Σώμα βάρους 12N ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο εκτεταμένο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να ενεργεί στο σώμα δύναμη $\vec{F}$ της οποίας η κατεύθυνση σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $37°$ προς τα πάνω (Σχήμα 4.6). Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση $F = 10 + 2x$ (S.I). Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του δαπέδου είναι $\mu_\kappa = 0{,}25$. Να βρείτε για τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση x = 0, μέχρι τη θέση που χάνει την επαφή του με το δάπεδο, α) το έργο δύναμης $\vec{F}$, β) το έργο της τριβής, γ) το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

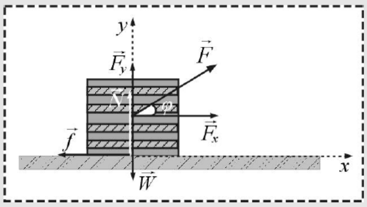
Λύση

α) i. Για όσο χρόνο το σώμα είναι σε επαφή με το οριζόντιο δάπεδο θα ισχύει

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή } F_y + N - W = 0 \text{ ή } N = W - F_y \text{ ή } N = W - F\sin\varphi \text{ ή } N = 12 - (10 - 2x)\cdot\frac{3}{5} \text{ ή}$$

$$N = 6 - 1{,}2x \quad \text{(S.I)} \qquad (1)$$

Στη θέση x_0, που το σώμα χάνει την επαφή του με το δάπεδο, θα ισχύει $N = 0$ ή $6 - 1{,}2x = 0$ ή $x_0 = 5$.



Σχήμα 4.6 *Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Το μετρο της τριβής μεταβάλλεται με το x.*

ii. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για μετατόπιση του σώματος από τη θέση x = 0 μέχρι τη θέση x_0 = 5m θα είναι

$$W_1 = \int_0^{x_0} F_x dx \text{ όπου } F_x = F\cos\varphi = (10 + 2x)\cdot\frac{4}{5} \text{ ή } F_x = 8 + 1{,}6x \text{ (S.I).}$$

Συνεπώς $W_1 = \int_0^5 (8 + 1{,}6x)dx$ ή $W_1 = 8x + 0{,}8x^2\Big|_0^5$ ή $W_1 = 60$ J.

β) Το έργο της τριβής για την ίδια μετατόπιση θα είναι $W_2 = \int_0^{x_0} f \cdot dx$

όπου $f = -\mu_\kappa \cdot N$ ή λόγω της (1) $f = -0{,}25(6 - 1{,}2x)$ ή $f = --1{,}5 + 0{,}3x$ (S.I).

Συνεπώς $W_2 = \int_0^5 (-1{,}5 + 0{,}3x) = \left[-1{,}5x + \frac{0{,}3}{2}x^2\right]_0^5$ ή $W_2 = -3{,}75$ J.

γ) Το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα για τη μετατόπιση του από x = 0 μέχρι x_0 = 5m είναι $W_{O\lambda} = W_{\vec{F}} + W_{\vec{N}} + W_{\vec{W}} + W_{\vec{f}} = (60\text{ J} + 0 + 0 - 3{,}75)$ J ή $W_{O\lambda} = 56{,}25$ J.

Σχόλιο: *Μπορούμε να βρούμε τα W_1, W_2 και από τη γραφική παράσταση των $F_x = 6(x)$ και $f = \varphi(x)$ υπολογίζοντας τα εμβαδά των επιφανειών που περικλείονται μεταξύ των καμπυλών $F_x = 6(x)$ και $f = \varphi(x)$ και του άξονα x΄x.*

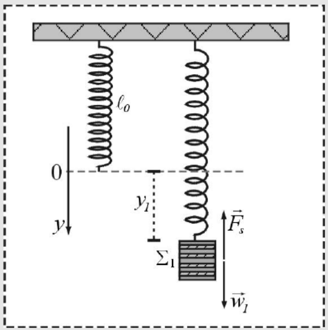
Από το ελεύθερο άκρο ελαφρού ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε οροφή, κρέμεται σώμα Σ_1 μάζας 4 kg. Το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο επιμηκυσμένο κατά 2,5 cm (Σχήμα 4.9). α) Αφαιρούμε τη μάζα των 4 kg και κρεμάμε από το ελατήριο σώμα Σ_2, μάζας 2,4 kg. Πόση θα είναι τώρα η επιμήκυνση του ελατηρίου όταν το σώμα Σ_2 ισορροπεί; β) Πόσο έργο πρέπει να παράγει ένας εξωτερικός παράγοντας για να επιμηκύνει το ελατήριο κατά 5 cm από το φυσικό του μήκος.Το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke.

Λύση

α) Το σώμα Σ_1 ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του $\vec{w}_1$ και της δύναμης του ελατηρίου $\vec{F}_S$.

Ισχύει $\Sigma F_y = 0$ ή $F_S - w_1 = 0$ ή $ky_1 = m_1 \cdot g$ ή $k = \frac{m_1 \cdot g}{y_1} = \frac{4\text{ kg}\cdot 10\text{ ms}^{-2}}{2{,}5\cdot 10^{-2}\text{ m}}$

ή $k = 1600\frac{\text{N}}{\text{m}}$.



Σχήμα 4.9 *Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 ισχύει $\vec{F}_S = -\vec{W}_1$.*

Όταν αφαιρούμε το σώμα Σ_1 και συνδέουμε στο ελατήριο το σώμα Σ_2, στη θέση ισορροπίας θα ισχύει $ky_2 = m_2 \cdot g$ ή $y = \frac{m_1 \cdot g}{k_1} = \frac{4kg\cdot 10\text{ms}^{-2}}{1600\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}$ ή $y_2 = 1{,}5$ cm.

β)Το έργο του εξωτερικού παράγοντα για επιμήκυνση του ελατηρίου κατά $y_0 = 5cm$, από το φυσικό του μήκος, θα είναι αντίθετο του έργου της δύναμης του ελατηρίου.

Δηλαδή $W_{\varepsilon\xi} = -W_S$ ή $W_{\varepsilon\xi} = -\int_0^{y_0}(-ky)dy$ ή $W_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{2}k\,y_0^2 = \frac{1}{2}1600\text{ Nm}^{-1}\cdot 25\cdot 10^{-4}\text{m}^2$ ή $W_{\varepsilon\xi} = 2$ J.

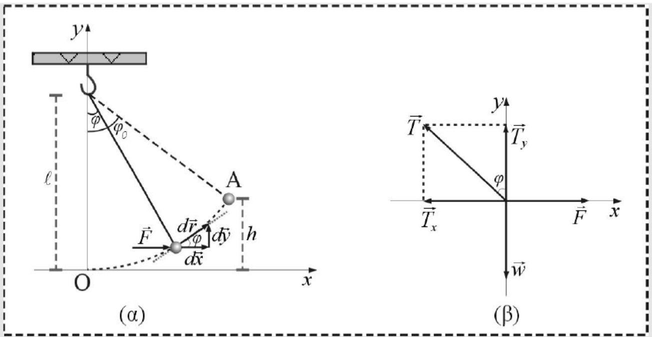
Μικρό σφαιρίδιο μάζας m στερεώνεται στο ένα άκρο αβαρούς χορδής μήκους ℓ, της οποίας το άλλο άκρο μπορεί να στέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο σημείο οροφής (Σχήμα 4.11). Αρχικά το σύστημα ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Ασκούμε στο σφαιρίδιο ορίζοντια δύναμη $\vec{F}$ και μετατοπίζουμε το σφαιρίδιο κατά μήκος κύκλου ακτίνας ℓ από $\varphi_0 = 0$ μέχρι $\varphi = \varphi_0$. Υποθέτουμε ότι η κίνηση του σφαιριδίου γίνεται χωρίς επιτάχυνση και με πρακτικά μηδενική ταχύτητα ώστε να παραμένει το σφαιρίδιο εγγύτατα στη θέση ισορροπίας. Να βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\vec{F}$ κατά τη μετακίνηση αυτή του σφαιριδίου.

Λύση

Για να βρούμε το έργο της δύναμης $\vec{F}$, πρέπει να βρούμε πως μεταβάλλεται η $\vec{F}$ με την γωνία φ. Σε κάθε θέση της διαδρομής του το σφαιρίδιο βρίσκεται σχεδόν σε ισορροπία.

Συνεπώς $\Sigma F_x = 0$ ή $F - T\sin\varphi = 0$ ή $\Sigma F_y = 0$ ή $T\cos\varphi - w = 0$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι

$$F = W \cdot \tan\varphi \qquad (1)$$



Σχήμα 4.11 *α) Το σφαιρίδιο εξαρτάται από αβαρή χορδή μήκους ℓ. Η μέγιστη γωνιακή του ματαόπιση είναι φ_0. β) Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το σφαιρίδιο όταν σε αυτό ασκείται μια οριζόντια δύναμη.*

Το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη $\vec{F}$ ακολουθεί το τόξο s. Το μήκος του τόξου είναι $s = \ell \cdot \varphi$. Η μετατόπιση $d\vec{r}$ η οποία αντιστοιχεί σε μικρή μεταβολή της γωνίας φ έχει μέτρο

$$ds = \ell \cdot d\varphi \qquad (2)$$

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\vec{F}$ είναι $W = \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\varphi_0} F\cos\varphi \cdot ds$ ή λόγω των (1), (2)

$$W = \int_0^{\varphi_0} (w \cdot \tan\varphi)\cos\varphi \cdot \ell d\varphi = w\ell \int_0^{\varphi_0} \sin\varphi \, d\varphi$$

ή

$$W = w\ell(1 - \cos\varphi_0) \qquad (3)$$

α) Αν $\varphi_0 = 0^0$, δεν υπάρχει μετατόπιση και άρα $W = 0$.

β) Αν $\varphi_0 = 90^0$ τότε $\cos\theta = 0$ και $W = w \cdot \ell$. Το έργο της $\vec{F}$ στην περίπτωση αυτή είναι το ίδιο με εκείνο που θα παρήγαγε αν το σφαιρίδιο ανυψώνονταν κατακόρυφα κατάύψος ℓ. Η ποσότητα $\ell(1 - \cos\varphi_0)$ είναι η ανύψωση h του σφαιριδίου πάνω από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του.

Συνεπώς για κάθε τιμή της γωνίας φ_0, το έργο της $\vec{F}$ είναι το γινόμενο της μεταβολής του ύψους του σφαιριδίου επί το βάρος του. Προφανώς το έργο της δύναμης που ασκεί η χορδή στο σφαιρίδιο είναι μηδενικό αφού αυτή είναι συνεχώς κάθετη σε κάθε στοιχειώδη μετατόπιση του.

Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F} = ayx\vec{i} + bxy\,\vec{j}$, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο Α = (0, 0, 0) στο σημείο Β = (R, R, 0), κατά μήκος των εξής διαδρομών: α) κατά μήκος της ευθείας γραμμής που ενώνει τα δύο σημεία, β) κατά μήκος των δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ και ΔΒ, όπου Δ = (R, 0, 0), γ) κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου που γράφεται με κέντρο το σημείο Γ = (0, R, 0) και ακτίνα R και ενώνει τα δύο σημεία.

Λύση

α) Η πρώτη διαδρομή περιγράφεται από την καμπύλη $y(x) = x,\ \ (0 \le x \le R)$, οπότε έχουμε και $dy = dx$, και το έργο υπολογίζεται, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W_{AB,a}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_a\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left(F_x dx+F_y dy\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} aydx+bxdy=(a+b)\int_0^R xdx=\frac{a+b}{2}R^2$$

β) Η δεύτερη διαδρομή χαρακτηρίζεται από δύο τμήματα με διαφορετική αναλυτική έκφραση για το καθένα, οπότε

$$W_{AB,\beta}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_\beta\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\Delta}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}+\int_{\Delta}^{\mathrm{B}}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\quad \int_{\mathrm{A}}^{\Delta}(F_x dx+F_y dy)+\int_{\Delta}^{\mathrm{B}}(F_x dx+F_y dy)$$

Στο πρώτο τμήμα (ΑΔ) ισχύει: $y=0,\ dy=0$ ενώ στο δεύτερο τμήμα (ΔΒ) ισχύει: $x=R,\ dx=0$ επομένως:

$$W_{AB,\beta}\left(\mathrm{F}(\mathrm{r}),C_\beta\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\Delta}\left(F_x(y\quad 0)dx\right)+\int_{\Delta}^{\mathrm{B}}\left(F_y(x\quad R)dy\right)\quad \int_{(0,0,0)}^{(R,0,0)} 0\mathrm{dx}+\int_{(R,0,0)}^{(R,R,0)} bRdy=bR^2$$

[Δείξτε ότι το έργο, για μετακίνηση κατά μήκος της διαδρομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΓΒ, είναι ίσο με aR^2].

γ) Η τρίτη διαδρομή είναι τμήμα του κύκλου $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, όπου $(x_0,y_0)=(0,R)$
Αν λάβουμε υπόψη και τα τερματικά σημεία της καμπύλης, τότε αυτή περιγράφεται από την εξίσωση

$$y=R+\sqrt{R^2-x^2},\quad (0\le x\le R)\ \text{ και, επομένως, }\ dy=\frac{-xdx}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad (0\le x\le R)$$

$$W_{AB,\gamma}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_\gamma\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left(F_x dx+F_y dy\right)=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} aydx+dxdy=\int_0^R\left[\alpha\left(R+\sqrt{R^2-x^2},\right)dx+bx\left(-\frac{xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]\text{ ή,}$$

ισοδύναμα $W_{AB,\gamma}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_\gamma\right)=aR\int_0^R dx+a\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx-b\int_0^R\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι, $\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\arcin\frac{x}{R}$ και,

$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\arcin\frac{x}{R}$ παίρνουμε, τελικά: $W_{AB,\gamma}\left(\vec{F}(\vec{r}),C_\gamma\right)=R^2\left[\alpha^2+\frac{(a-b)\pi}{2}\right]$

Παρατηρούμε ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$, κατά την μετακίνησή της από το σημείο Α στο σημείο Β, εξαρτάται από την διαδρομή η οποία ακολουθείται. Ακόμη και στην περίπτωση δύο διαδρομών ίσου μήκους, [περίπτωση (β) για τις διαδρομές ΑΔΒ και ΑΓΒ], το αποτέλεσμα μπορεί να είναι επίσης διαφορετικό για κάθε διαδρομή.

Υλικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = (3x - 2y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} - x^2\vec{k}$. Να βρείτε το έργο της δύναμης από το (0, 0, 0) εώς το (1, 1, 1) κατά μήκος ενός δρόμου οποίος αποτελείται από: α) την καμπύλη $x = t, y = t^2, z = t^3$, β) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει αυτά τα σημεία, γ) τα ευθύγραμμα τμήματα από το (0, 0, 0) εώς το (0, 1, 0), ύστερα στο (0, 1, 1) και στη συνέχεια στο (1, 1, 1) και δ) την καμπύλη $x = z^2, y = z^2$.

Λύση

α) Κατά μήκος της καμπύλης C είναι $\vec{F} = (3t - 2t^2)\vec{i} + (t^2 + 2t^3)\vec{j} - t^2\vec{k}$ και $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ή $r = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{z}$ ή $d\vec{r} = (\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k})dt$. Συνεπώς

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (3t - 2t^2)dt + (2t^3 + 4t^4)dt - 3t^4 dt \quad \text{ή} \quad W = \frac{23}{15}\,\mathrm{J}$$

β) Κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία (0, 0, 0) και (1, 1, 1) είναι $x = t, y = t, z = t$ και $dx = dy = dz = dt$. Συνεπώς

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left\{(3x - 2y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} - x^2\vec{k}\right\}\left\{dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right\} = \int_C (3x - 2y)dx + (y + 2z)dy - x^2 dz \quad \text{ή}$$

$$W = \int_0^1 (3t - 2t)dt + (t + 2t)dt - t^2 dt \quad \text{ή} \quad W = \frac{5}{3}\,\mathrm{J}.$$

γ) i. Κατά μήκος ευθυγράμμου τμήματος από το (0, 0, 0) εώς το (0, 1, 0) είναι $x = 0, z = 0, dx = dz = 0$ ενώ το y μεταβάλλεται από το 0 εώς το 1. Το έργο κατά μήκος της διαδρομής είναι

$$W_1 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \{(3 \cdot (0) - 2y) \cdot 0 + (y + 2 \cdot (0))dy\} - \{(0)^2\} \cdot 0 = \int_0^1 y\,dy \quad \text{ή} \quad W_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{J}.$$

ii. Κατά το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το (0, 1, 0) εώς το (0, 1, 1) είναι $x = 0, y = 1, dx = dy = 0$ ενώ το z μεταβάλλεται από 0 εώς 1.

Κατά μήκος αυτής της διαδρομής είναι $W_2 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \{(3 \cdot (0) - 2(1))\} \cdot 0 + \{1 + 2z\} \cdot 0 - \{(0)^2\}dz$ ή $W_2 = 0$.

iii. Κατά το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το (0, 1, 1) εώς το (1, 1, 1) είναι $y = 1, z = 1, dy = dz = 0$ ενώ το x μεταβάλλεται από 0 εώς 1. Κατά μήκος αυτής της διαδρομής είναι

$$W_3 = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \{(3 \cdot x - 2 \cdot (1))\} \cdot dx + \{1 + 2 \cdot (1)\} \cdot 0 - 1 \cdot (0) = \int_0^1 (3x - 2)dx \quad \text{ή} \quad W_3 = \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x\right] \quad \text{ή} \quad W_3 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{J}.$$

Το συνολικό έργο είναι $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{2}\mathrm{J} + 0 + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{J}\right)$ ή $W = 0$.

δ) Έχουμε $x = y^2$ άρα $dx = 2zdz$. Επίσης $z = y^2$ ή $y = z^{\frac{1}{2}}$ ή $dy = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$ και το z να μεταβάλλεται από το 0 εως το 1. Συνεπώς

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (3z^2 - 2z^{\frac{1}{2}})2zdz + (z^{\frac{1}{2}} + 2z) \cdot \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz - z^4 dz \quad \text{ή} \quad W = \int_0^1 6z^3 dz - 4z^{\frac{3}{2}}dz + \frac{1}{2}dz + z^{\frac{1}{2}}dz - z^4 dz \quad \text{ή}$$

$$W = \left[\frac{6}{4}z^4 - \frac{8}{5}z^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}z + \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}z^5\right] \quad \text{ή} \quad W = \frac{13}{15}\,\mathrm{J}.$$

Υλικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης $\vec{F} = (2x - y + 4)\vec{i} + (5y + 3x - 6)\vec{j}$.
Να βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος της διαδρομής της περιμέτρου τριγώνου του επιπέδου xy, με κορυφές τα σημεία (0, 0), (3, 0), (3, 2), η οποία διαγράφεται ωρολογιακά.

Λύση

Το έργο τη δύναμης είναι $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_x \cdot dx + F_y dy$ ή $W = \int_C (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$.

i) Κατά τη διαδρομή ΟΑ είναι $y = \frac{2}{3}x$ και το x μεταβάλλεται από το 0 εως το 3.

Είναι $W_{OA} = \int_0^3 (2x - \frac{2}{3}x + 4)dx + (\frac{10}{3}x + 3x - 6)\frac{2}{3}dx$ ή $W_{OA} = \int_0^3 \left(\frac{4}{3}x + 4dx\right) + \left(\frac{38}{9}x - 4\right)dx = \int_0^3 \frac{50}{9}xdx$ ή

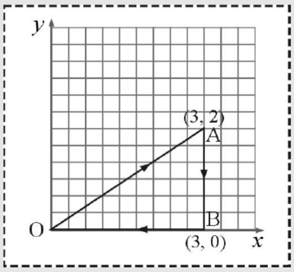
$W_{OA} = 25$ J.

ii. Κατά τη διαδρομή ΑΒ είναι $x = 3$, $dx = 0$ και το y μεταβάλλεται από το 2 εως το 0.

Είναι $W_{AB} = \int_2^0 (6 - y + 4) \cdot 0 + (5y + 9 - 6)dy = \int_2^0 (5y + 3)dy$ ή

$W_{AB} = 5\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^0 + 3[y]_2^0$ ή $W_{AB} = -16$ J.

iii. Κατά τη διαδρομή ΒΟ είναι $y = 0$, $dy = 0$ και το x μεταβάλλεται από 3 εως 0. Συνεπώς $W_{BO} = \int_3^0 (2x - 0 + 4)dx + 0 \quad 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^0 + 4[x]_3^0$ ή $W_{BO} = -21$ J.



Σχήμα 4.13 *Το υλικό σημείο διαγράφει την περίμετρο του τριγώνου ωρολογιακά.*

Το συνολικό έργο είναι $W = W_{OA} + W_{AB} + W_{BO}$ ή $W = -12$ J.

Να βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F} = (2x - y + 4)\vec{i} + (5y + 3x - 6)\vec{j}$ κατά την κίνηση ενός υλικού σημείου πάνω σε κύκλο C, στο επίπεδο xy, αν ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή και ακτίνα 4. Όλα τα μεγέθη μετρώνται στο SI. Ο κύκλος διαγράφεται ανθωρολογικά και μόνο μια φορά.

Λύση

Εκλέγουμε ως παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου τις $x = 4\cos t$ και $y = 4\sin t$ όπου το t μεταβάλλεται από το 0 εώς το 2π. Το έργο της $\vec{F}$ βρίσκεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

$W = \int_0^{2\pi} (2 \cdot 4\cos t - 4\sin t + 4)(-4\sin t)dt + (5 \cdot 4\sin t + 3 \cdot 4\cos t - 6)(4\cos t)$ ή

$W = \int_0^{2\pi} (-32\sin t \cdot \cos t + 16\sin^2 t - 16\sin t + 80\sin t \cdot \cos t + 48\cos^2 t - 24\cos t)dt$ ή

$W = \int_0^{2\pi} 24\sin 2t \cdot dt + 16dt + 32\cos^2 tdt - 16\sin tdt \cdot dt - 24\cos t \cdot dt$ ή

$W = 12\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2t \cdot d(2t)}_{I_1} + 16\underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{I_2} + 32\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot dt}_{I_3} - 16\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t \cdot dt}_{I_4} - 24\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \cdot dt}_{I_5}$

Έχουμε: $I_1 = -\int_0^{2\pi} d\cos 2t = -[\cos 2t]_0^{2\pi}$ ή $I_1 = 0$, $I_2 = \int_0^{2\pi} dt$ ή

$I_2 = 2\pi$, $I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2 tdt$ ή $I_3 = \pi$ και $I_4 = I_5 = 0$.

Άρα $W = 12 \cdot 0 + 16 \cdot 2\pi + 32\pi$ ή $W = 64\pi$ J.

Σημειακό αντικείμενο μάζας 2 kg μετακινείται ευθύγραμμα, από το σημείο Α, με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_A = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ (S.I), στο σημείο Β με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_B = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ (S.I), με την επίδραση δύναμης $\vec{F} = 20\vec{i} - 30\vec{j} + 15\vec{k}$ (S.I). Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου στο σημείο Β, αν στο σημείο Α η ταχύτητά του έχει μέτρο 5 m/s.

Λύση

Σύμφωνα με το Θεώρημα έργου-ενέργειας (Θ.Ε.Ε), κατά τη μετακίνηση του αντικείμενου από το σημείο Α στο σημείο Β, θα ισχύει: $W_F = \Delta K$ ή $W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$ ή $\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_A^2 - 2\frac{W_F}{m}}$ (1)

Η μετατόπιση του αντικειμένου είναι $\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ ή $\vec{r} = 3\vec{i} - 10\vec{j} - 3\vec{k}$ οπότε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι $W_F = \vec{F} \cdot \vec{r} = (30\vec{i} - 30\vec{j} - 15\vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 10\vec{j} - 3\vec{k})$ ή $W_F = 315J$ (2)

Από (1) ,(2) βρίσκουμε $\upsilon_B = \sqrt{25\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} + \frac{2 \cdot 315\mathrm{J}}{2\mathrm{kg}}}$ ή $\upsilon_B = 18{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Σημειακή μάζα *m* κινείται σε μια διάσταση *(x)*, υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με γνωστή συνάρτηση δυναμικής ενέργειας *U* = *U(x)*. α) Αν η μάζα έχει συνολική ενέργεια *E* και τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 βρίσκεται στα σημεία x_1 και x_2, αντίστοιχα, να υπολογιστεί η διαφορά $t_2 - t_1$. β) Αν η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας έχει τη μορφή $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ και η σημειακή μάζα ξεκινάει από το σημείο x_0, με μη μηδενική ταχύτητα, να βρεθεί η θέση της σημειακής μάζας σε συνάρτηση με το χρόνο, $x = x(t)$.

Λύση

α) Η συνολική ενέργεια της σημειακής μάζας είναι $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + U(x)$. Συνεπώς $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = E - U_{(x)}$ ή

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} = dt \quad \text{ή} \quad t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}.$$

β) Για τη συγκεκριμένη μορφή της δυναμικής ενέργειας (δυναμική ενέργεια αρμονικού ταλαντωτή) η συνολική ενέργεια της σημειακής μάζας είναι η ίδια, σε κάθε θέση, κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Δηλαδή $\frac{1}{2}m\upsilon_{(x)}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = E$. Συνεπώς $\upsilon_{(x)} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$ ή $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\int_0^t dt$ ή

$$\arcsin\left[\frac{x}{x_0}\right]_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{ή} \quad \arcsin\frac{x}{x_0} - \arcsin(1) = \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{ή} \quad \arcsin\frac{x}{x_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}.$$

Η αντίστοφη της τελευταίας σχέσης δίνει $x = x_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right)$ ή $x = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

Σχόλιο: Η σημειακή μάζα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Σημειακή μάζα m κινείται κατά μήκος του άξονα $x΄x$ σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = B(x^2 - a^2)^2$. α) Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να τα χαρακτηρίσετε, ως προς το είδος της ισορροπίας (ευσταθής, ασταθής). β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $U(x)$. γ) Περιγράψτε την κίνηση της μάζας m, αν αφεθεί σ'ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0^2 < a^2\sqrt{\frac{2B}{m}}$. δ) Περιγράψτε την κίνηση της μάζας m, αν αφεθεί σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0^2 > a^2\sqrt{\frac{2B}{m}}$.

Λύση

α) Σημεία ισορροπίας. Βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας

$U_{(x)} = B(x^2 - a^2)^2 = B(x^4 - 2a^2x^2 - x^4)$. Έχουμε i. $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$ ή $B(4x^3 - 4a^2x)\big|_{x=x_0} = 0$ ή $x_0 = \{-a, 0, +a\}$

ii. $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = B(12x^2 - 4a^2) = 4B(3x^2 - a^2)$. Για $x = \pm a$ είναι $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm a} = 8Ba^2$ ενώ για $x = 0$,

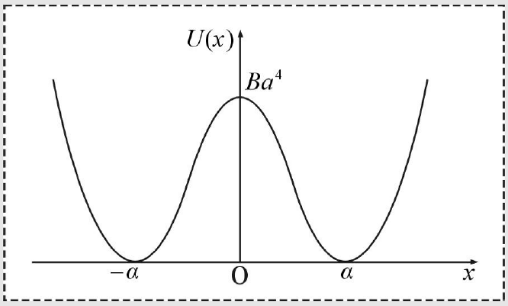
$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm a} = -4Ba^2$. Συνεπώς στα $x = \pm a$ έχουμε τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, άρα ευσταθή ισορροπία, ενώ στο $x = 0$ έχουμε τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας, άρα ασταθή ισορροπία.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας $U(x) = B(x^2 - a^2)^2$ φαίνεται στο σχήμα 4.28.

γ) Αν αφεθεί η μάζα m, σε ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 < \alpha^2\sqrt{\frac{2B}{m}}$, θα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια και κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 < \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\alpha^2\sqrt{\frac{2B}{m}}\right)^2$ ή $K = Ba^4 = U(x=0)$.

Άρα η συνολική ενέργεια $E = K + U$ δεν υπερβαίνει την δυναμική ενέργεια στο $x = 0$, το οποίο θα είναι ένα σημείο αναστροφής. Το άλλο σημείο θα είναι το $x = \pm a\sqrt{2}$, ανάλογα με το αν το σημείο εκκίνησης είναι το $+a$ ή το $-a$.

δ) Αν η μάζα αφεθεί σ'ένα από τα σημεία $x = \pm a$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 > \alpha^2\sqrt{\frac{2B}{m}}$, τότε θα είναι $K > U_{(x=0)}$. Επομένως, θα υπάρχει αρκετή ενέργεια για να υπερβεί το ενδιάμεσο φραγμό της δυναμικής ενέργειας στο $x = 0$, οπότε τα σημεία αναστροφής της κίνησης θα εκτείνονται λίγο περάν $x = \pm a\sqrt{2}$. Αυτό σημαίνει ότι με μια μικρή αύξηση της ταχύτητας εκκίνησης στα $x = \pm a$, πέραν τιμής $\upsilon_0 = \alpha^2\sqrt{\frac{2B}{m}}$ διπλασιάζεται το εύρος της περιοχής στην οποία εκτείνεται η κίνηση της μάζας.



Σχήμα 4.28 *Η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας. Στα σημεία $x = \pm a$ η ισορροπία της σημειακής μάζας είναι ευσταθής, ενώ στο σημείο $x = 0$ η ισορροπία είναι ασταθής.*

α) Δείξτε ότι το πεδίο δυνάμεων $\vec{F} = 8xy\vec{i} + (4x^2 - 8z)\vec{j} - 8y\vec{k}$ (SI) είναι διατηρητικό.
β) Να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας που αντιστοιχεί σ΄αύτο το πεδίο δυνάμεων.
γ) Ένα σημειακό αντικείμενο μάζας $2kg$, κινείται μέσα στο διατηρητικό αυτό πεδιο δυνάμεων και στο σημείο $A(1, -1, 1)$ (m) έχει ταχύτητα μέτρου 4 m/s. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου στο σημείο $B(-1, 2, -1)$ (m).

Λύση

α) Για να είναι το πεδίο δυνάμεων διατηρητικό, θα πρέπει να έχει μηδενικό στροβιλισμό. Δηλαδή, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ή

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1)$$

Είναι

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = -8 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = -8$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 8x \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 8x$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις και την (1) προκύπτει $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, συνεπώς το πεδίο είναι διατηρητικό.
β) Εφόσον το πεδίο είναι διατηρητικό, θα ισχύει

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad \text{ή} \quad -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = 8xy\vec{i} + (4x^2 - 8z)\vec{j} - 8y\vec{k} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -8xy \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -(4x^2 - 8z) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -(-8y) \qquad (4)$$

Ολοκληρώνουμε την (2) ως προς x με y, z σταθερά

$$U = -\int(8xy)dx = -4x^2y - \varphi_1(y, z) \qquad (5)$$

Ολοκληρώνουμε την (3) ως προς y με x, z σταθερά

$$U = -\int(4x^2 - 8z)dy \quad -4x^2y + 8yz + \varphi_2(x, z) \qquad (6)$$

Ολοκληρώνουμε την (4) ως προς z με x, y σταθερά

$$U = -\int(-8xy)dx \quad 8yz + \varphi_3(x, y) \qquad (7)$$

Οι εξισώσεις (5), (6), (7) συνεπάγονται μια κοινή τιμή U για τη δυναμική ενέργεια, αν πάρουμε,

$\varphi_1(y, z) = 8yz + c$, $\varphi_2(x, z) = c$ και $\varphi_3(x, y) = -4x^2y + c$.

Η κοινή τιμή της δυναμικής ενέργειας είναι $U = -4x^2y + 8yz + c$ (8) όπου c αυθαίρετη σταθερά.

γ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Έργου – Ενέργειας έχουμε $\Delta K = W_F = -\Delta U$ ή $\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 = U_B - U_A$ ή

$$U_B = \sqrt{U_A^2 = \frac{2}{m}(U_A - U_B)} \qquad (9)$$

Από την (8) προκύπτει

$U_A = U(1, -1, 1) \quad -4(1)^2(-1) + 8(-1)\cdot 1 = -4$ J και $U_B = U(-1, 2, -1) \quad -4(-1)^2 \cdot 2 + 8\cdot 2\cdot(-1) = -24$ J

Με αντικατάσταση στην (9) βρίσκουμε $\upsilon_B = \sqrt{16\ \text{m}^2\text{s}^{-2} + \frac{2}{2\ \text{kg}}[-4\ \text{J} - (-24\ \text{J})]}$ ή $\upsilon_B = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Προς Λύση

4.32 Να βρείτε το έργο της δύναμης

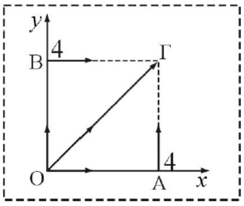
$$\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j}$$

από το Α(0, 0) εως το Β(1, 1) κατά μήκος: α) της ευθείας $x = y$, β) της παραβολής $x = y^2$, γ) της παραβολής $y = x^2$.

4.33 Υλικό σημείο κινείται πάνω στο επίπεδο xy με την επίδραση δύναμης

$$\vec{F} = 2y\vec{i} + 2x^2\vec{j} \text{ S.I.}$$

Το υλικό σημείο κινείται από την αρχή των συντεταγμένων σε μια τελική θέση με συντεταγμένες $x = 4$m, $y = 4$m όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.36. Να βρείτε το έργο της δύναμης κατά μήκος διαδρομής: α) ΟΑΓ, β) ΟΒΓ, γ) ΟΓ.



Σχήμα 4.36

4.34 Να βρείτε το έργο της δύναμης

$$\vec{F} = 3x^2\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

η οποία μετατοπίζει υλικό σημείο από το Α (0, 0, 0) στο Β(1, 1, 1) πάνω σε καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

4.35 Υλικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης $\vec{F} = -k\vec{r}$. Να βρείτε το έργο της δύναμης για την μετακίνηση του υλικού σημείου από τη θέση $\vec{r}_0$ στη θέση $\vec{r}_1$.

Παράγραφοι 4,8, 4,9, 4,10, 4,11, 4,12

4.36 Υλικό σημείο κινείται κατά τον άξονα $x'x$ μέσα σε πεδίο δυνάμεων με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = 2x^3$ (S.I). Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο στη θέση $x = 2$ m.

4.37 Ένα αντικείμενο κινείται στο επίπεδο xy μέσα σε ένα πεδίο δυνάμεων με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x, y) = A(x^2 + y^2) + Bxy$ όπου A, B είναι σταθερές. Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο αντικείμενο.

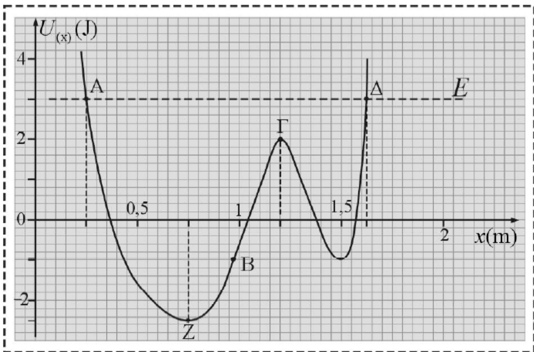
4.38 Ένα συγκεκριμένο ελατήριο δεν ακολουθεί το νόμο του Hooke αλλά ασκεί μια δύναμη επαναφοράς

$$F_x(x) = -80x + 15x^2 \text{ (S.I)}$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση της ελαστικής δυναμικής ενέργειας για το ελατήριο αυτό, θεωρώντας ότι $U = 0$ όταν $x = 9$. β) Το ένα άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο και στο άλλο άκρο του συνδέεται σώμα μάζας $m = 1$ kg. Το ελατήριο διατηρείται οριζόντιο, στο φυσικό του μήκος, με το σώμα να ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Απομακρύνουμε το σώμα, από τη θέση $x = 0$, κατά τη διεύθυνση του άξονα ελατηρίου μέχρι τη θέση $x_1 = +1$ m και το αφήνουμε ελεύθερο. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση $x_2 = +0{,}5$ m.

4.39 Σε ένα υλικό σημείο ενεργούν πολλές δυνάμεις. Μια από αυτές είναι η $\vec{F} = -6xy^2\vec{j}$. Θεωρούμε τη μετατόπιση του αντικειμένου από τη θέση Ο(0, 0) στη θέση Β (4 m, 4 m). Να βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F}$, α) αν η μετατόπιση γίνεται κατά μήκος της ευθείας $y = x$, β) αν η μετατόπιση γίνεται κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων από το Ο(0, 0) στο Α(4, 0) και ύστερα στο Β(4, 4). Είναι η $\vec{F}$ διατηρητική;

4.40 Ένα σημειακό αντικείμενο κινείται κατά τη διεύθυνση $x'x$ ενώ πάνω του ενεργεί μια και μόνη διατηρητική δύναμη παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. Η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας που συνδέεται με τη διατηρητική αυτή δύναμη απεικονίζεται στο Σχήμα 4.37. Το αντικείμενο ηρεμεί στη θέση Α και κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερο. α) Ποιά είναι η κατεύθυνση της δύναμης που ενεργεί στο αντικείμενο όταν αυτό βρίσκεται στις θέσεις Α και Β; β) Σε ποιά τιμή του x αντιστοιχεί η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το αντικείμενο; γ) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο αντικείμενο όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο Γ; δ) Ποιά είναι η μέγιστη τιμή του x στην οποία φθάνει κατά τη διάρκεια της κίνησής του το αντικείμενο; ε) Ποια ή ποιες οι τιμές του x αντιστοιχούν σε θέσεις: 1. ευσταθούς ισορροπίας και 2. ασταθούς ισορροπίας.



Σχήμα 4.37

4.41 Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ μέσα σε πεδίο δυνάμεων με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x}$. α) Να σχεδιάσετε ποιοτικά την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας, β) το υλικό σημείο αφήνεται ελεύθερό στη θέση $x_0 = \frac{\alpha}{\beta}$. Να βρείτε την ταχύτητα υ υλικού σημείου σε συνάρτηση με τη θέση x κια να την παραστήσετε γραφικά. Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του υλικού σημείου, γ) σε ποιά θέση ταχύτητα του υλικού σημείου έχει μέγιστο μέτρο και πόσο είναι αυτό; δ) έστω ότι το υλικό σημείο δεν αφήνεται ελεύθερο στη θέση x_0, αλλά στη θέση $x_1 = \frac{3\alpha}{\beta}$. Να βρείτε πάλι τη συνάρτηση $U(x)$ και να περιγράψετε ποιοτικά την κίνηση του υλικού σημείου.

4.42 Υλικό σημείο το οποίο ηρεμεί στην αρχή των αξόνων μετακινειται με την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = 10\vec{i} - 6\vec{j}$ (S.I) στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$ (S.I). Να βρείτε: α) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για τη μετακίνηση αυτή. Είναι απαραίτητο να καθοριστεί η τροχιά που ακολούθησε το υλικό σημείο; β) τη μέση ισχύ αν η μετακίνηση πραγματοποιήθηκε σε χρόνο 0,7 s. γ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου.

4.43 Υλικό σημείο κινείται μέσα σε πεδίο δυνάμεων του οποίου η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας μπορεί να είναι α) $U = A\,x^n$, β) $U = B\,y^n$, γ) $U = axy$, δ) $U = \beta xvz$, ε) $U = k(x^2 + y^2 + z^2)$. Να εκφράσετε για κάθε περίπτωση το πεδίο σε διανυσματική μορφή.

4.44 Σημειακό αντικείμενο βρίσκεται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης στην οποία αντιστοιχεί η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = 3x^3 - x^3$ (S.I). α) Να σχεδιάσετε ποιοτικά την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας. β) Προσδιορίστε την κατεύθυνση της δύναμης σε κάθε κατάλληλη περιοχή συντεταγμένης x. γ) Περιγράψτε τις δυνατές κινήσεις του υλικού σημείου για διαφορετικές τιμές της ολικής του ενέργειας. Προσδιορίστε τις θέσεις ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας του υλικού σημείου.

4.45 Η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας υλικού σημείου το οποίο κινείται σε μια διάσταση είναι

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - a^2) + mg(x - a)$$

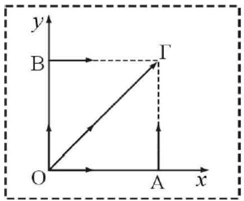
α) Να βρείτε τη μαθηματική έκφραση για τη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο. β) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα σε συνάρτηση με το x για τη δυναμική ενέργεια $U(x)$ και τη δύναμη $F(x)$. γ) Αν το σημείο κινείται με σταθερή ενέργεια E, $(E = U + K)$, σε ποιο σημείο είναι μέγιστη η κινητική ενέργεια και ποια είναι μέγιστη τιμή της;

4.46 Η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο νουκλεονίων περιγράφεται με αρκετή ακρίβεια από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας Yukawa $U_{(r)} = -\frac{r_0}{r} \cdot U_0\, e^{-\frac{r}{r_0}}$ όπου το U_0 είναι περίπου 50 Mev και το $r_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-15}$. α) Να βρείτε τη δύναμη μεταξύ των νουκλεονίων ως συνάρτηση της μεταξύ τους απόστασης r. β) Για να δείξετε τη μικρή εμβέλεια αυτής της δύναμης βρείτε το λόγο της δύναμης για $r = 4r_0$ προς τη δύναμη για $r = r_0$.

4.47 Να δείξετε ότι κάθε σταθερή δύναμη είναι διατηρητική. Ως μια ειδική περίπτωση υποθέστε ότι ένα υλικό σημείο με την επίδραση της δύναμης

$$\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} \quad \text{(S.I)}$$

μετακινείται από το σημείο Ο στο σημείο Γ όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.38. Να βρείτε τα έργα της δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος των δρόμων ΟΑΓ, ΟΒΓ και ΟΓ.



Σχήμα 4.38

4.48 Σε υλικό σημείο ασκείται μια μοναδική διατηρητική δύναμη που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{F} = (-\alpha x + \beta x^2)\vec{i} \quad \text{(S.I)}$$

όπου α και β είναι σταθερές. α) Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια που συνδέεται με τη δύναμη αυτή αν είναι $U = 0$ όταν $x = 0$. β) Να βρείτε τις μεταβολές της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας του υλικού σημείου καθώς αυτό κινείται από τη θέση $x_1 = 4$ m και $x_2 = 5$ m.

4.49 Σώμα μάζας $m = 2$ kg κινείται με την επίδραση μιας μόνο σταθερής δύναμης $\vec{F} = (2\vec{i} + 5\vec{j})$ (S.I). α) Να βρείτε το έργο αυτής της δύναμης κατά την μετακίνηση του σώματος από την αρχή των συντεταγμένων εως το σημείο Α, με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ (S.I). Εξαρτάται το αποτέλεσμα από τη διαδρομή; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. β) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος στο Σ αν η ταχύτητα στην αρχή είναι $\upsilon_0 = 5$ m/s. γ) Ποια είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος;

4.50 **Α.** Η Δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δυο υλικών σημείων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r είναι $U(r) = \frac{k}{r}$, όπου k είναι μια σταθερά. Να βρείτε την ακτινική δύναμη F_r.

Β. Η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας για ένα σύστημα είναι $U = \alpha x^2 - \beta x$ όπου α και β σταθερές. α) Να βρείτε τη δύναμη F_x που συνδέεται με αυτήν τη δυναμική ενέργεια. β) Για ποια τιμή του x είναι $F_x = 0$;

4.51 Για μια δισδιάστατη δύναμη η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας έχει τη μορφή $U = 4x^3 y - 10x$. Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σημείο x, y.

4.52 Δίνονται οι παρακάτω δυνάμεις: i. $F_x = \alpha\beta + \beta x^2$ και ii. $F_x = Ae^{kx}$. όπου α, β, A, k σταθερές. α) Να αποδείξετε ότι οι δυνάμεις αυτές είναι διατηρητικές. β) Να βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας όταν $x_1 = 0$ και $x_2 = x$.

4.53 Να βρείτε τις δυνάμεις που αντιστοιχούν στις παρακάτω συναρτήσεις δυναμικής ενέργειας:

α) $\frac{A}{y}$ β) λx^3 γ) $\frac{e^{-kr}}{r}$

4.54 Η δύναμη που ασκείται σε υλικό σημείο περιγράφεται από τη σχέση $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$. Να δείξετε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι

$F_x dx + F_y dy + F_z dz$ τέλειο διαφορικό είναι ή $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

4.55 A. Να βρείτε τις σταθερές *A, B, Γ* ώστε το πεδίο δυνάμεων

$\vec{F} = (x + 3y + Az)i + (Bx - 4y - z)j + (5x + \Gamma y + 4z)\vec{k}$

να είναι διατηρητικό.

B. Ποια είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας αντιστοιχεί σε αυτό το πεδίο δυνάμεων;΄

4.56 Να δείξετε ότι το πεδίο δυνάμεων

$\vec{F} = (y^2 - 2xyz^3)\vec{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\vec{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\vec{k}$

είναι διατηρητικό και να βρείτε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας που αντιστοιχεί σε αυτό.

4.57 Υλικό σημείο κινείται με την επίδραση δύναμης

$\vec{F} = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (2y\sin x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$

α) Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική. β) Βρείτε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας που αντιστοιχεί στη δύναμη $\vec{F}$. γ) Βρείτε το έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση του υλικού σημείου, από το Α(0, 1, –1) στο Β($\frac{\pi}{2}$, –1, 2).

4.58 α) Να εξετάσετε αν το ανεξάρτητο από το χρόνο πεδίο δυνάμεων $\vec{F} = a(x - y + z)\vec{i} + [a(x + y) - bz^2]\vec{j} + 4ax\vec{k}$ είναι διατηρητικό. β) Να βρείτε το έργο του πεδίου πάνω σε υλικό σημείο το οποίο διαγράφει κύκλο, στο επίπεδο *xy*, με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα *R*.

4.59 A. Υλικό σημείο κινείται με την επίδραση δύναμης $\vec{F} = kr^n \cdot \vec{r}$. Να βρείτε το έργο της δύναμης πάνω σε υλικό σημείο κατά τη μετακίνησή του από τη θέση $\vec{r}_0$ στη θέση $\vec{r}$.

B. Να εξετάσετε αν το έργο της δύναμης

$\vec{F} = (2 \cdot e^{-y})\vec{i} + (\cos z - x^2e^{-y})\vec{j} - (y\sin z)\vec{k}$

που ασκείται πάνω σε σωματίδιο από μια θέση Α σε μια θέση Β εξαρτάται από την καμπύλη που συνδέει τα Α και Β.

4.60 Υλικό σημείο μάζας m κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα *x΄x* με την επίδραση δύναμης $\vec{F} = F_x\vec{i}$. Αν η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου είναι $K = \lambda \cdot t^2$, όπου λ σταθερά ανεξάρτητη του t, να βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$. Είναι διατηρητική;