Μια δύναμη $\vec{F} = 2t \cdot \vec{i} + (3 - t) \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k}$ (N) ασκείται πάνω σε σώμα μάζας 4 kg. Αν για $t = 0$ η ταχύτητα του σώματος είναι: $\vec{\upsilon} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\,\mathrm{m/s}$, να βρείτε την ταχύτητα του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t = 4\,\mathrm{s}$.

Λύση

i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Ώθησης ορμής στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 4\,\mathrm{s}$. Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (5.10). Έχουμε:

$$\upsilon_{1x} = -6\,\mathrm{m/s} \qquad F_x = 2t\ (\mathrm{N})$$
$$\upsilon_{1y} = 2\,\mathrm{m/s} \qquad F_y = 3 - t\ (\mathrm{N})$$
$$\upsilon_{1z} = -4\,\mathrm{m/s} \qquad F_z = t^3\ (\mathrm{N})$$

ii) $$m \cdot \upsilon_{1,x} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m \cdot \upsilon_{2,x} \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,x} = \upsilon_{1,x} + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F_x dt \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,x} = -6 + \frac{1}{4}\int_0^4 2t dt = -6 + \frac{2}{4} \cdot \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^4 = -6 + \frac{16}{4} \ \text{ ή}$$

$\upsilon_{2,x} = -2\,\mathrm{m/s}$.

$$m \cdot \upsilon_{1,y} + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m \cdot \upsilon_{2,y} \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,y} = \upsilon_{1,y} + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F_y dt \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,y} = 2 + \frac{1}{4}\int_0^4 (3 - t) dt = 2 + \frac{3}{4} \cdot \left. t \right|_0^4 - \left.\frac{t^2}{8}\right|_0^4 \ \text{ ή}$$

$\upsilon_{2,y} = 2 + \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{16}{8}$ ή $\upsilon_{2,y} = 3\,\mathrm{m/s}$.

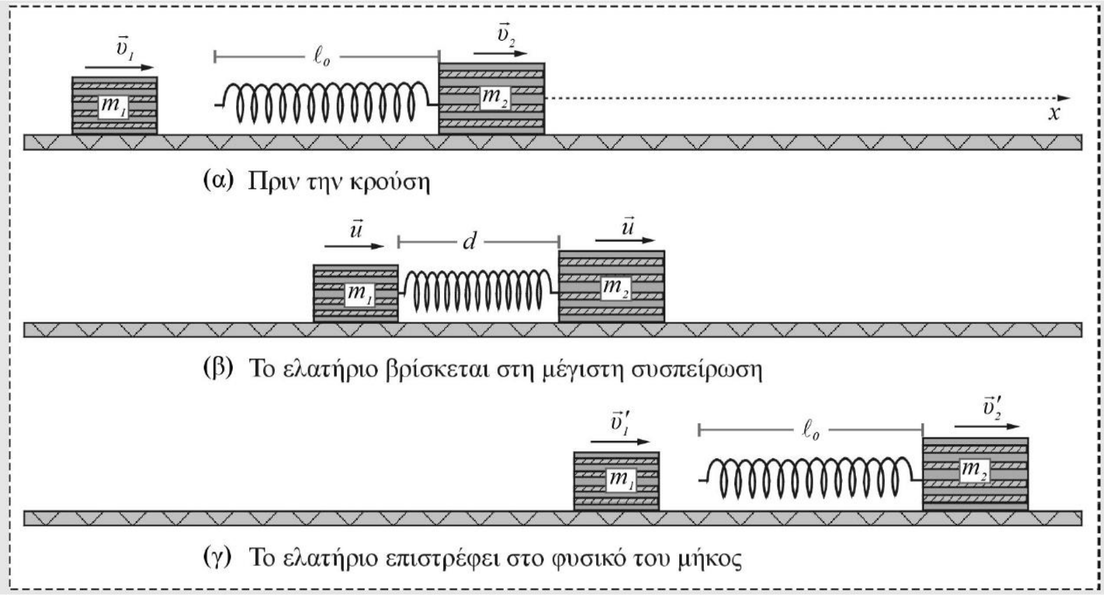
$$m \cdot \upsilon_{1,z} + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = m \cdot \upsilon_{2,z} \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,z} = \upsilon_{1,z} + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F_z dt \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,z} = -4 + \frac{1}{4}\int_0^4 t^3 dt = -4 + \left.\frac{t^4}{16}\right|_0^4 \ \text{ ή } \ \upsilon_{2,z} = 12\,\mathrm{m/s}.$$

Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 4\,\mathrm{s}$ είναι: $\vec{\upsilon} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$ (m/s).

Ένας κύβος μάζας $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ κ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου 10 m/s. Μπροστά του προς την ίδια κατεύθυνση, του άξονα $x'x$ κινείται ομαλά ένας άλλος κύβος μάζας $m_2 = 8\,\mathrm{kg}$ με ταχύτητα μέτρου 5 m/s στην πίσω πλευρά του οποίου είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς 1000 N/m και φυσικού μήκους ℓ_0 = 1 m. Ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με τον άξονα x πάνω στον οποίο βρίσκονται τα κέντρα μάζας των δυο κύβων. Να βρείτε: α) Την ελάχιστη απόσταση που θα πλησιάσουν μεταξύ τους οι δυο κύβοι. β) Τις ταχύτητες των κύβων όταν το ελατήριο αποκτήσει ξανά το φυσικό του μήκος.

Λύση

α) i) Η ελάχιστη απόσταση στην οποία πλησιάζουν οι κύβοι μεταξύ τους αντιστοιχεί στη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου. Αυτό θα συμβεί τη στιγμή κατά την οποία οι κύβοι θα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα.



(α) Πριν την κρούση

(β) Το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συσπείρωση

(γ) Το ελατήριο επιστρέφει στο φυσικό του μήκος

ii) Τη στιγμή κατά την οποία ο κύβος m_1 αρχίζει να συμπιέζει το ελατήριο, η ορμή του συστήματος είναι:

$$p_{αρχ} = m_1 υ_1 + m_2 υ_2 \quad (1)$$

Ενώ τη στιγμή κατά την οποία το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συσπείρωση του η ορμή του συστήματος είναι:

$$p_{τελ} = (m_1 + m_2)u \quad (2)$$

iii) Η ορμή του συστήματος των δυο κύβων διατηρείται. Συνεπώς $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$ και λόγω των (1), (2)

$$m_1 υ_1 + m_2 υ_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad ή \quad u = \frac{m_1 υ_1 + m_2 υ_2}{m_1 + m_2} \quad ή \quad u = \frac{2\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} + 8\,\mathrm{kg} \cdot 5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{10\,\mathrm{kg}} \quad ή \quad u = 6\,\mathrm{m/s}$$

iv) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος κύβοι - ελατήριο διατηρείται.

$$\mathrm{E}_{\mathrm{M}\,(αρχ)} = \mathrm{E}_{\mathrm{M}\,(τελ)} \quad ή \quad \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + \frac{1}{2}\mathrm{k}x^2 \quad ή \quad x = \sqrt{\frac{m_1 υ_1^2 + m_2 υ_2^2 - (m_1 + m_2) \cdot u^2}{\mathrm{k}}} \quad ή$$

$$x = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{kg} \cdot 100\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} + 8\,\mathrm{kg} \cdot 25\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}} - 10\,\mathrm{kg} \cdot 36\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{100\,\mathrm{N\,m^{-1}}}} \quad ή \quad x = 0{,}2\,\mathrm{m}.$$

Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κύβων είναι: $d = \ell_0 - x = 1\,\mathrm{m} - 0{,}2\,\mathrm{m}$ ή $d = 0{,}8\,\mathrm{m}$

β) Το ελατήριο στη συνέχεια επιστρέφει στο φυσικό του μήκος. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των κύβων.

Έστω $\vec{υ}_1'$, $\vec{υ}_2'$ οι ταχύτητες των κύβων τη στιγμή κατά την οποία το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος. Εφαρμόζουμε τις αρχές διατήρησης της ορμής και της μηχανικής ενέργειας και έχουμε:

$$m_1 υ_1 + m_2 υ_2 = m_1 υ_1' + m_2 υ_2' \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2^2 = \frac{1}{2} m_1 υ_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2'^2 \quad (4)$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3) και (4) βρίσκουμε: $υ_1' = 2\,\mathrm{m/s}$, $υ_2' = 7\,\mathrm{m/s}$

Υλικό σημείο μάζας $m_A = 2\,\mathrm{kg}$ έχει ταχύτητα $\vec{υ}_A = 2\vec{i} - 10\mathrm{t} \cdot \vec{j}$ (S.I) και υλικό σημείο μάζας $m_B = 3\,\mathrm{kg}$ έχει ταχύτητα $\vec{υ}_2 = 4\vec{i}$ (S.I). Τη χρονική στιγμή $t = 1\,\mathrm{s}$ να βρείτε για το κέντρο μάζας του συστήματος των υλικών σημείων: α) την ταχύτητα, β) την επιτάχυνση και γ) την ορμή.

Λύση

α) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας, κάθε στιγμή, βρίσκεται από την εξίσωση:

$$\vec{υ}_{cm} = \frac{m_A \vec{υ}_A + m_B \vec{υ}_B}{m_A + m_B} \quad ή \quad \vec{υ}_{cm} = \frac{2\,\mathrm{kg}(2\vec{i} - 10t \cdot \vec{j})\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} + 3\,\mathrm{kg} \cdot 4i\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{kg}} \quad ή$$

$$\vec{υ}_{cm} = 3{,}2\vec{i} - 4\mathrm{t} \cdot \vec{j} \quad (1)$$

Για $t = 1\,\mathrm{s}$ από (1) βρίσκουμε: $\vec{υ}_{cm} = 3{,}2\vec{i} - 4\vec{j}$ (S.I).

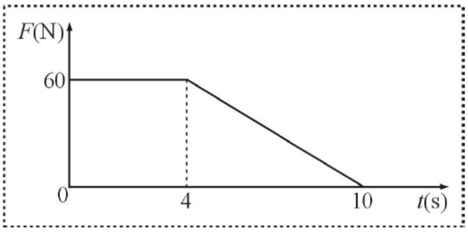
β) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας κάθε στιγμή είναι: $\vec{α}_{cm} = \frac{d\vec{υ}_{cm}}{dt}$ και λόγω της (1): $\vec{α}_{cm} = -4j\ \mathrm{m/s^2}$ ανεξάρτητη του t. Συνεπώς και για $t = 1\,\mathrm{s}$ έχουμε $α_{cm} = -4j\ \mathrm{m/s^2}$.

γ) Η ορμή του κέντρου μάζας είναι η συνολική ορμή του συστήματος $\vec{p}_{ολ} = (m_A + m_B) \cdot \vec{υ}_{cm}$ ή

$\vec{p}_{ολ} = 5\ \mathrm{kg} \cdot (3{,}2\vec{i} - 4t \cdot \vec{j})$ ή $\vec{p}_{ολ} = 16\vec{i} - 20t \cdot \vec{j}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Για $t = 1\,\mathrm{s}$ έχουμε $\vec{p}_{ολ} = 16\vec{i} - 20\vec{j}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Προς Λύση

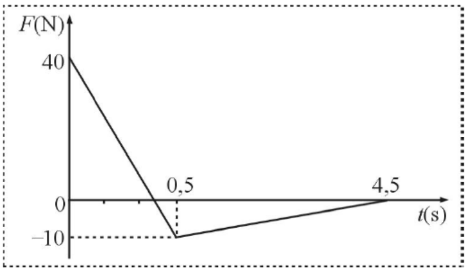
5.1 Σώμα μάζας $m = 10\,\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο και τη στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να ασκείται σε αυτό οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.58. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος – δαπέδου είναι $\mu = 0{,}2$. Να βρείτε: α) την ταχύτητα του



Σχήμα 5.58

σώματος τις χρονικές στιγμές: i) $t_1 = 4\text{ s}$ ii) $t_2 = 10\text{ s}$. β) το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος και την αντίστοιχη χρονική στιγμή. γ) τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα σταματά.

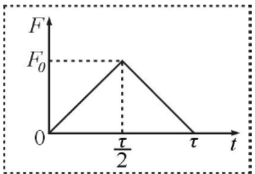
5.2 Σώμα μάζας $m = 4\,\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Τη στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να ενεργεί στο σώμα οριζόντια δύναμη της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο σχήμα 5.59. Ο συντελε-



Σχήμα 5.59

στής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος δαπέδου είναι $\mu = 0{,}25$. Να βρείτε: α) το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το σώμα. b) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή $t = 1{,}5$ s.

5.3 Σώμα βάρους w ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να ενεργεί δύναμη της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.60. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος – δαπέδου είναι μ.



Σχήμα 5.60

Να βρείτε: α) την τιμή F_0 της F, ώστε το σώμα να αρχίσει να κινείται πάνω στο δάπεδο και να επιστρέψει στην ηρεμία τη στιγμή τ. β) το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος.

5.4 Σε υλικό σημείο μάζας $m = 2\,\text{kg}$ ασκείται δύναμη

$$\vec{F} = (4-3t)\cdot\vec{i} + (2-t^2)\cdot\vec{j} + (2+t)\cdot\vec{k}\ \ (\text{N})$$

Αν για $t_0 = 0$ η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι $\vec{\upsilon}_0 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}\,(\text{m/s})$. Να βρείτε: α) μετά από πόσο χρόνο η ταχύτητα του υλικού σημείου θα είναι παράλληλη στο επίπεδο yz. β) την αντίστοιχη ταχύτητα του υλικού σημείου.

5.5 Υλικό σημείο μάζας 1 kg κινείται στο πεδίο δυνάμεων $\vec{F} = (3t^2 - 4t)\cdot\vec{i} + (12t - 6)\cdot\vec{j} + (6t - 12t^2)\cdot\vec{k}$ (N)
α) Να βρείτε τη μεταβολή της ορμής του υλικού σημείου από τη στιγμή $t_1 = 1\text{s}$ έως τη στιγμή $t_2 = 2\text{s}$.
β) Αν τη στιγμή $t_1 = 1\text{s}$ η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι $\vec{\upsilon}_1 = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k}\,(\text{m/s})$ να βρείτε την ταχύτητα του τη στιγμή $t_2 = 2\text{s}$.

5.6 Να βρείτε το μέτρο της μεταβολής της ορμής υλικού σημείου μάζας 0,2 kg όταν μεταβάλλεται η ταχύτητα της από $\vec{\upsilon}_1 = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$ (m/s) σε $\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\,(\text{m/s})$.

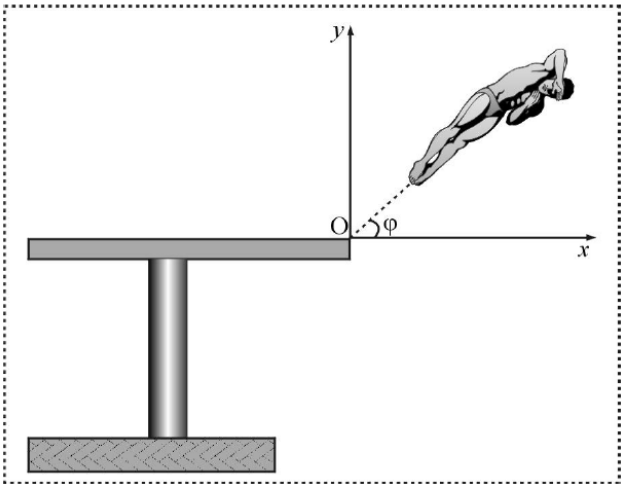
5.7 Σε υλικό σημείο μάζας 2 kg ενεργεί δύναμη, $\vec{F} = 24t^2\cdot\vec{i} + (36t - 16)\cdot\vec{j}$ (N). Τη στιγμή $t_0 = 0$ το υλικό σημείο έχει ταχύτητα, $\vec{\upsilon}_0 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}$ (m/s) και βρίσκεται στη θέση, $\vec{r}_0 = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ (m).
Α. Να βρείτε σε συνάρτηση με το χρόνο t:
α) την ταχύτητα του υλικού σημείου, β) τη θέση του υλικού σημείου.
Β. Να βρείτε: α) την ορμή του υλικού σημείου τις στιγμές $t_1 = 1\text{s}$ και $t_2 = 2\text{s}$. β) την ώθηση που ασκήθηκε στο υλικό σημείο κατά το χρονικό διάστημα $t_1 = 1\text{s}$ έως $t_2 = 2\text{s}$.

5.8 Υλικό σημείο μάζας 2 kg κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\vec{r} = (4t^2 - t^3)\cdot\vec{i} - 5t\cdot\vec{j} + (t^2 - 2)\cdot\vec{k}$ (m). Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$: α) Την ορμή του. β) Τη δύναμη που ασκείται πάνω του.

5.9 Σώμα μάζας m κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, πάνω σε λείο οριζόντιο εκτεταμένο δάπεδο. Από τη στιγμή $t_1 = 0$ αρχίζει να ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη, ομόρροπη της ταχύτητας του, με μέτρο $F(t) = \alpha + \beta t^2$ μέχρι τη στιγμή $t = t_2$. Να βρείτε: α) την ώθηση της δύναμης. β) την ταχύτητα που αποκτά το σώμα.

5.10 Υλικό σημείο μάζας 1 kg ηρεμεί στην αρχή των αξόνων. Τη στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ενεργεί πάνω του δύναμη $\vec{F} = (200t \cdot e^{-2t}) \cdot \vec{i}$ (S.I). Να βρείτε: α) τη μεταβολή της ορμής του από τη στιγμή $t_1 = 1\text{s}$ έως τη στιγμή $t_2 = 2\text{s}$, β) την ταχύτητα του μετά από πάρα πολύ χρόνο.

5.11 Ένας κολυμβητής εκτινάσσεται από την άκρη εξέδρας με αρχική ταχύτητα μέτρου 2 m/s κατά διεύθυνση που σχηματίζει με την οριζόντια γωνία φ για την οποία $\sin\varphi = \frac{3}{5}$ (σχήμα 5.61). Αν ο κολυμβητής έχει μάζα 70



Σχήμα 5.61

kg και το χρονικό διάστημα που απαιτήθηκε για να εγκαταλείψει την εξέδρα είναι 0,7 s, να βρείτε τη μέση δύναμη που ασκεί ο κολυμβητής στην εξέδρα.

5.12 Σώμα μάζας 4 kg ηρεμεί πάνω σε εκτεταμένο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να ενεργεί στο σώμα οριζόντια δύναμη σταθερής διεύθυνσης της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται κατά το νόμο:

$$F = \begin{cases} 2t\,(\text{N}) & \textit{για}\; 0 \le t \le 10\,\text{s} \\ 30 - t & \textit{για}\; 10 \le t \le 30\,\text{s} \\ 0 & \textit{για}\; 30\,\text{s} \le t \end{cases}$$

Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος – δαπέδου είναι $\mu = 0{,}1$. Να βρείτε: α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή $t = 10\,\text{s}$. β) τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μέτρο της ταχύτητας του σώματος γίνεται μέγιστο. γ) το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας του σώματος.