Σωμάτιο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση, με γωνιακή συχνότητα ω, σύμφωνα με την εξίσωση $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Δίνεται ότι για $t = 0$ είναι $x = x_0$ και $\upsilon = \upsilon_0$. Να προσδιορίσετε: α) την αρχική φάση φ_0, β) το πλάτος A της κίνησης.

Λύση

α) Εφόσον $$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

θα είναι $$\upsilon = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Για $t = 0$, από (1), (2) βρίσκουμε αντίστοιχα

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \quad \text{ή} \quad \frac{x_0}{A} = \cos\varphi_0 \quad (3)$$

$$\upsilon_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \quad \text{ή} \quad \frac{\upsilon_0}{\omega A} = \sin\varphi_0 \quad (4)$$

Από (3), (4) προκύπτει $\tan\varphi_0 = -\dfrac{\upsilon_0}{\omega x_0}$.

β) Από (3), (4) βρίσκουμε $\dfrac{x_0^2}{A^2} + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$. Λύνοντας ως προς A βρίσκουμε $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2}$.
Συνεπώς αν γνωρίζουμε τα x_0, υ_0, ω, προσδιορίζουμε τα A και φ_0. Η αρχική φάση, φ_0, είναι σημαντική όταν συγκρίνουμε τις αρμονικές ταλαντώσεις δύο ή περισσοτέρων σωμάτων.

Απλός αρμονικός ταλαντωτής, ταλαντώνεται κατά τη διεύθυνση του x – άξονα. Η μετατόπιση μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $x = 0{,}4\cos\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (S.I). α) Να βρείτε το πλάτος, τη συχνότητα και την αρχική φάση της κίνησης. β) Προσδιορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t = 10$ s ($\pi^2 \approx 10$). γ) Βρείτε τη μετατόπιση του σώματος από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή $t = 5$ s. δ) Βρείτε τη φάση της ταλάντωσης τη στιγμή $t = 10$ s.

Λύση

α) Συγκρίνουμε τη δοσμένη εξίσωση κίνησης

$$x = 0{,}4\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

με την εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

και βρίσκουμε $A = 0{,}4$ m, $\omega = 5\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ή $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2{,}5$ Hz και $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ rad

β) Για την ταχύτητα και την επιτάχυνση ταλαντωτή, σε οποιοδήποτε χρόνο t, έχουμε: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = -2\pi\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ και $\alpha = \dfrac{d\upsilon}{dt} = -10\pi^2\cos\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$. Για $t = 10$ s βρίσκουμε: $\upsilon = -2\pi\sin\left(50\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ ή $\upsilon = -3{,}14 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ και

$\alpha = -10\pi^2\cos\left(50\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ ή $\alpha = -50\sqrt{3} \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

γ) Η συντεταγμένη x τις στιγμές $t = 0$ και $t = 5$ s είναι αντίστοιχα: $x_0 = 0{,}4\cos\dfrac{\pi}{6}$ ή $x_0 = 0{,}2\sqrt{3}$ m και

$x_5 = 0{,}4\cos\left(25\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$ ή $x_5 = -0{,}2\sqrt{3}$ m.
Συνεπώς η ζητούμενη μετατόπιση από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι $t = 5$ s είναι

$\Delta x = x_5 - x_0 =$ $\Delta x = x_5 - x_0 = -0{,}2\sqrt{3}$ m $- 0{,}2\sqrt{3}$ m ή $\Delta x = -0{,}4\sqrt{3}$ m.

δ) Η φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi = 5\pi t + \dfrac{\pi}{6}$. Για $t = 5$ s έχουμε $\varphi = 5\pi \text{ rad} \cdot s^{-1} \cdot 5 \text{ s} + \dfrac{\pi}{6}$ ή $\varphi = \dfrac{151\pi}{6}$ rad.

Σώμα μάζας m, ισορροπεί συνδεδεμένο με τα ελεύθερα άκρα δύο κατακόρυφων ιδανικών ελατηρίων ε_1, ε_2 τα οποία έχουν σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα (Σχήμα 11.7). Το ελατήριο ε_1 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος ενώ το ελατήριο ε_2 έχει συσπειρωθεί κατά y_2. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω, κατά τη διεύθυνση του άξονα ελατηρίου κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο. α) Να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση. β) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της κίνησης. γ) Να γράψετε την εξίσωση της μετατόπισης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, θεωρώντας ως αρχή του χρόνου, $t = 0$, τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερο.
Εφαρμόγη: $m = 2$ kg, $k_1 = 120$ N/m, $k_2 = 80$ N/m, $d = 0{,}4$ m, g=10 m/s².

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση ισορροπίας του (α) και στην τυχαία θέση του (β) όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.7. Στη θέση (α) έχουμε $\Sigma F_y = 0$ ή

$$mg\text{-}k_2 y_2 = 0 \qquad (1)$$

Στην τυχαία θέση (β), σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton, ισχύει $\Sigma F_y = ma$ ή

$$mg - k_2 y_2' - k_1 y_1 = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (2)$$

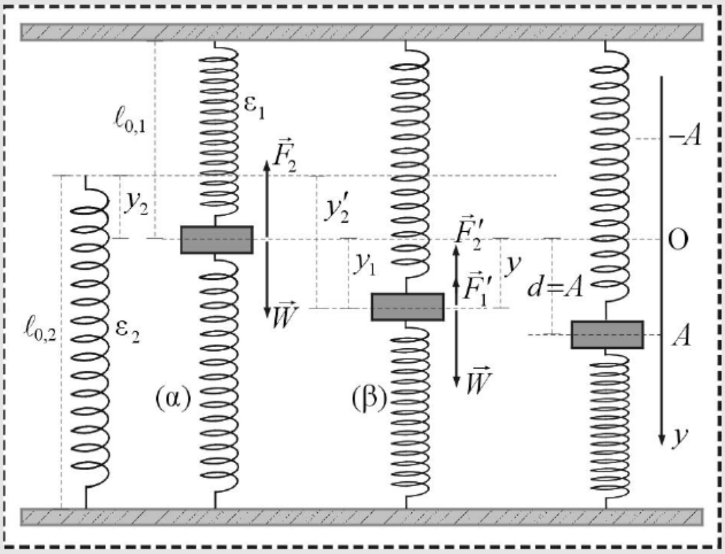
Είναι $y_2' = y_2 + y_1 = y_2 + y$ οπότε η εξίσωση (2) γράφεται

$$mg - k_2 y_2 - k_2 y - k_1 y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$ ή λόγω της (1)

$$-(k_1 + k_2)y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$ ή

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m}y = 0 \qquad (3)$$

Συνεπώς το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση.



Σχήμα 11.7 α) Το σώμα ισορροπεί, με το ελατήριο ε_1 στο φυσικό του μήκος και το ελατήριο ε_2 συσπειρωμένο κατά y_2. β) Το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος, σε τυχαία θέση, μετά τη στιγμή $t = 0$ που αφέθηκε ελεύθερο από τη θέση $y = d$.

β) Από την (3) έχουμε $\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m}$ ή $\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ οπότε η συχνότητα της κίνησης θα είναι $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

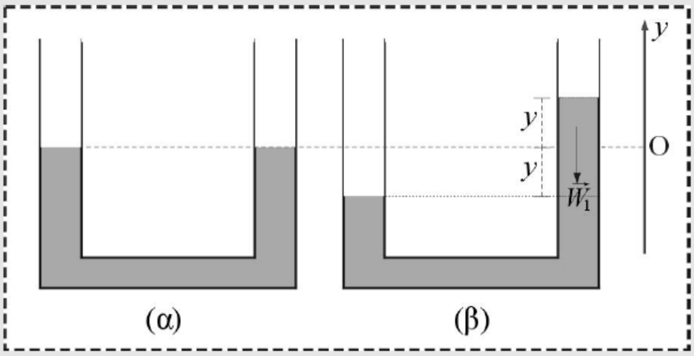
Εφαρμογή: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{120\ \text{m}^{-1} + 80\ \text{m}^{-1}}{2\ \text{kg}}}$ ή $f = \frac{5}{\pi}$ Hz.

γ) Η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο καθορίζεται από την εξίσωση

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (4)$$

Δίνεται ότι για t = 0, είναι y = d = A και υ = 0. Συνεπώς από την (4) έχουμε $A = A\cdot\cos\varphi_0$ ή $\cos\varphi_0 = 1$ ή $\varphi_0 = 0$ οπότε η εξίσωση (4) γράφεται $y = A\cos\omega t = A\cos 2\pi f t$ ή $y = 0{,}4\cos 10t$ (S.I).

Σε σωλήνα σταθερής διατομής περιέχεται υγρό πυκνότητας ρ, το οποίο σχηματίζει στήλη μήκους ℓ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.8. Να δείξετε ότι, αν εκτρέψουμε λίγο το υγρό από τη θέση ισορροπίας του θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση και να υπολογίσετε την περίοδο της.



Σχήμα 11.8 α) Το υγρό σχηματίζει στήλη μήκους ℓ και ισορροπεί. β) Το υγρό κατεβαίνει κατά y στο αριστερό σκέλος και ανεβαίνει κατά y στο δεξιό σκέλος.

Λύση

Η δύναμη επαναφοράς που θα προκαλέσει την ταλάντωση όλης της υγρής στήλης, είναι το βάρος της υγρής στήλης εμβαδού διατομής A και ύψους $2y$. Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton έχουμε $-m_1 g = ma$ ή

$$\rho A \cdot 2yg = \rho A\ell \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2g}{\ell} y = 0 .$$

Συνεπώς η στήλη υγρού εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{\ell}}$ ή με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}$.

Α. Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής έχει ολική ενέργεια E.
α) Υπολογίστε τη δυναμική και κινητική ενέργεια όταν η μετατόπιση, (ή η απομάκρυνση), από τη θέση ισορροπίας, είναι ίση με το μισό του πλάτους. β) Για ποιά τιμή της απομάκρυνσης η κινητική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική;
Β. Αν το πλάτος της κίνησης του ταλαντωτή διπλασιαστεί, να προσδιορίσετε τη μεταβολή:
α) της ολικής ενέργειας, β) του μεγίστου μέτρου ταχύτητας, γ) του μεγίστου μέτρου επιτάχυνσης, δ) της περιόδου της κίνησης.

Λύση

Α. α) Η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή είναι $U = \frac{1}{2}k x^2$. Για $x = \frac{A}{2}$ έχουμε $U = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}k A^2\right)$ ή

$$U = \frac{E}{4} \qquad (1)$$

Από τη σχέση $E = K + U$ έχουμε $K = E - U$ ή λόγω της (1), $K = \frac{3}{4}E$.

β) Δίνεται $K = U = \frac{E}{2}$, άρα $\frac{1}{2}k x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}k A^2$ ή $x = \pm A\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Β. α) Η μεταβολή της ολικής ενέργειας του ταλαντωτή είναι

$$(\Delta E) = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E = \frac{1}{2}k(2A)^2 - E = 4\left(\frac{1}{2}k A^2\right) - E = 4E - E \ \text{ή}\ (\Delta E) = 3E.$$

β) Για τη μεταβολή του μεγίστου μέτρου της ταχύτητας έχουμε:

$(\Delta U_{max}) = \omega \cdot 2A - \upsilon_{max} = 2\upsilon_{max} - \upsilon_{max}$ ή $(\Delta \upsilon_{max}) = \upsilon_{max}$.

γ) Είναι $(\Delta a_{max}) = \omega^2 \cdot 2A - a_{max} = 2a_{max} - a_{max}$ ή $(\Delta a_{max}) = a_{max}$.

δ) Η περίοδος της κίνησης είναι ανεξάρτητη του πλάτους. Συνεπώς η μεταβολή (ΔΤ) = 0.

Αντιστρεπτό εκκρεμές.
α) Να αποδειχτεί ότι, σ΄ ένα φυσικό εκκρεμές, υπάρχουν δύο σημεία εξάρτησης. σε αποστάσεις d_1 και d_2 από το κέντρο μάζας, τέτοια ώστε, αν το εκκρεμές εξαρτηθεί από αυτά να ταλαντώνεται με την ίδια περίοδο για ταλαντώσεις μικρού πλάτους. β. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις αυτές συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $d_1 d_2 = \frac{I_{cm}}{m}$. γ. Δείξτε ακόμη, ότι αν έχουμε προσδιορίσει ένα τέτοιο ζευγάρι συζυγών σημείων, και μετρήσουμε την περίοδο T, μπορούμε να βρούμε την τιμή του g, από την σχέση $g = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot(d_1 + d_2)$.
(Αυτή η μέθοδος μέτρησης του g ονομάζεται μέθοδος του αντιστρεπτού εκκρεμούς. Το άθροισμα $d_1 + d_2$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων εξάρτησης, είναι δηλαδή το ανηγμένο μήκος του φυσικού εκκρεμούς. Η γνώση της θέσης του κέντρου μάζας είναι περιττή.)

Λύση

Η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς (Σχήμα 11.12) όταν εξαρτάται από το σημείο Ο είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd_1}}$ όπου θέσαμε Oc = d_1. Το μήκος του ισόχρονου απλού εκκρεμούς είναι $L = \frac{I}{md_1} = \frac{I_{cm} + md_1^2}{md_1}$ ή

$$L = \frac{I_{cm}}{md_1} + d_1 = d_2 + d_1 = (OO') \qquad (1)$$

α) Τα δύο σημεία Ο και Ο΄, κείνται εκατέρωθεν του κέντρου μάζας και η περίοδος του φυσικού εκκρεμούς όταν εξαρτάται, διαδοχικά, από τα σημεία Ο και Ο΄ είναι η ίδια. Πράγματι $T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{O'}}{md_2}}$ όπου d_2=(cO΄) ή

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + md_2^2}{mgd_2}} \quad 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{I_{cm}}{md_2} + d_2\right)} \qquad (2)$$

Από (1) προκύπτει $d_2 = \frac{I_{cm}}{md_1}$ και με αντικατάσταση στη (2) έχουμε $T' = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(d_1 + \frac{I_{cm}}{md_1}\right)}$ ή

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + md_1^2}{mgd_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgd_1}} \quad ή \quad T' = T.$$

β) Από την (1) βρίσκουμε ότι $d_1 \cdot d_2 = \frac{I_{cm}}{m}$.

γ) Η περίοδος του ισόχρονου, με το φυσικό ,απλού εκκρεμούς είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ή $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L}{g} = \frac{d_1 + d_2}{g}$ ή $g = \frac{4\pi^2}{T^2}(d_1 + d_2)$.

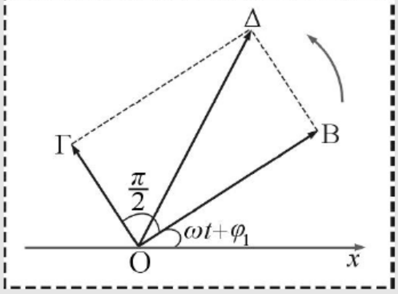
Ένα σωματίδιο εκτελεί ταυτόχρονα δυο απλές αρμονικές κινήσεις που έχουν την ίδια διεύθυνση και την ίδια συχνότητα. Οι εξισώσεις των κινήσεων $x_1 = 0{,}4\sqrt{3}\cos(2t + \frac{\pi}{6})$ και $x_1 = 0{,}4\cos(2t + 2\frac{\pi}{3})$ (S.I).
α) Βρείτε το συνισταμένο πλάτος, β) Να γράψετε την εξίσωση της συνισταμένης κίνησης.

Λύση

α) Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο κινήσεων είναι $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ ή $\delta = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι δύο κινήσεις βρίσκονται σε τετραγωνισμό και τα περιστρεφόμενα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους (Σχήμα 11.18). Από την εξίσωση 11.35 προκύπτει ότι το συνισταμένο πλάτος είναι A = 0,8 m.
β) Η αρχική φάση της συνισταμένης κίνησης υπολογίζεται από την εξίσωση 11.36

$$\tan\theta = \frac{0{,}4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + 0{,}4\sin\frac{2\pi}{3}}{0{,}4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 0{,}4\cos\frac{2\pi}{3}} = 1{,}731 \quad ή \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Συνεπώς η εξίσωση τηε συνισταμένης κίνησης, σύμφωνα με την εξίσωση 11.34 είναι $x = 0{,}8\cos(2t + \frac{\pi}{3})$ (S.I).



Σχήμα 11.18 Σύνθεση δύο απλών αρμονικών κινήσεων σε τετραγωνισμό.

Σωμάτιο μάζας m = 0,5 kg κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x υπό την επίδραση δύο δυνάμεων: i) μιας δύναμης έλξης $F = -4x$ (S.I) προς την αρχή του άξονα και ii) μιας δύναμης αντίστασης $F_f = -2\upsilon$ (S.I). Τη χρονική στιγμή t = 0, το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση x = 2 m και έχει ταχύτητα υ = 0.
Α. Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης.
Β. Να βρείτε: α) τη θέση και την ταχύτητα του σωμάτιου ως συνάρτηση του χρόνου, β) το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων με απόσβεση.
Γ. Να παραστήσετε γραφικά τη μετατόπιση σωματίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

Α. Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ή $F + F_f = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ή $m\dfrac{d^2x}{dt} - F_f - F = 0$ ή

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 0 \qquad (1)$$

Β. α) Η διαφορική εξίσωση (1) είναι της μορφής

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2)$$

όπου $\gamma = 2\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$ και $\omega_0^2 = 8\ \mathrm{s}^{-2}$. Η γενική λύση της (2) είναι

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (3)$$

με $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ή $\omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$. Οι σταθερές A και φ_0 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες .

Η Σχέση (3) γράφεται

$$x = Ae^{-2t}\cos(2t + \varphi_0) \qquad (4)$$

Η ταχύτητα του κάθε σωμάτιου κάθε στιγμή είναι:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -2Ae^{-2t}\cos(2t + \varphi_0) - 2Ae^{-2t}\sin(2t + \varphi_0) \quad ή$$

$$\upsilon = -2Ae^{-2t}\left[\cos(2t + \varphi_0) + \sin(2t + \varphi_0)\right] \qquad (5)$$

Δίνεται ότι για t = 0 είναι x = 0 και υ = 0. Από τις (5) και (6) έχουμε

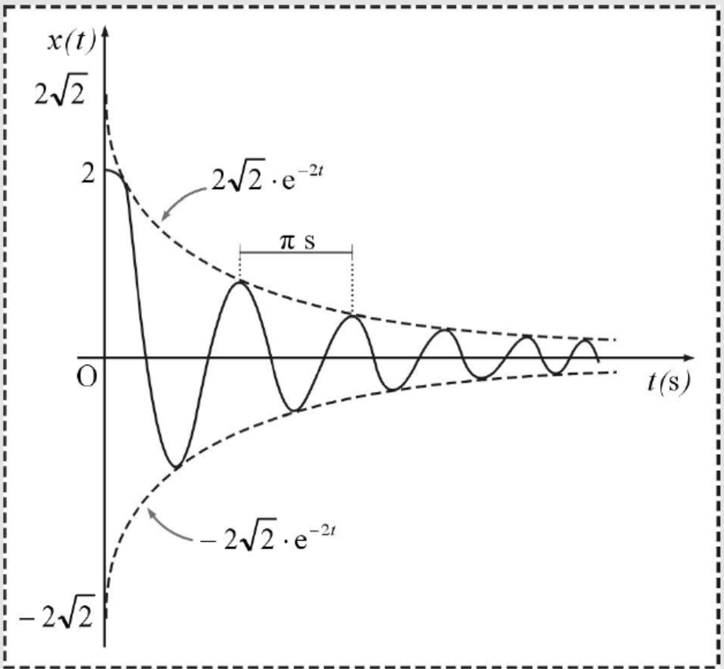
$$2 = A\cos\varphi_0 \qquad (6)$$

$$0 = A\cos\varphi_0 + A\sin\varphi_0 \quad ή \quad A\sin\varphi_0 = -2 \qquad (7)$$

Από (6), (7) προκύπτει $\tan\varphi_0 = -1$ ή

$\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{4}$ οπότε το πλάτος είναι $A = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{4}}$ ή

$A = 2\sqrt{2}$ m. Οι εξισώσεις $x(t)$ και $\upsilon(t)$ γράφονται



Σχήμα 11.37 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x(t) = 2\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{4})$.

$$x(t) = 2\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{4}) \qquad (8)$$

$$\upsilon(t) = -4\sqrt{2}e^{-2t}\left[\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad ή \quad \upsilon(t) = -8e^{-2t}\sin 2t$$

β) Από την (8) έχουμε $A = 2\sqrt{2}$ m και $\omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ ή $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ ή $T = \pi\ s$.

Γ. Η μεταβολή της μετατόπισης σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο Σχήμα 11.37

Σωμάτιο μάζας $m = 2$ kg κινείται κατά τον άξονα x υπό την επίδραση δύο δυνάμεων: i) μιας ελκτικής δύναμης $F = -10x$ (S.I) προς την αρχή Ο του άξονα και ii) μιας δύναμης αντίστασης $F_f = -4\upsilon$ (S.I). Τη στιγμή t = 0, το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση $x = 5$ m και έχει ταχύτητα $\upsilon = -3$ m/s. α) Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης. β) Να βρείτε τη θέση του σωματίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

α) Σύμφωνα με το δεύτερο Νόμο του Newton έχουμε

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_f - F \quad ή \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx \quad ή \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ή \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{10}{2}x = 0 \quad ή$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0 \qquad (1)$$

β) Η $x = e^{-at}$ είναι μια λύση της (1) αν $a^2 + 2a + 5 = 0$ ή $a = \frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{4-20}\right)$ ή $a = -1 \pm 2i$.

Η γενική λύση της (1) θα είναι $$x = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) \qquad (2)$$

όπου A, B σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.
Εφόσον για $t = 0$ είναι $x = 5$ m από (2) προκύπτει ότι $A = 5$ και επομένως θα είναι

$$x = e^{-t}(5\cos 2t + B\sin 2t) \qquad (3)$$

Η ταχύτητα του σωματίου κάθε στιγμή θα είναι

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = (-e^{-t})(5\cos 2t + B\sin 2t) + (-2e^{-t})(5\sin 2t - B\cos 2t) \qquad (4)$$

Για t = 0, δίνεται $\upsilon = -3$ m/s. Συνεπώς από (4) προκύπτει $-3 = -5 + 2B$ ή $B = 1$, οπότε η εξίσωση (2) γράφεται

$$x = e^{-t}(5\cos 2t + \sin 2t)$$

Σύστημα ελατηρίου-μάζας εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης $F = F_0\cos\omega t$. Η δύναμη τριβής που προκαλεί τις απώλειες είναι της μορφής $F_f = -b\upsilon$. Να βρείτε πόση ενέργεια πρέπει να μεταφέρεται στον ταλαντωτή ανα κύκλο, μέσω του έργου της διεγείρουσας δύναμης F, ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό.

Λύση

i) Για να παραμένει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σταθερό, θα πρέπει να μεταφέρεται στο σύστημα, ανα κύκλο, μέσω του έργου της διεγείρουσας δύναμης, τόση ενέργεια, όση αφαιρείται μέσω της τριβής.
Ο χρονικός ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται από τον ταλαντωτή ενέργεια, μέσω του έργου τριβής, είναι

$$P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{\upsilon} \quad ή \qquad P_f = -b\upsilon^2 \qquad (1)$$

ii) Έστω ότι η απόκριση x του ταλαντωτή περιγράφεται από την εξίσωση $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Τότε η ταχύτητα της μάζας θα είναι $\upsilon = -\omega A\cos(\omega t + \varphi)$ και η (1) γράφεται

$$P_f = -b\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Ισχύει $P_f = \frac{dW_f}{dt}$, οπότε $dW_f = P_f dt = -b\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)dt$.
Το έργο της δύναμης τριβής σε χρονικό διάστημα ενός κύκλου θα είναι

$$W_f = -b\omega^2 A^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)dt = -b\omega^2 A^2 \int_0^T \frac{[1 + \cos^2 2(\omega t + \varphi)]dt}{2} \quad ή \quad W_f = \frac{-b\omega^2 A^2}{2}\cdot T \quad ή \quad W_f = -\pi b\omega A^2.$$

Συνεπώς, μέσω του έργου της διεγείρουσας δύναμης, πρέπει να προσφέρεται στον ταλαντωτή ενέργεια $W_f = -W_f$ ή $W_f = \pi b\omega A^2$.

Σωμάτιο εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση η οποία μπορεί να περιγραφεί από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 20\cos\omega t$$

Για $t = 0$ δίνεται ότι $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Να βρείτε: α) τη θέση του σωμάτιου σε συνάρτηση με το χρόνο. β) τη λύση της μεταβατικής κατάστασης και τη λύση της σταθεροποιημένης κατάστασης.

Λύση

α) Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σωμάτιου είναι της μορφής

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (1)$$

όπου $\gamma = 2\ \text{s}^{-1}$, $\omega_0^2 = 8\ \text{s}^{-2}$, $\omega = 2\ \text{s}^{-1}$, $\frac{F_0}{m} = 20\,\text{kg}$ (2)

Η γενική λύση της (1) είναι $x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t) + B\sin\omega t + \Gamma\cos\omega t$ ή λόγω της (2)

$$x(t) = e^{-2t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + B\sin 2t + \Gamma\cos 2t \qquad (3)$$

Οι σταθερές C_1, C_2, B και Γ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες i) $x(0) = 0$, ii) $\dot{x}(0) = 0$, iii) $\ddot{x}(0) = 0$.

1) Από (3) : $0 = 1(0 + C_2) + 0 + \Gamma$ ή $\Gamma = -C_2$ (4)

2) Είναι $\dot{x}(t) = -2e^{-2t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + e^{-2t}(2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t) + 2\text{B}\cos 2t - 2\Gamma\sin 2t$ ή

$0 = -2(0 + C_2) + 1(2C_1 - 0) + 2B - 0$ ή $C_2 = C_1 + B$ (5)

3) $\ddot{x}(t) = 4e^{-2t}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) - 2e^{-2t}(2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t) - 2e^{-2t}(2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t)$

$+ e^{-2t}(-4C_1 \sin 2t - 4C_2 \cos 2t) - 4B\sin 2t - 4\Gamma\cos 2t$ ή

$0 = 4(0 + C_2) - 2(2C_1 - 0) - 2(2C_1 - 0) + 1(0 - 4C_2) - 0 - 4\Gamma$ ή $4C_2 - 4C_1 - 4C_1 - 4C_2 - 4\Gamma = 0$ ή

$-8C_1 + 4\Gamma = 0$ ή $\Gamma = -2C_1$ (6)

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης στην σταθεροποιημένη κατάσταση θα είναι

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - 4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}} \quad \text{ή} \quad A = 20\frac{1}{\left[(8-4)^2 + 4\cdot 4\cdot 4\right]^{1/2}} \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{5}\ \text{m}.$$

Επίσης στη σταθεροποιημένη κατάσταση για το πλάτος A, ισχύει $A^2 = B^2 + \Gamma^2$ ή

$B^2 + \Gamma^2 = 5$ (7)

Από την (4), (6) προκύπτει ότι $C_2 = 2C_1$ (8)

και με αντικατάσταση στην (5) βρίσκουμε

$B = C_1$ (9)

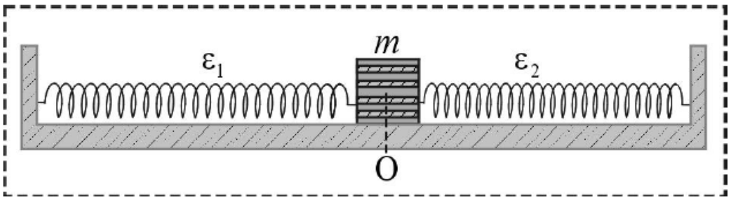
Από (6). (7), (8) και (9) έχουμε $C_1 = 1$ άρα και $C_2 = 2$, $B = 1$, $\Gamma = -2$ και η εξίσωση (3) γράφεται

$$x(t) = e^{-2t}(\sin 2t + 2\cos 2t) + \sin 2t - 2\cos 2t$$

β) Η λύση της μεταβατικής κατάστασης είναι $x(t) = e^{-2t}(\sin 2t + 2\cos 2t)$, ενώ η λύση της σταθεροποιημένης κατάστασης είναι $x(t) = \sin 2t - 2\cos 2t$.

11.1 Υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ κατά τον άξονα x με πλάτος 4 cm και συχνότητα 1,5 Hz. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση. α) Δείξτε ότι η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του περιγράφεται από τη εξίσωση $x = 2\sin 3\pi t$ (x σε cm, t σε s). β) Προσδιορίστε: i. Το μέγιστο μέτρο της ταχύτητας και τη χρονική στιγμή ($t > 0$) κατά την οποία αυτό θα συμβεί για πρώτη φορά, ii. Το μέγιστο μέτρο της επιτάχυνσης και τη χρονική στιγμή ($t > 0$) κατά την οποία αυτό θα συμβεί για πρώτη φορά, iii. Βρείτε την απόσταση που θα διανύσει το υλικό σημείο στο χρονικό διάστημα από το $t_0 = 0$ μέχρι $t_1 = 1$ s.

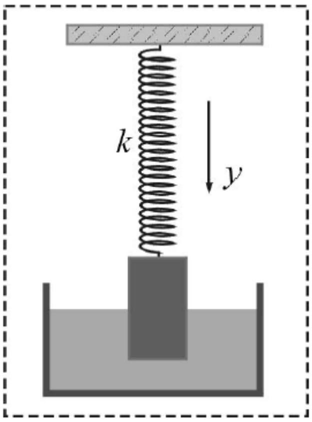
11.2 Σώμα μάζας m ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο συνδεδεμένο με δύο ελατήρια $ε_1$ και $ε_2$ όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.46. Τα ελατήρια είναι επιμηκυσμένα και έχουν σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων. Δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ (απλή αρμονική ταλάντωση) και βρείτε την περίοδό της.



Σχήμα 11.46

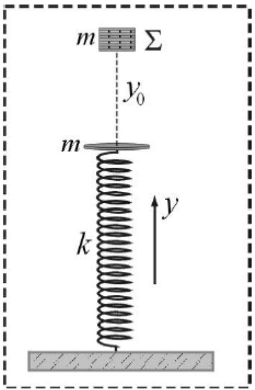
11.3 Στις κορυφές κανονικού εξαγώνου, βρίσκονται ακίνητα έξι υλικά σημεία. Ένα υλικό σημείο Σ αφήνεται ελεύθερο σε σημείο του επιπέδου του εξαγώνου. Αν το υλικό σημείο Σ, έλκεται από καθένα σημείο που βρίσκεται στην κορυφή του εξαγωώνου με δύναμη της οποίας το μέτρο είναι ανάλογο με την απόσταση του από την κορυφή του εξαγώνου, να δείξετε ότι αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

11.4 Μεταλλικός κύλινδρος μάζας m και εμβαδού βάσης Α εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ο κύλινδρος ισορροπεί βυθισμένος εν μέρει μέσα σε υγρό πυκνότητας p, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.47. Απομακρύνουμε από τον κύλινδρο από τη θέση ισορροπίας του, κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, προς τα κάτω κατά απόσταση d. α) Να δείξετε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει α.α.τ και να βρείτε την περίοδο της. β) Μετά πόσο χρόνο ο κυλίνδρος, από τη στιγμή ποθ αφέθηκε ελεύθερος, θα περάσει από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά. γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του κυλίνδρου από τη θέση ισορροπίας του, θεωρώντας $t_0 = 0$ τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερος.



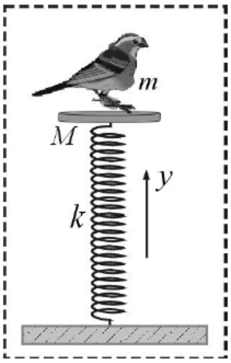
Σχήμα 11.47

11.5 Δίσκος μάζας m συνδεέται στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.48. Το σύστημα ισορροπεί και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά y_0. Από ύψος y_0, πάνω από το δίσκο, αφήνεται ελεύθερο σώμα Σ, μάζας m, το οποίο συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το δίσκο. Η διάρκεια κρούσης θεωρείται αμελητέα. Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση της κίνησης του συσσωματώματος και τη λύση της, θεωρώντας αρχή του χρόνου $t_0 = 0$ τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.



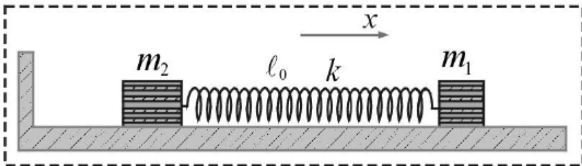
Σχήμα 11.48

11.6 Δίσκος μάζας M είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηριού σταθεράς k, το άλλο ακρό του οποίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο (Σχήμα 11.49). Πάνω στο δίσκο κάθεται ενά πουλί μάζας m και κάποια στιγμή εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $\vec{v}$. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο δίσκος.



Σχήμα 11.49

11.7 Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με οριζόντιο ιδανικό ελατήριο φυσικού μήκους ℓ_0 και στα-

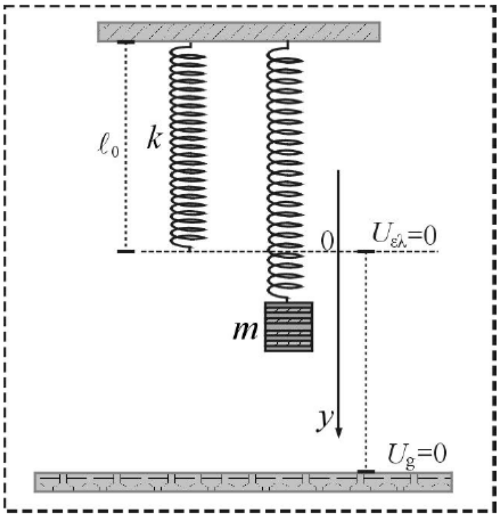


Σχήμα 11.50

Ασκήσεις προς λύση

θεράς k, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.50. Να βρείτε τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.

11.8 *Κατακόρυφο ελατήριο σε ομογενές βαρυτικό πεδίο.* Θεωρούμε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο. Στο ελεύθερο άκρο του δένουμε σώμα μάζας m (Σχήμα 11.51). Η θέση του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου, όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος, είναι $y = 0$. α) Δείξτε ότι η θέση ισορροπίας του σώματος είναι $y = \frac{mg}{k}$. β) Δείξτε ότι η εξίσωση της κίνησης του συστήματος μάζας – ελατηρίου είναι $m\frac{d^2y}{dt_2} + ky = mg$ και η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη εξίσωση $y = A\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{mg}{k}$ όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. γ) Δείξτε ότι το σύστημα έχει ίδια ω, υ, α μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο με τη διαφορά, σε σχέση με την κίνηση εκτός βαρυτικού πεδίου, ότι η θέση ισορροπίας έχει μετατοπιστεί κατά $\frac{mg}{k}$. δ) Θεωρείστε ότι η ενέργεια του συστήματος $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\kappa y^2 + mg(h-y)$ είναι σταθερή. Δείξτε ότι η παραγωγιση ως προς το χρόνο οδηγεί στην εξίσωση κίνησης του ερωτήματος (β). ε) Δείξτε ότι όταν η μάζα πέφτει από τη θέση $y = 0$ στη θέση στατικής ισορροπίας $y = \frac{mg}{k}$, η αύξηση της κινητικής ενέργειας της μάζας είναι ίση με το μισό της ελάττωσης της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. ζ) Θεωρείστε το κινούμενο σύστημα στη θέση στατικής ισορροπίας. Να βρείτε ξεχωριστά τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος όταν η μάζα κινείται προς τα πάνω κατά μία απόσταση A και όταν κινείται προς τα κάτω κατά την ίδια απόσταση A. Τι παρατηρείται; η) Να παραστήσετε γραφικά, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση στατικής ισορροπίας, τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.

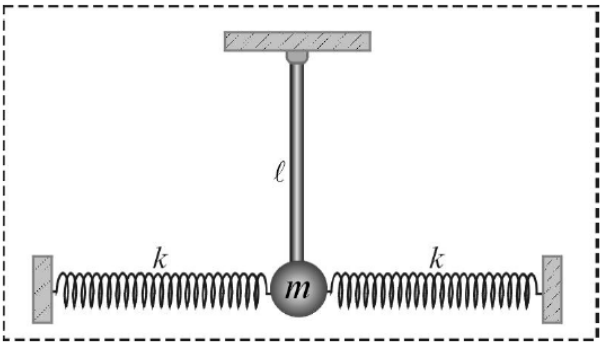


Σχήμα 11.51

11.19 Να βρείτε την περίοδο απλού μαθηματικού εκρεμμούς απείρου μήκους. Δίνονται η ακτίνα της Γης R και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

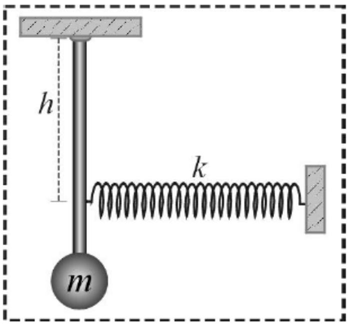
11.20 Στο ένα άκρο νήματος αβαρούς και μη εκτατού, μήκους ℓ προσδένεται σφαιρίδιο ξύλου πυκνότητας ρ_σ. Το άλλο άκρο του νήματος είναι στερεωμένο στον πυθμένα δοχείου το οποίο περιέχει υγρό πυκνότητας $\rho_\upsilon > \rho_\sigma$, ώστε το νήμα και το σφαιρίδιο να βρίσκονται μέσα στο υγρό. Εκτρέπουμε το σφαιρίδιο από τη θέση ισορροπίας του κατά μικρή γωνία. Να δείξετε ότι αυτό θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της. Η αντίσταση του υγρού θεωρείται αμελητέα.

11.21 Σώμα μάζας m προσαρμόζεται στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους ℓ και στα άκρα δύο ιδανικών οριζοντίων ελατηρίων καθένα από τα οποία έχει σταθερά k, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.57. Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και τα ελατήρια έχουν το φυσικό του μήκος. Απομακρύνουμε το σώμα κατά τη διεύθυνση του άξονα των ελατηρίων, ώστε η ράβδος να σχηματίσει πάρα πολύ μικρή γωνία με την κατακόρυφη. Να δείξετε ότι το σώμα να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της. Υποθέτουμε ότι κάθε ελατήριο μπορεί να παραλαμβάνει είτε δυνάμεις εφελκυσμού είτε δυνάμεις θλίψης.



Σχήμα 11.57

11.22 Ένα εκρεμμές μήκους ℓ και μάζας m είναι συνδεδεμένο με ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς k σε απόσταση h κάτω από το σημείο ανάρτησης του, όπως φαίνεται στο

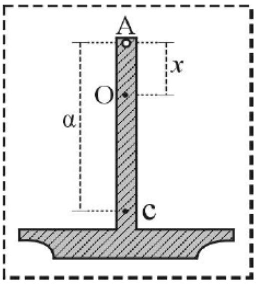


Σχήμα 11.58

Σχήμα 11.58. Η κατακόρυφη ράβδος ℓ έχει αμελητέα μάζα και είναι άκαμπτη. Να βρείτε τη συχνότητα της ταλάντωσης του συστήματος για μικρές τιμές του πλάτους (γωνία θ μικρή).

11.23 Να υπολογίσετε την περίοδο ταλαντώσεων μικρού πλάτους κυλινδρικής ράβδου ΑΒ, μάζας *m,* ακτίνας *r* μήκους ℓ γύρω από άξονα κάθετο στον άξονα της ράβδου ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Α.
Δίνεται η ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς άξονα κάθετο στον άξονα του και διερχόμενο από το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}m(3r^2 + I_{cm} =$

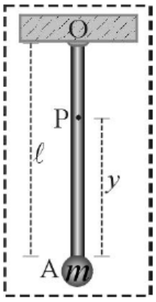
11.24 Η περίοδος των ταλαντώσεων, που μπορεί να εκτελεί το << Ταυ >> που φαίνεται στο Σχήμα 11.59 όταν κρέμεται από το σημείο Α, είναι $T = 2$ s. Το κέντρο μάζας c βρίσκεται σε απόσταση $\alpha = 0{,}5$ m από το Α. Σε πόση απόσταση x από το Α πρέπει να διέρχεται ο άξονας αιώρησης του εκρεμμούς, ώστε αυτό να ταλαντώνεται με την ελάχιστη δυνατή περίοδο.



Σχήμα 11.59

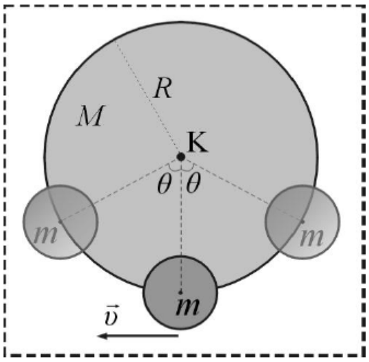
11.25 Ομογένης δίσκος μάζας *m* και ακτίνας *R,* είναι αναρτημένος από καρφί σε σημείο της περιφέρειας του. Να βρείτε τη συχνότητα των ταλαντώσεων μικρού πλάτους που μπορεί να εκτελέσει ο δίσκος.

11.26 Μικρό σφαιρίδιο μάζας *M,* το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο, είναι στερεωμένο στο άκρο Α ομογενούς και ισοπαχούς ράβδου, μάζας *M* και μήκους ℓ, της οποίας το άλλο άκρο είναι στερεωμένο με άρθρωση σε οροφή (Σχήμα 11.60). α) Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκείται στη ράβδο στο σημείο Ο και στο σημείο Ρ όταν το σύστημα ηρεμεί. β) Να βρείτε τη συχνότητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας του.



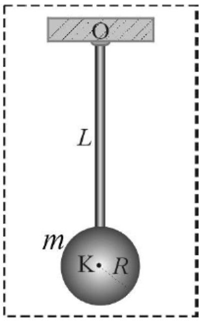
Σχήμα 11.60

11.27 Ένας λεπτός μικρός δίσκος μάζας *m* και ακτίνας *r,* είναι στερεωμένος στην επιφάνεια μεγαλύτερου δίσκου μάζας *M* ακτίνας *R,* όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.61. Το κέντρο του μικρού δίσκου βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του μεγάλου δίσκου. Ο μεγάλος δίσκος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα κάθετο στο επίπεδο του και διερχόμενο από το κέντρο του Κ. Η διάταξη στρέφεται κατά μικρή γωνία *θ,* από τη θέση ισορροπίας της, και αφήνεται ελεύθερη. α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του μικρού δίσκου καθώς περνάει από τη θέση ισορροπίας του. β) Αποδείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάνωση και να βρείτε την περιόδο της.



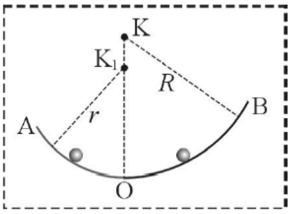
Σχήμα 11.61

11.40 Σφαίρα μάζας *m* και ακτίνας *R* είναι στερεωμένη στο ένα άκρο λεπτής αβαρούς ράβδου, της οποίας το άλλο άκρο αρθρώνεται στο σημείο Ο της οροφής και ισορροπεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.70. α) Να υπολογίσετε την περίοδο των ταλαντώσεων που θα εκτελέσει το σύστημα αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του κατά μικρή γωνία στο κατακόρυφο επίπεδο του σχήματος. β) Αν $R << L$, δείξετε ότι η περίοδος είναι ίδια με την περίοδο ενος απλού εκρεμμούς.



Σχήμα 11.70

11.41 Α) Σφαιρίδιο μάζας *m,* το οποίο θεωρούμε ως υλικό σημείο, ολισθαίνει στο εσωτερικό ημισφαιρίου ακτίνας *R* (Σχήμα 11.71). Αποδείξτε ότι για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας το σφαιρίδιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με τη συχνότητα απλού εκρεμμούς μήκους *R.*
Β) Το ίδιο σφαιρίδιο μπορεί να ολισθαίνει στο εσωτερικό σφαιρικής επιφάνειας ΑΟΒ, στην οποία το τόξο ΑΟ ανήκει σε σφαίρα ακτίνας *r,* ενώ το τόξο ΟΒ ανήκει σε σφαίρα ακτίνας *R.* Να βρείτε για μικρές μετατοπίσεις του σφαιριδίου από τη θέση ισορροπίας του την περίοδο της ταλάντωσης που θα εκτελέσει.



Σχήμα 11.71