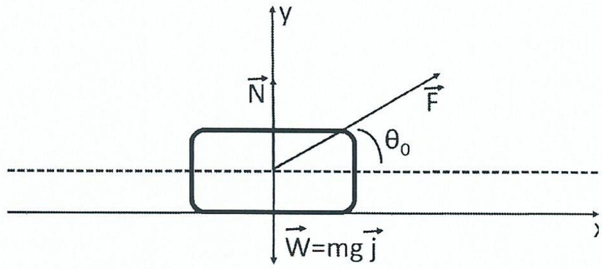
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΥ

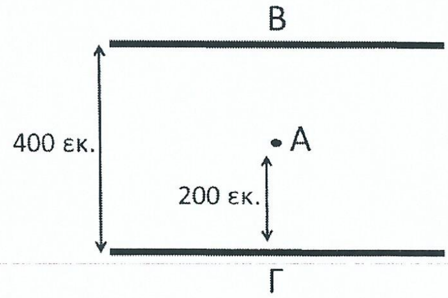
06-ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ-2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ **ΦΥΣΙΚΗ**



ΘΕΜΑ 1 Ένα σώμα είναι ακίνητο σε οριζόντια επιφάνεια η οποία θεωρείται λεία. Τη χρονική στιγμή t=0 sec αρχίζει να εφαρμόζεται στο σώμα μία δύναμη μέτρου 2 mg (όπου m η μάζα του σώματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας στο τόπο που κινείται το σώμα). Η διεύθυνση της δύναμης σχηματίζει μεταβλητή γωνία θ που δίνεται από τη σχέση θ = A x όπου A είναι δεδομένη θετική σταθερά ενώ x είναι η θέση πάνω στον άξονα Ox θεωρώντας ως αρχή το σημείο από το οποίο αρχίζει η κίνηση. Ζητείται η γωνία θ_0, η θέση x_o και η ταχύτητα υ_0 που έχει το σώμα όταν εγκαταλείπει την οριζόντια επιφάνεια. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ 2 Ένα υλικό σημείο που έχει μάζα m ταλαντώνεται αρμονικά (δηλαδή η μετατόπισή του από τη θέση ισορροπίας x υπακούει στη διαφορική εξίσωση $d^2x/dt^2+\omega^2x=0$ όπου ω η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και μπορεί να θεωρηθεί ως γνωστή). **(α)** Να αποδειχθεί ότι οι δύο εκφράσεις $x(t)=A\sin\omega t + B\cos\omega t$ και η $x(t)=C\sin(\omega t+\varphi_0)$ είναι ισοδύναμες υπολογίζοντας τις σταθερές Α και Β συναρτήσει των σταθερών C και φ_0 **(β)** να βρεθεί η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς συναρτήσει του χρόνου t και των σταθερών Α και Β **(γ)** να προσδιοριστούν οι εκφράσεις των Α και Β εάν τη χρονική στιγμή t=0 η μάζα βρίσκεται στη θέση x_0 και έχει ταχύτητα υ_0. **(Μονάδες 2)**



ΘΕΜΑ 3 Ένα μεταλλικό σώμα αφήνεται ελεύθερο σε ένα σημείο Α στο μέσο ενός μαγνητικού πεδίου που έχει μήκος ΒΓ=0.4 m. Εάν το σώμα με την επίδραση του μαγνητικού πεδίου κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση α=5y (S.I.) να υπολογίσετε (α) την ταχύτητα που έχει το σώμα στο σημείο Γ του μαγνητικού πεδίου καθώς και (β) το έργο που παράγει η μαγνητική δύναμη από το σημείο Α στο σημείο Γ αγνοώντας την επίδραση του βαρυτικού πεδίου. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ 4 Διαθέτουμε ένα σώμα μάζας Μ το οποίο έχει σχήμα ημισφαιρίου με ακτίνα R. (α) Ζητείται η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της βάσης του ημισφαιρίου και είναι κάθετος σε αυτή. (β) εάν υποθέσουμε ότι το σώμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω να υπολογιστεί πόσο αυτή θα μεταβληθεί (Δω) εάν η ακτίνα του ημισφαιρίου μειωθεί κατά 20% λόγω απλής συστολής. **(Μονάδες 2)**

ΘΕΜΑ 5 Η Δυναμική ενέργεια μάζας m δίνεται από τη σχέση $U(x,y,z)=A\,(x^2+y^2+2yz)$. (α) να βρεθεί η δύναμη (διανυσματική μορφή) που ασκείται στη μάζα m. Είναι αυτή διατηρητική; (β) να γραφτούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης και (γ) το έργο της δύναμης για μετακίνηση της μάζας m από τη θέση με συντεταγμένες Κ(1,3,2) στη θέση με συντεταγμένες Λ(2,1,3). **(Μονάδες 2)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 1

Για τυχαία θέση x πριν το σώμα εγκαταλείψει το οριζόντιο επίπεδο θα ισχύει:

$$xx': \quad F\cos\theta = m\frac{du}{dt}$$

$$yy': \quad N - mg + F\sin\theta = 0$$

$$2mg\cos(Ax) = mu\frac{du}{dx}$$

γιατί $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\cdot\frac{du}{dx}$

Με ολοκλήρωση

$$2g\int_0^x \cos(Ax)\,dx = \frac{1}{2}u^2 \Rightarrow u^2 = \frac{4g}{A}\sin(kx)$$

Η επαφή με το οριζόντιο επίπεδο χάνεται όταν $N=0$ δηλ $-mg + 2mg\sin\theta_0 = 0 \Rightarrow$

$$\sin\theta_0 = 1/2 \Rightarrow \theta_0 = \pi/6$$

Τότε $\theta_0 = Ax_0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} = Ax_0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{6A}$

Τελικά $u_0^2 = \frac{4g}{A}\sin(Ax_0) = \frac{4g}{A}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{2g}{A}$

$$u_0 = \sqrt{\frac{2g}{A}}$$

Θέμα 2

(α) Έχοντας υπόψη

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

τότε

$$C\sin(\omega t+\phi_0) = C\sin\omega t\cos\phi_0 + C\cos\omega t\sin\phi_0$$
$$= [C\cdot\cos\phi_0]\sin\omega t + [C\sin\phi_0]\cos\omega t$$

Δηλαδή είναι της μορφής $A\sin\omega t + B\cos\omega t$

όπου $A = C\cos\phi_0$
$B = C\cdot\sin\phi_0$

(β) $$\dot{u}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\cdot\omega\cos\omega t - B\cdot\omega\sin\omega t$$

$$a(t) = \frac{du(t)}{dt} = -\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2\cdot B\cos\omega t$$

$$F = ma = -m\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

(γ) Επειδή $x(0) = x_0$ θα έχουμε

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t\Big|_{t=0} = x_0 \Rightarrow A\cdot\sin 0 + B\cos 0 = x_0$$
$$\Rightarrow B = x_0$$

$$u_0 = \frac{dx}{dt}\Big|_{x=x_0} \Rightarrow A\omega\cos\omega t - B\cdot\omega\sin\omega t\Big|_{t=0} = u_0$$

$$A\omega\cos 0 - B\cdot\omega\sin 0 = u_0 \Rightarrow$$
$$u_0 = A\cdot\omega \Rightarrow A = \frac{u_0}{\omega}$$

5′ $$x(t) = \frac{u_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t$$

ΘΕΜΑ 3

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\upsilon} \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\upsilon \cdot d\upsilon = a \cdot dy \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon} \upsilon \cdot d\upsilon = \int_{0,2}^{y} 4 \cdot y \cdot dy \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2} = 4 \frac{y^2}{2} \Big|_{0,2}^{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{2} = 2\left(y^2 - 0,2^2\right) \Rightarrow \upsilon^2 = 4(y^2 - 0,04)$$

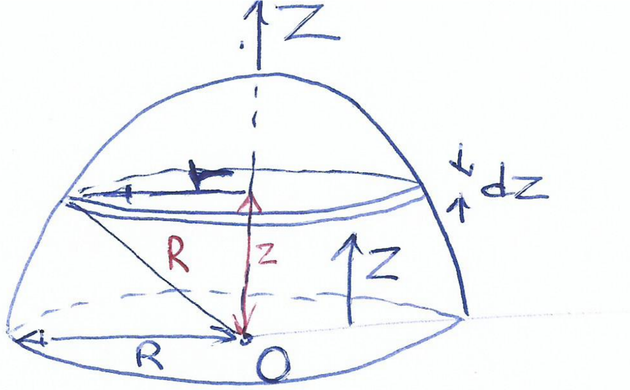
$$\Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{y^2 - 0,04} \quad \text{για} \quad y = 0,4 \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = 2\sqrt{0,4^2 - 0,2^2} = 2\sqrt{0,6 \cdot 0,2}$$

$$= 2\sqrt{0,12} = 0,692 \; m/s$$

$$W_{A\to\Gamma} = K_\Gamma - \cancel{K_A}^{0} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_\Gamma^2 = 0,24\,m \; (J)$$

ΘΕΜΑ 4



Για να βρεθεί η ροπή αδράνειας θεωρούμε λεπτό δίσκο με ακτίνα r, μάζα dm και πάχος dZ. σε τυχαίο ύψος Z.

Τότε $$I=\int Z^2\cdot dm \quad (1)$$

αλλά $$\rho=\frac{dm}{\pi r^2\cdot dz}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3/2}$$ δ' $$r^2+z^2=R^2\Rightarrow r^2=R^2-z^2$$

Τότε ομοιογενής η πυκνότητα γίνεται

$$\frac{dm}{\cancel{\pi}(R^2-z^2)\,dz}=\frac{M}{\frac{2}{3}\cancel{\pi}R^3}\Rightarrow dm=\frac{3M}{R^3}(R^2-z^2)dz \quad (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} I=\int z^2\cdot\frac{3M}{R^3}(R^2-z^2)\,dz\Rightarrow I=\frac{3M}{R^3}\int_0^R(z^2R^2-z^4)\,dz$$

$$=\frac{3M}{R^3}\left[R^2\frac{z^3}{3}\Big|_0^R-\frac{z^5}{5}\Big|_0^R\right]=\frac{3M}{R^3}\left(R^2\cdot\frac{R^3}{3}-\frac{R^5}{5}\right)=$$

$$=\frac{3M}{R^3}\left(\frac{R^5}{3}-\frac{R^5}{5}\right)=\frac{\cancel{3}M}{R^3}\,\frac{2R^5}{\cancel{3}\cdot 5}=\frac{2}{5}MR^2$$

Από την αρχή Διατ. Στροφορμής

$$I_a \cdot \omega_a = I_T \cdot \omega_T \Rightarrow \cancel{\frac{2}{5}} \cancel{M} R^2 \cdot \omega =$$

$$= \cancel{\frac{2}{5}} \cancel{M} (0,8 \cdot R)^2 \cdot \omega_T \Rightarrow \omega_T = \frac{\omega \cdot \cancel{R^2}}{0,64 \cdot \cancel{R^2}}$$

Δηλαδή $\Delta\omega = \dfrac{\omega}{0,64} - \omega = \dfrac{0,36\,\omega}{0,64}$

$\Delta\omega = 0,56\,\omega$

ΘΕΜΑ 5

(α) $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

$= -2Ax\vec{i} - 2A(y+z)\vec{j} - 2Ay\vec{k}$

Είναι διατηρητική γιατί προέρχεται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

(β) $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -2Ax = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ -2A(y+z) = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ -2A\cdot y = m\frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$

(γ) Επειδή το πεδίο είναι διατηρητικό το έργο υπολογίζεται από τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας

$W_{K\to\Lambda} = \int \vec{F}\,d\vec{r} = U(K) - U(\Lambda) =$

$= U(1,3,2) - U(2,1,3) =$

$= A(1^2 + 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2) - A(2^2 + 1^2 + 2\cdot 1\cdot 3) = 11A$