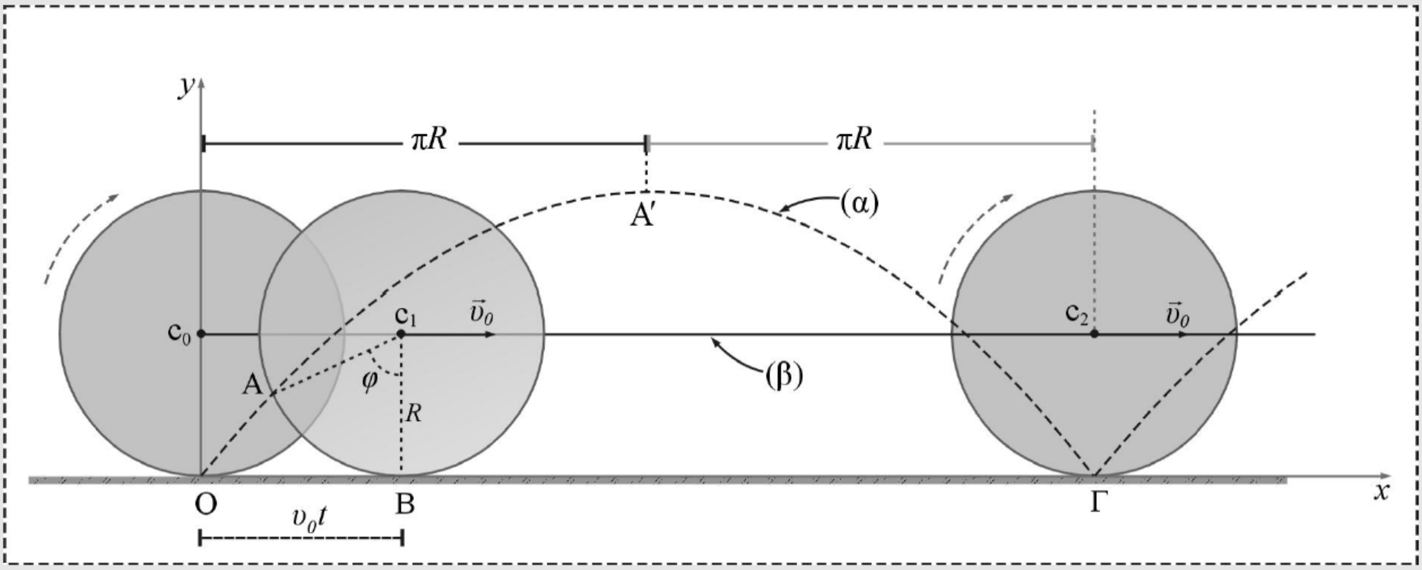
β) Οι εξισώσεις της ταχύτητας του σημείου Α βρίσκονται από τις εξισώσεις (1) και (2) με παραγώγιση ως προς το χρόνο. Έχουμε:

$$v_x = \dot{x} = v_0\left(1 - \cos\frac{v_0 \cdot t}{R}\right) \quad (3)$$

$$v_y = \dot{y} = v_0 \cdot \sin\frac{v_0 \cdot t}{R} \quad (4)$$

Το μέτρο της ταχύτητας του Α θα είναι $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ και λόγω των (3)(4) προκύπτει:

$$v = v_0\sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\frac{v_0 \cdot t}{R}\right)} = 2v_0 \cdot \sin\frac{v_0 \cdot t}{2R} \quad (5)$$



Σχήμα 7.21 (α) Η εστιγμένη καμπύλη είναι η τροχιά που διαγράφει το σημείο Α της περιμέτρου του τροχού το οποίο για $t_0 = 0$ βρισκόταν στην αρχή Ο του συστήματος Οxy. Η τροχιά αυτή είναι μια κυκλοειδής καμπύλη. (β) Το κέντρο μάζας του τροχού κινείται ευθύγραμμα.

Από την εξίσωση (5) προκύπτει ότι το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του Α είναι $2\upsilon_0$ και αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά τη στιγμή $t=\dfrac{\pi\cdot R}{\upsilon_0}$ κατά την οποία το σημείο Α βρίσκεται στο ανώτατο σημείο Α΄ της τροχιάς του [Σχήμα 7.21].

γ) Από τις εξισώσεις (3), (4) με παραγώγιση ως προς το χρόνο προκύπτουν οι εξισώσεις της επιτάχυνσης.

$$\alpha_x=\ddot{x}=\frac{\upsilon_0^2}{R}\cdot\sin\frac{\upsilon_0\cdot t}{R} \qquad (6)$$

$$\alpha_y=\ddot{y}=\frac{\upsilon_0^2}{R}\cdot\cos\frac{\upsilon_0\cdot t}{R} \qquad (7)$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Α είναι: $\alpha=\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2}$ και λόγω των (6), (7) βρίσκουμε $\alpha=\dfrac{\upsilon_0^2}{R}$.

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της επιτάχυνσης του σημείου Α είναι σταθερό και το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε κάθε θέση κατευθύνεται προς το κέντρο c του κυλιόμενου τροχού.

Δυο φυσικώς ίσοι κύλινδροι Κ και Λ ηρεμούν στη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα (7.23) με το αβαρές και μη έκτατο νήμα, το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από το δίσκο Α, τεντωμένο. Τη στιγμή $t_0=0$ ο κύλινδρος Λ αφήνεται ελεύθερος. Κατά την κίνηση του συστήματος θεωρούμε ότι: i) το νήμα παραμένει κατακόρυφο και δεν ολισθαίνει στους κυλίνδρους. ii) ο άξονας του κυλίνδρου Λ διατηρείται οριζόντιος. iii) ο κύλινδρος Κ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του χωρίς τριβές. Να υπολογίσετε τα μέτρα: α) της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου Λ. β) της γωνιακής επιτάχυνσης κάθε κυλίνδρου. γ) της δύναμης που ασκεί το νήμα σε κάθε κύλινδρο. Η μάζα και η ακτίνα κάθε κυλίνδρου είναι M και R αντίστοιχα.

Λύση

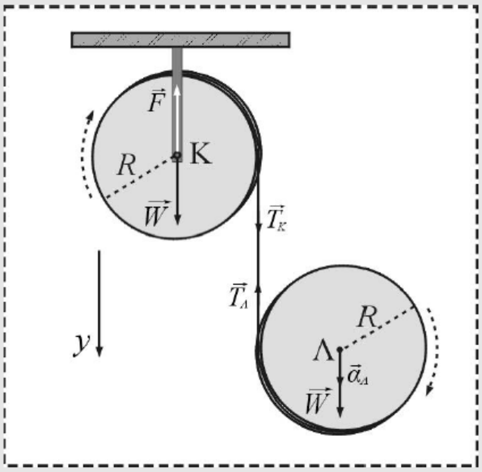
α) Για τον κύλινδρο Κ ισχύει: $T_K\cdot R=\dfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\omega,K}$ (1)

Για τον κύλινδρο Λ ισχύουν: $M\cdot g-T_\Lambda=M\cdot\alpha_\Lambda$ (2)

$T_\Lambda\cdot R=\dfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha_{\omega,\Lambda}$ (3)

Από (1)(3) προκύπτει ότι $\alpha_{\omega,K}=\alpha_{\omega,\Lambda}$ (4)

Αν ο κύλινδρος Κ στραφεί κατά γωνία θ_K και ο κύλινδρος Λ στραφεί κατά γωνία θ_Λ τότε ξετυλίγεται νήμα μήκους $y=R\cdot\theta_K+R\cdot\theta_\Lambda$ όποτε κατά y κατεβαίνει και το κέντρο μάζας του κυλίνδρου Λ.



Σχήμα 7.23: *Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για καθένα κύλινδρο όταν το σύστημα κινείται. Είναι* $|\vec{T}_K|=|\vec{T}_\Lambda|$.

Συνεπώς: $\dfrac{dy}{dt}=R\cdot\dfrac{d\theta_K}{dt}+R\cdot\dfrac{d\theta_\Lambda}{dt}$ ή $\upsilon_\Lambda=R\cdot\omega_K+R\cdot\omega_\Lambda$ ή

$$\frac{d\upsilon_\Lambda}{dt}=R\cdot\frac{d\omega_K}{dt}+R\cdot\frac{d\omega_\Lambda}{dt}=R\cdot\alpha_{\omega,K}+R\cdot\alpha_{\omega,\Lambda}$$

και λόγω της (4) $\alpha_\Lambda=2\alpha_{\omega,K}\cdot R$ ή $\qquad \alpha_{\omega,K}=\alpha_{\omega,\Lambda}=\dfrac{\alpha_\Lambda}{2R}$ (5)

Από (3), (5) προκύπτει: $\qquad T_\Lambda=\dfrac{1}{2}M\cdot\alpha_\Lambda$ (6)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (6) βρίσκουμε: $\alpha_\Lambda=\dfrac{4}{5}g$ (7)

β) Για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης κάθε κυλίνδρου έχουμε από (4), (5), (7): $\alpha_{\omega,K}=\alpha_{\omega,\Lambda}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{g}{R}$

Από (6), (7) προκύπτει: $T_\Lambda=\dfrac{1}{5}\cdot Mg=T_K$.

Σε δίσκο μάζας $M = 4\ \text{kg}$ και ροπής αδράνειας, ως προς άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του και διερχόμενο από το κέντρο μάζας του, $I = 1{,}12\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ είναι τυλιγμένα δυο αβαρή και μη εκτατά νήματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.25. Το ένα νήμα είναι στερεωμένο σε οροφή ενώ στο ελεύθερο άκρο του άλλου νήματος κρέμεται σώμα Σ μάζας $m = 1\ \text{kg}$. Δίνεται η ακτίνα $r = 0{,}1\ \text{m}$. Το σύστημα αρχικά ηρεμεί με τα κατακόρυφα νήματα τεντωμένα. Όταν το σώμα Σ έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $y_\Sigma = 2\ \text{m}$, να υπολογίσετε: α) τα μέτρα των ταχυτήτων του σώματος Σ και του κέντρου μάζας του δίσκου. β) τα μέτρα των επιταχύνσεων του σώματος Σ και του κέντρου μάζας του δίσκου. γ) το χρονικό ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας: i. του δίσκου, ii. του σώματος Σ.
Κατά την κίνηση του συστήματος τα νήματα διατηρούνται κατακόρυφα και δεν ολισθαίνουν.

Λύση

α) Αν ο δίσκος στραφεί κατά γωνία θ τότε το κέντρο μάζας του κατεβαίνει κατά το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται, δηλαδή κατά $y_{cm} = r\cdot\theta$. Το σώμα Σ κατεβαίνει κατά $y_\Sigma = r\cdot\theta + r\cdot\theta$ ή

$$y_\Sigma = 2y_{cm} \qquad (1)$$

Συνεπώς: $\dfrac{dy_\Sigma}{dt} = 2\dfrac{dy_{cm}}{dt}$ ή $\upsilon_\Sigma = 2\upsilon_{cm}$ (2)

όποτε και $\alpha_\Sigma = 2\alpha_{cm}$ (3)

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα έργου – ενέργειας (Θ.Ε.Ε) για το σύστημα Δίσκος – σώμα Σ και για κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος $y_\Sigma = 2\ \text{m}$. Τότε $m\cdot g\cdot y_\Sigma + M\cdot g\cdot y_{cm} = \frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\cdot\omega^2$ ή

$$m\cdot g\cdot y_\Sigma + \frac{1}{2}M\cdot g\cdot y_\Sigma = \frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2 + \frac{1}{2}M\frac{\upsilon_\Sigma^2}{4} + \frac{1}{2}I\cdot\frac{\upsilon_\Sigma^2}{4r^2} \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_\Sigma = 2\sqrt{\frac{(2m+M)g\,y_\Sigma}{4m+M+\frac{I}{r^2}}} \ \text{ή}\ \upsilon_\Sigma = 2\ \text{m/s}$$

και λόγω της (2) $\upsilon_{cm} = 1\ \text{m/s}$.

β) Για την κίνηση του σώματος Σ έχουμε: $\alpha_\Sigma = \dfrac{d\upsilon_\Sigma}{dt} = \dfrac{d\upsilon_\Sigma}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ ή

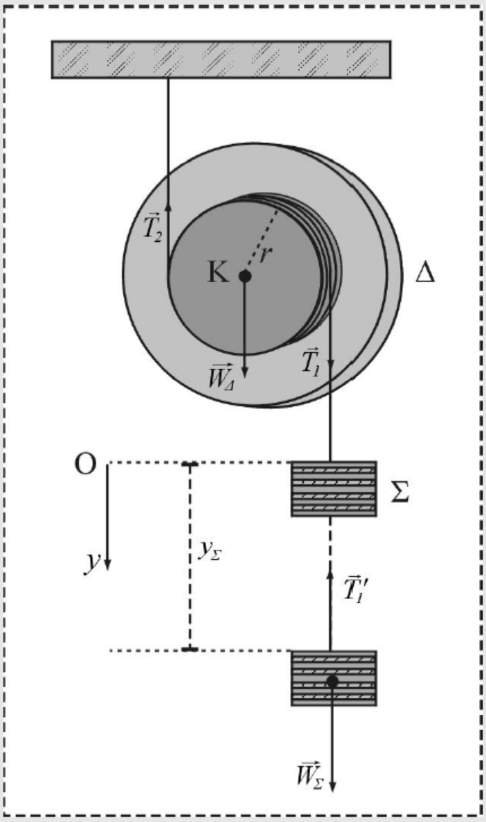
$\alpha_\Sigma = \upsilon_\Sigma\dfrac{d\upsilon_\Sigma}{dy}$ κή $\displaystyle\int_0^{y_\Sigma}\alpha_\Sigma dy = \int_0^{\upsilon_\Sigma}\upsilon_\Sigma d\upsilon_\Sigma$ ή $\alpha_\Sigma = \dfrac{\upsilon_\Sigma^2}{2y_\Sigma}$ ή $\alpha_\Sigma = 1\ \text{m/s}^2$ και λόγω της (1) $\alpha_{cm} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$.

γ) i. Για το δίσκο έχουμε: $K_\Delta = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\cdot\omega^2$ ή

$$K_\Delta = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\cdot\frac{\upsilon_{cm}^2}{r^2} \ \text{ή}\ K_\Delta = \frac{1}{2}\left(M+\frac{I}{r^2}\right)\cdot\upsilon_{cm}^2 \ \text{ή}\ \frac{dK_\Delta}{dt} = \left(M+\frac{I}{r^2}\right)\cdot\upsilon_{cm}\cdot\alpha_{cm} \ \text{ή}$$

$$\frac{dK_\Delta}{dt} = 58\ \text{J/s}.$$

ii. Για το σώμα Σ έχουμε $K_\Sigma = \frac{1}{2}M\upsilon_\Sigma^2$ ή $\dfrac{dK_\Sigma}{dt} = m\upsilon_\Sigma\cdot\alpha_\Sigma$ ή $\dfrac{dK_\Sigma}{dt} = 2\ \text{J/s}$.

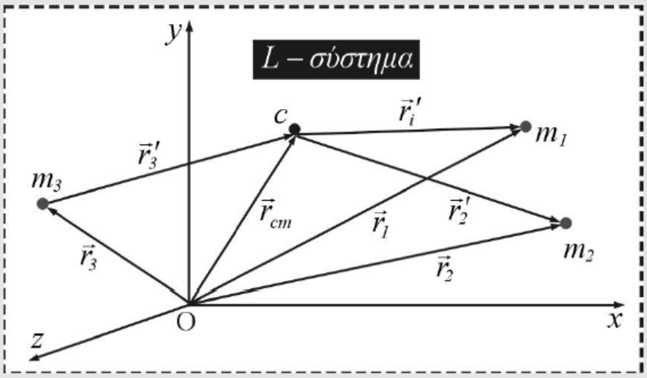


Σχήμα 7.25 Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το δίσκο Δ και το σώμα Σ. Αν ο δίσκος στραφεί κατά γωνία θ, το κέντρο μάζας του Κ κατεβαίνει κατά $y_{cm} = r\cdot\theta$ ενώ το σώμα Σ κατεβαίνει κατά $y_\Sigma = r_1\cdot\theta + r_1\cdot\theta = 2y_{cm}$. Είναι $|\vec{T}_1'| = |\vec{T}_1|$.

Αν το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων είναι ακίνητο στο L – σύστημα, να δείξετε ότι η στροφορμή του συστήματος είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς.

Λύση

Θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με μάζες $m_1, m_2, m_3 \ldots$ και διανύσματα θέσης, ως προς το L – σύστημα, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3 \ldots$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.48.



Σχήμα 7.48 Το διάνυσμα θέσης κάθε σωματιδίου του συστήματος μπορεί να γραφεί ως $\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_1'$ όπου $\vec{r}_{cm}$ και $\vec{r}_i$ τα διανύσματα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος και του σωματιδίου m_i αντίστοιχα, ως προς την αρχή O.

Ως προς την αυθαίρετη αρχή O η στροφορμή του συστήματος μπορεί να γράφει ως

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i \qquad (1)$$

όπου $\vec{\upsilon}_i$ η ταχύτητα του i-οστού σωματιδίου.

Για το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i$ του σωματιδίου m_i μπορούμε να γράψουμε, σύμφωνα με το Σχήμα 7.48,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i' \qquad (2)$$

Από (1)(2) προκύπτει: $\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \left(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_i$ ή

$$\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \qquad (3)$$

όπου $\vec{L}_1 = \vec{r}_{cm} \times \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \times \vec{\upsilon}_1$ και $\vec{L}_2 = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_1$. Επειδή $\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \times \vec{\upsilon}_1 = M \cdot \vec{\upsilon}_{cm}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{L}_1 = M \cdot \vec{r}_{cm} \times \vec{\upsilon}_{cm} \qquad (4)$$

Είναι $\vec{\upsilon}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'\right) = \vec{\upsilon}_{cm} + \upsilon_i'$. Συνεπώς $\vec{L}_2 = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i' \times \left(\vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_i'\right)$ ή $\vec{L}_2 = \left(\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{\upsilon}_{cm} + \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i'$.

Είναι $\sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i' = M \cdot \vec{r}_{cm}'$ όπου $\vec{r}_{cm}'$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ως προς το c. Προφανώς $\vec{r}_{cm}' = \vec{0}$ και

επομένως
$$\vec{L}_2 = \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i' \qquad (5)$$

Από (3), (4), (5) προκύπτει:
$$\vec{L}_0 = M \cdot \vec{r}_{cm} \times \vec{\upsilon}_{cm} + \sum_{i=1}^{i=\nu} m_i \vec{r}_i' \times \vec{\upsilon}_i' \qquad (6)$$

Έστω O′ μια άλλη αρχή για το L-σύστημα. Όπως προκύπτει από το σχήμα 7.48, αλλάζει το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας, αλλά όχι τα διανύσματα σχετικής θέσης $\vec{r}_i'$.

Είναι φανερό ότι δεν αλλάζουν και οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_i'$.

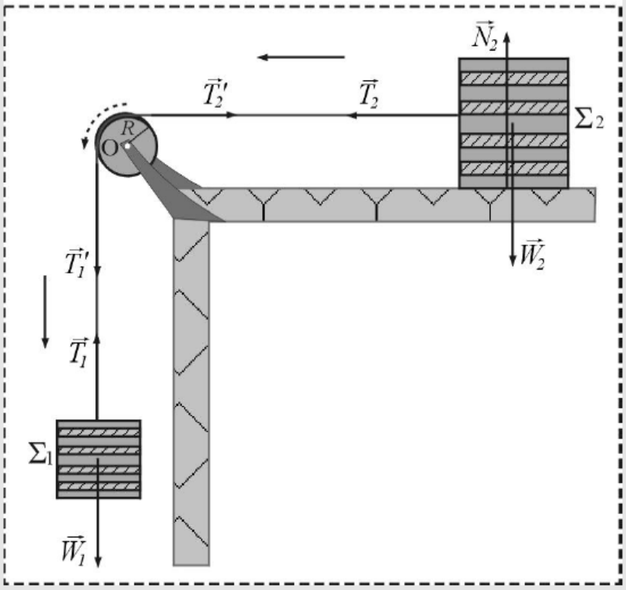
Άρα στη γενική έκφραση της στροφορμής, εξίσωση (6), ο πρώτος όρος εξαρτάται από το σημείο αναφοράς ως προς το οποίο ορίζεται η στροφορμή, ενώ ο δεύτερος είναι ανεξάρτητος.

Αν το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο στο L – σύστημα $\left(\upsilon_{cm} = 0\right)$, τότε από την (6) προκύπτει ότι η ολική στροφορμή είναι ίση με το δεύτερο όρο ο οποίος είναι ανεξάρτητος από την εκλογή της αρχής.

Συνεπώς: Αν το κέντρο μάζας συστήματος σωματιδίων ηρεμεί στο L – σύστημα, η στροφορμή του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί ως προς οποιαδήποτε αρχή και το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την εξίσωση (6) η ολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων μπορεί να χωριστεί σε δυο όρους. Ο πρώτος όρος περιέχει τη συνολική μάζα του συστήματος και ιδιότητες του κέντρου μάζας και ονομάζεται **τροχιακή στροφορμή**. **Ο δεύτερος όρος είναι η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας**. Αυτή η στροφορμή ονομάζεται **spin**.

Δυο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο περνάει από το αυλάκι τροχαλίας ακτίνας R και ροπής αδράνειας I ως προς τον άξονα της (Σχήμα 7.56). Το σώμα m_2 ολισθαίνει πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες της στροφορμής και της ροπής να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των σωμάτων.



Σχήμα 7.56 *Η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων Σ_1, Σ_2 και της τροχαλίας ως προς το κέντρο O της τροχαλίας έχει μέτρο:* $L=(m_1+m_2)\cdot\upsilon+\dfrac{I}{R}\upsilon$

Λύση

Η στροφορμή του συστήματος Σ_1, Σ_2, τροχαλία ως προς το κέντρο O της τροχαλίας έχει μέτρο

$$L = m_1\upsilon\cdot R + m_2\upsilon\cdot R + I\cdot\omega \quad \text{ή}$$

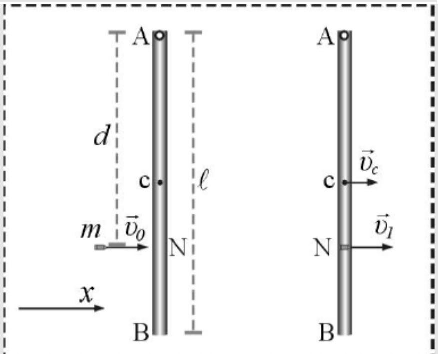
$$L=\left[(m_1+m_2)\cdot R+\frac{I}{R}\right]\cdot\upsilon \qquad (1)$$

όπου υ το μέτρο της ταχύτητας των σωμάτων ορισμένη χρονική στιγμή. Στο σχήμα 7.56 έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα. (Το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη που ασκείται σε αυτήν από τον άξονα δεν έχουν σχεδιαστεί). Η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι η ροπή του βάρους $\vec{w}_1$.

Συνεπώς: $\tau_{\varepsilon\xi}=\dfrac{dL}{dt}$ ή $m_1\cdot g\cdot R=\dfrac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\cdot R+\dfrac{I}{R}\right]\cdot\upsilon$ ή

$$m_1\cdot g\cdot R=\left[(m_1+m_2)\cdot R+\frac{I}{R}\right]\cdot\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha=\frac{m_1}{m_1+m_2+\dfrac{I}{R^2}}\cdot g \qquad (2)$$

Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΒ μήκους ℓ και μάζας M μπορεί να στρέφεται ελεύθερα γύρω από ένα σταθερό οριζόντιο άξονα, κάθετο στον άξονα της ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α. Η ράβδος είναι κατακόρυφη και ηρεμεί (Σχήμα 7.61). Ένα βλήμα μάζας m, το οποίο θεωρούμε υλικό σημείο, κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0 και σφηνώνεται σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt στη ράβδο, σε σημείο που απέχει απόσταση d από το πάνω άκρο Α της ράβδου. α) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. β) Κάτω από ποιες συνθήκες η γραμμική ορμή του συστήματος βλήμα – ράβδος διατηρείται;



Σχήμα 7.61 *α) Η ράβδος ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση και το βλήμα σφηνώνεται ακαριαία στο σημείο N, β) Η στροφορμή του συστήματος ράβδος – βλήμα ως προς το Α διατηρείται κατά τη διάρκεια της κρούσης ($\Delta t\to 0$) γιατί* $\vec{\tau}_{\varepsilon\xi,A}=\vec{0}$.

Λύση

α) Για την αμελητέα χρονική διάρκεια της κρούσης ($\Delta t\to 0$) η στροφορμή του συστήματος βλήμα – ράβδος, ως προς το σημείο Α διατηρείται γιατί $\vec{\tau}_{\varepsilon\xi,A}=\vec{0}$. (Το βάρος της ράβδου και η αντίδραση στο σημείο Α από τον άξονα περιστροφής δε δημιουργούν ροπή ως προς το Α).

Συνεπώς $\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ ή $m\cdot\upsilon_0\cdot d=I_A\cdot\omega$ ή $m\cdot\upsilon_0\cdot d=\left(md^2+\frac{1}{3}M\ell^2\right)\cdot\omega$

ή $$\omega=\frac{3m\cdot\upsilon_0\cdot d}{3md^2+M\ell^2} \qquad (1)$$

β) Για να διατηρείται η ορμή του συστήματος θα πρέπει για το σύστημα ράβδος – βλήμα να ισχύει $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi,x}=\vec{0}$ (2). Δηλαδή θα πρέπει να μην εκδηλώνεται δύναμη αντίδρασης στο Α. Η δύναμη που θα ασκηθεί στη ράβδο στο N, θα επιταχύνει το κέντρο μάζας και θα δώσει γωνιακή επιτάχυνση εξαιτίας της ροπής ως προς το ίδιο σημείο. Εφόσον ισχύει η (2) έχουμε $\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$ ή $m\cdot\upsilon_0=m\cdot\upsilon_1+M\cdot\upsilon_c$ ή

$$m\cdot\upsilon_0=\left(md+M\frac{\ell}{2}\right)\cdot\omega \qquad (3)$$

Από (1), (3) βρίσκουμε $d=\frac{2}{3}\ell$. Συνεπώς, αν το βλήμα σφηνωθεί στη ράβδο σε σημείο που απέχει από το πάνω της άκρο Α, απόσταση $d=\frac{2}{3}\ell$, τότε η ορμή του συστήματος βλήμα – ράβδος διατηρείται.

Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο κρούσης.

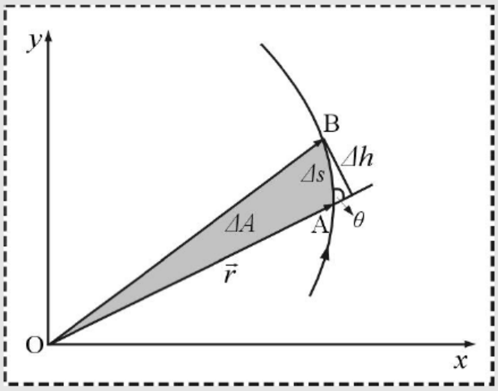
Υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης. (Μια δύναμη ορίζεται ως κεντρική, όταν δρα κατά μήκος της ευθείας που ενώνει το υλικό σημείο με το κέντρο της δύναμης. Στη γλώσσα των Μαθηματικών για μια κεντρική δύναμη γράφουμε $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$. Να δείξετε ότι: α) η τροχιά του υλικού σημείου είναι επίπεδη καμπύλη. β) το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου σε ίσους χρόνους γράφει ίσα εμβαδά (Νόμος των εμβαδών).

Λύση

α) Η ροπή της κεντρικής δύναμης ως προς το κέντρο της Ο είναι $\vec{\tau} = \frac{f(r)}{r}\vec{r}\times\vec{r} = \vec{0}$. Συνεπώς η στροφορμή του υλικού σημείου ως προς το κέντρο της δύναμης διατηρείται, δηλαδή $\vec{L}_0 = σταθ.$. Το διάνυσμα της στροφορμής είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$. Εφόσον η κατεύθυνση της στροφορμής δεν αλλάζει τα $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ θα παραμένουν στο ίδιο επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά του υλικού σημείου θα βρίσκεται σε ένα επίπεδο.

Στο σχήμα 7.63 φαίνεται μια μετακίνηση ΔS του υλικού σημείου κατά μήκος της τροχιάς του σε χρονικό διάστημα Δt. Αν το Δt είναι πάρα πολύ μικρό το τμήμα ΑΒ μπορεί να θεωρηθεί ευθύγραμμο που διανύεται με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ. Δηλαδή $\Delta S = \upsilon\cdot\Delta t$. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν θα είναι $\Delta A = \frac{1}{2}r\cdot\Delta h$ όπου $\Delta h = \Delta S\cdot\sin\theta = \upsilon\cdot\sin\theta\cdot\Delta t$. Συνεπώς

$$\Delta A = \frac{1}{2}r\cdot\upsilon\cdot\sin\theta\cdot\Delta t \qquad (1)$$



Σχήμα 7.63 *Τα σημεία Α, Β ανήκουν στην τροχιά του υλικού σημείου. Το σημείο Ο είναι το κέντρο της δύναμης. Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt το διάνυσμα θέσης γράφει εμβαδόν ΔΑ.*

Όταν το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση Α το μέτρο της στροφορμής του ως προς το κέντρο Ο της δύναμης είναι $L = m\cdot\upsilon\cdot r\cdot\sin\theta$.

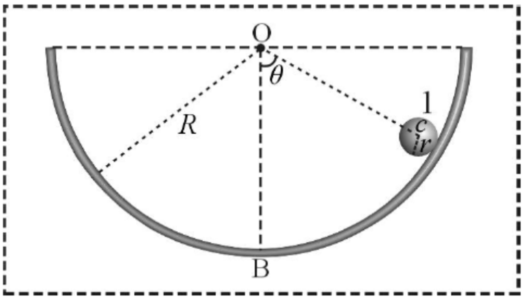
Άρα
$$\upsilon\cdot r\cdot\sin\theta = \frac{L}{m} \qquad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $\Delta A = \frac{1}{2}\frac{L}{m}\cdot\Delta t$ ή $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}$ και στο όριο για $\Delta t \to 0$ βρίσκουμε $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$.

Εφόσον στο υλικό σημείο ασκείται κεντρική δύναμη η στροφορμή του ως προς το κέντρο της δύναμης διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι ο χρονικός ρυθμός με τον οποίο το διάνυσμα θέσης διαγράφει εμβαδόν είναι σταθερός. Δηλαδή $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = σταθ.$ αν $\vec{L} = σταθ.$ (νόμος των εμβαδών)

Ασκήσεις προς λύση

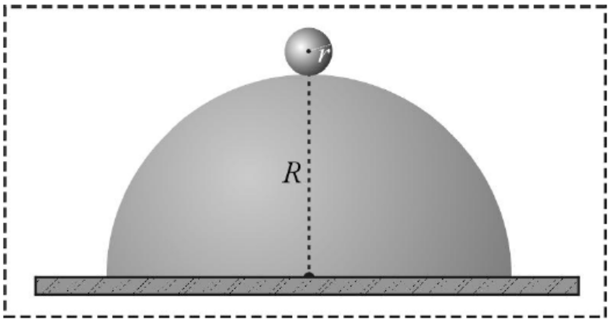
7.19 Σφαίρα μάζας m και ακτίνας r μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό ακλόνητης σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R. Η σφαίρα ξεκινάει από την ηρεμία και από τη θέση 1 που φαίνεται στο Σχήμα 7.87. Να βρείτε: α) το μέτρο της ταχύτητας του κέ-



Σχήμα 7.87

ντρου μάζας c της σφαίρας σε συνάρτηση με τη γωνία φ που σχηματίζει οc με την κατακόρυφη OB. β) το μέτρο της κατακόρυφης αντίδρασης που ασκείται στη σφαίρα από τη σφαιρική επιφάνεια στη θέση B. Τα μεγέθη m, R, θ, g θεωρούνται γνωστά.

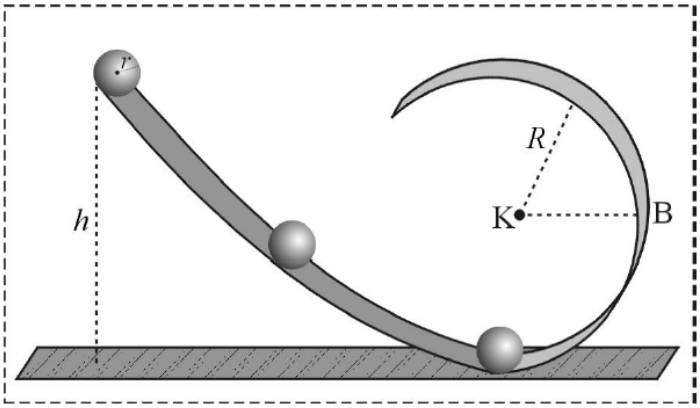
7.20 Ημισφαίριο ακτίνας $R = 1{,}5$ m στερεώνεται με τη βάση του σε οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα 7.88). Στο ανώτατο σημείο του ημισφαιρίου αφήνουμε ομογενή και συ-



Σχήμα 7.88

μπαγή σφαίρα μάζας m και ακτίνας $r = 0{,}2$ m η οποία με μικρή ώθηση αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος ενός μεσημβρινού του ημισφαιρίου. Η σφαίρα εγκαταλείπει κάποια στιγμή το ημισφαίριο. Να υπολογίσετε τότε την κατακόρυφη απόσταση του κέντρου μάζας της σφαίρας από το οριζόντιο επίπεδο.

7.21 Μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται ελεύθερη στο σημείο Α καμπύλης σιδηροτροχιάς Σχήμα 7.89. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και



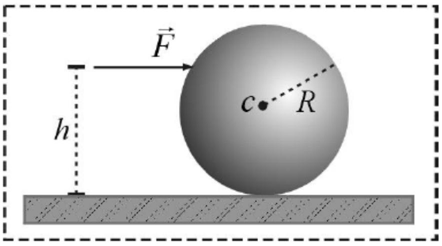
Σχήμα 7.89

εκτελεί ανακύκλωση στο εσωτερικό του κυκλικού οδηγού ακτίνας R. Να υπολογίσετε: α) Το ελάχιστο ύψος h της καμπύλης διδρομής ΑΟ ώστε η σφαίρα να εκτελέσει με ασφάλεια την ανακύκλωση. β) Το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που ασκεί η σφαίρα στον οδηγό, όταν αυτή διέρχεται από το σημείο Β της οριζόντιας διαμέτρου για την ελάχιστη τιμή του ύψους h.

7.22 Ένα μεγάλο κυλινδρικό ρολό λεπτού χαρτιού αρχικής ακτίνας R βρίσκεται πάνω σε μια εκτεταμένη οριζόντια επιφάνεια με το εξωτερικό άκρο του χαρτιού στερεωμένο ώστε να μπορεί να ξετυλίγεται εύκολα. Σπρώχνουμε ελαφρά το ρολό ($\upsilon_0 \cong 0$) ώστε να αρχίσει να ξετυλίγεται.

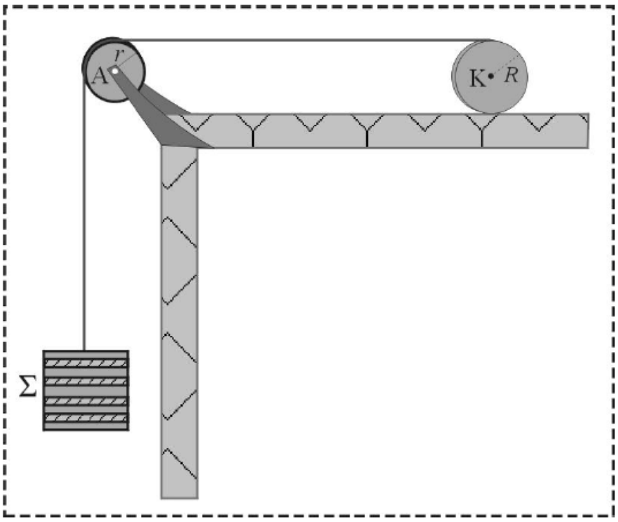
α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του ρολού όταν η ακτίνα ελαττωθεί σε r. β) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή για την ταχύτητα αυτή όταν $r = 0{,}1$ m αν υποτεθεί ότι $R = 0{,}6$ m. γ) Τι συμβαίνει με την ενέργεια του συστήματος όταν το χαρτί έχει ξετυλιχθεί τελείως;

7.23 Μια συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας m και ακτίνας R ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. (Σχήμα 7.90). Σε πόσο ύψος h πρέπει να ασκηθεί στη σφαίρα μια οριζόντια μια οριζόντια δύναμη γαι να αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;



Σχήμα 7.90

7.24 Γύρω από ομογενή κύλινδρο μάζας M = 10 kg και ακτίνας R =0,2 m είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό σχοινί το οποίο διέρχεται από το αυλάκι ομογενούς τροχαλίας μάζας m = 0,5 kg και ακτίνας r = 0,1 m. Στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού είναι συσνδεδεμένο σώμα Σ μάζας m_1= 1 kg (Σχήμα 7.91). Συγκρατούμε το σώμα Σ με το σχοινί τεντωμένο ώστε η διάταξη να ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή t_0= 0 αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ να κατέβει οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Το σχοινί δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Να υπολογίσετε: α) το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ. β) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1=2 s. γ) το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σχοινί στο σώμα Σ. δ) τη δύναμη της στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου - δαπέδου. ε) για ποιές τιμές του συντελεστή στατικής τριβής ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;



Σχήμα 7.91

7.50 Υλικό σημείο μάζας m 0,2 kg κινείται στο επίπεδο xy. Τη χρονική στιγμή που οι συντεταγμένες του είναι [2, 4] m, η ταχύτητα του είναι $\vec{\upsilon} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ (S.I). Προσδιορίστε τη στιγμή αυτή τη στροφορμή του υλικού σημείου ως προς την αρχή των συντεταγμένων.

7.51 Τρία υλικά σημεία με μάζες m_1= 2 kg , m_2= 3 kg και m_3= 5 kg κινούνται σε πεδίο δυνάμεων, έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων Oxyz είναι αντίστοιχα,

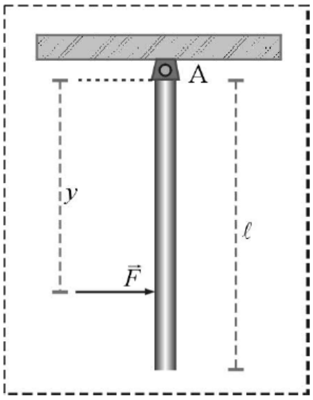
$\vec{r}_1 = 4t\vec{i}$ - $6\vec{j} + 2t^2 k$,

$\vec{r}_2 = 2(t+1)\vec{i} + 6t\vec{j} - 4\vec{k}$ και

$\vec{r}_3 = 2t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + (4t-2)\vec{k}$ στο S.I.

Να βρείτε ως προς την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων: α) την ολική στροφορμή του συστήματος. β) την ολική εξωτερική ροπή που ασκείται πάνω στο σύστημα.

7.52 Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους ℓ και μάζας M κρέμεται απο το ένα άκρο της με τη βοήθεια άθρωσης στο σημείο A. Μία οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ πρόκειται να ασκηθεί για μικρό χρονικό διάστημα στη ράβδο, ώστε με την ώθησή της να θέση τη ράβδο σε κίνηση εκκρεμούς (Σχήμα 7.95). Η διάταξη στήριξης στο A είναι εύθραστη και η δύναμη πρέπει να εφαρμοστεί σε απόσταση y απο το άκρο A, ώστε να μην εκδηλώνεται δύναμη αντίδρασης στο A. Να βρείτε την απόσταση d που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση. Η αντίστοιχη θέση ονομάζεται **κέντρο κρούσης**.



Σχήμα 7.95

Υπόδειξη: *Η δύναμη $\vec{F}$ θα επιταχύνει το κέντρο μάζας της ράβδου και θα δώσει και μια γωνιακή επιτάχυνση ως προς το σημείο A, εξαιτίας της ροπής της ώς προς αυτό το σημείο. Η συνθήκη, για να συμβιβάζονται αυτές οι δύο επιταχύνσεις σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει δύναμη αντίδρασης στο A, θα καθορίσει την απόσταση y ως συνάρτηση του ℓ.*