

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσομένου σταθερής κατάστασης

Α. Δροσόπουλος

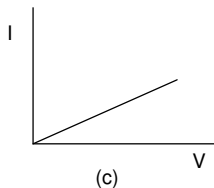
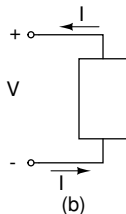
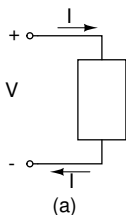
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικό Η/Υ
Σχολή Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Ηλεκτρικό Κύκλωμα

Ηλεκτρικό κύκλωμα είναι το σύνολο των ηλεκτρικών πηγών και στοιχείων που είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε να περνάει ρεύμα από κάθε στοιχείο.

- Συμβατική φοράς ρεύματος
- Παθητικά στοιχεία
- Ενεργά στοιχεία

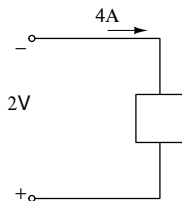
Ηλεκτρικό Κύκλωμα



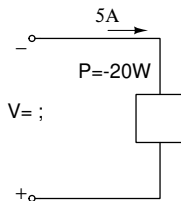
Στο (a) το ρεύμα εισέρχεται από τον θετικό ακροδέκτη και εξέρχεται από τον αρνητικό, οπότε το στοιχείο καταναλώνει ισχύ ή αλλιώς, είναι παθητικό (π.χ. αντίσταση). Στο (b) το ρεύμα εισέρχεται από τον αρνητικό ακροδέκτη και εξέρχεται από τον θετικό, οπότε το στοιχείο παράγει ισχύ ή αλλιώς, είναι ενεργητικό (π.χ. πηγή). Στο (c) το στοιχείο είναι γραμμικό. Η σχέση μεταξύ της τάσης και του ρεύματος στους ακροδέκτες του είναι γραμμική

Ηλεκτρικό Κύκλωμα

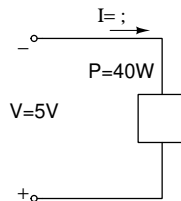
Τα παρακάτω κυκλώματα παράγουν ή καταναλώνουν ισχύ και πόση είναι αυτή;



(α)



(β)

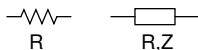


(γ)

Ηλεκτρικό Κύκλωμα

Τα στοιχεία που θα διαπραγματευτούμε στο μάθημα

αντιστάσεις



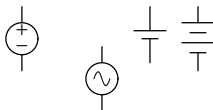
πηνιο



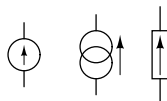
πυκνωτές



ανεξαρτητες πηγες τάσης

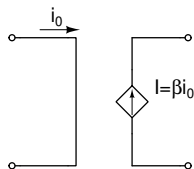
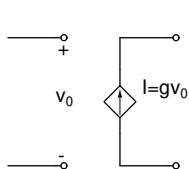
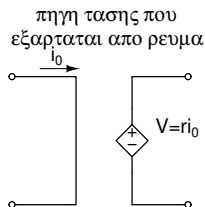
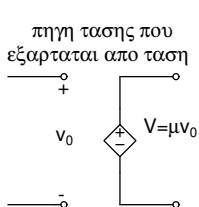


ανεξαρτητες πηγες ρευματος



Ηλεκτρικό Κύκλωμα

Τα στοιχεία που θα διαπραγματευτούμε στο μάθημα



πηγή ρεύματος που
εξαρτάται από τάση

πηγή ρεύματος που
εξαρτάται από ρεύμα

Θεμελιώδεις Έννοιες

κόμβος (node):

το σημείο διακλαδώσεως του ρεύματος σε ένα κύκλωμα ή δίκτυο

κλάδος (branch):

το τμήμα του κυκλώματος που περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο και συνδέει δύο κόμβους

βρόχος (loop):

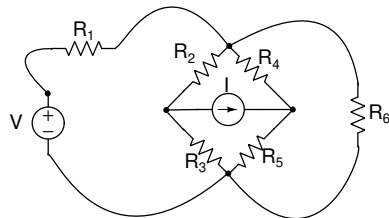
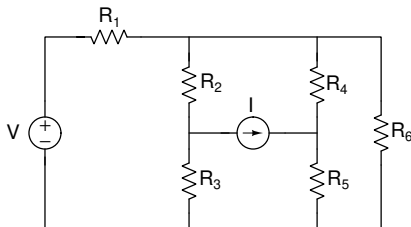
κλειστή διαδρομή σε ένα κύκλωμα που περνά από διάφορους κόμβους μία μόνο φορά

ελάχιστος βρόχος ή οφθαλμός :

ένας βρόχος που δεν περιέχει άλλο βρόχο εντός του

Θεμελιώδεις Έννοιες

Στο παρακάτω κύκλωμα διακρίνουμε 4 κόμβους και 7 κλάδους (κλασσικός ορισμός). Μερικοί δυνητικοί βρόγχοι είναι επίσης οι:
 $V - R_1 - R_2 - R_3 - V$, $V - R_1 - R_4 - R_5 - V$,
 $V - R_1 - R_2 - I - R_5 - V$ όπου περιγράφονται οι κλάδοι που σχηματίζουν τους βρόχους από τα στοιχεία που περιέχουν.



Κανόνες Kirchhoff

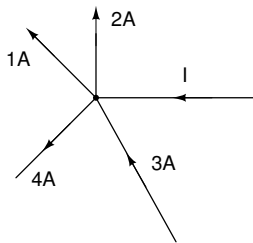
- 1 Το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε έναν κόμβο είναι μηδέν.
- 2 Το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων σε έναν βρόχο είναι μηδέν.

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^M V_i = 0$$

για N κόμβους ο πρώτος, και για M στοιχεία στον βρόχο όπου εφαρμόζεται ο δεύτερος αντίστοιχα.

Κανόνας Ρευμάτων

Άγνωστο ρεύμα I

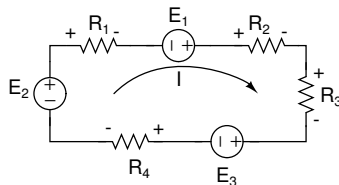


Τα ρεύματα που μπαίνουν στον κόμβο τα παίρνουμε με θετικό πρόσημο και αυτά που βγαίνουν με αρνητικό.

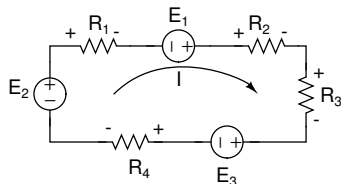
$$I + 3 - 2 - 1 - 4 = 0 \Rightarrow I = -3 + 2 + 1 + 4 = -3 + 7 = 4 \text{ A}$$

Κανόνας Τάσεων

Διαλέγουμε αυθαίρετα την φορά ρεύματος που διαρρέει τον βρόχο (συνήθως δεξιόστροφη). Οι ωμικές αντιστάσεις είναι καταναλωτικά στοιχεία επομένως θεωρούμε ότι το ρεύμα μπαίνει από τον θετικό ακροδέκτη τους. Προσοχή εδώ. Θεωρούμε ότι το ρεύμα κινείται πάντα από σημεία με υψηλό δυναμικό σε σημεία με χαμηλό δυναμικό (από το + στο -). Έτσι πάντα σε μια αντίσταση θα έχουμε μια πτώση τάσης στα άκρα της.



Κανόνας Τάσεων

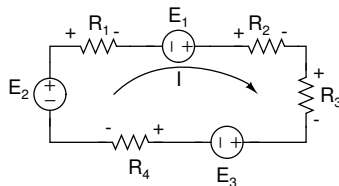


Όπως διαγράφουμε τον βρόχο δεξιόστροφα, τις πηγές τάσης που συναντάμε τις παίρνουμε σαν θετικές, αν συναντάμε πρώτα τον θετικό ακροδέκτη και αρνητικές αν συναντάμε πρώτα τον αρνητικό ακροδέκτη. Ομοίως, τις πτώσεις τάσεως στις αντιστάσεις τις παίρνουμε θετικές, αν η φορά μας είναι ίδια με τη φορά του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις και αρνητικές, αν είναι αντίθετη.

$$IR_1 - E_1 + IR_2 + IR_3 + E_3 + IR_4 - E_2 = 0 \Rightarrow$$

$$E_1 + E_2 - E_3 = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = IR_{\text{ολική}}$$

Αντιστάσεις εν σειρά

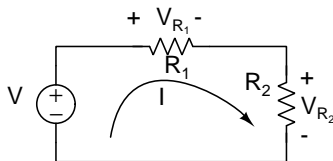


Βλέπουμε ότι οι αντιστάσεις εν σειρά (**αντιστάσεις από τις οποίες περνάει το ίδιο ρεύμα και βρίσκονται στον ίδιο κλάδο**) μπορούν να αντικατασταθούν από μια ισοδύναμη αντίσταση με τιμή ίση με το άθροισμά τους. Γενικά, για N αντιστάσεις σε σειρά:

$$R_{\text{ολική}} = \sum_{i=1}^N R_i$$

Διαιρέτης Τάσης

Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι η τάση στις αντιστάσεις R_1 , R_2 και πόση ισχύς καταναλώνεται στην αντίσταση R_2 ;



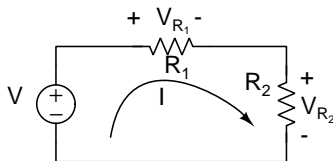
$$V_{R_1} + V_{R_2} - V = 0 \Rightarrow V = V_{R_1} + V_{R_2} = I(R_1 + R_2) \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Οι τάσεις στις επιμέρους αντιστάσεις είναι τότε

$$V_{R_1} = R_1 \cdot I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad \text{και} \quad V_{R_2} = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$$

Διαιρέτης Τάσης

Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι η τάση στις αντιστάσεις R_1 , R_2 και πόση ισχύς καταναλώνεται στην αντίσταση R_2 ;

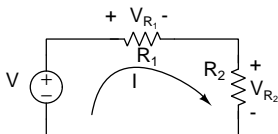


$$V_{R_1} + V_{R_2} - V = 0 \Rightarrow V = V_{R_1} + V_{R_2} = I(R_1 + R_2) \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Οι τάσεις στις επιμέρους αντιστάσεις είναι τότε

$$V_{R_1} = R_1 \cdot I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad \text{και} \quad V_{R_2} = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$$

Διαιρέτης Τάσης



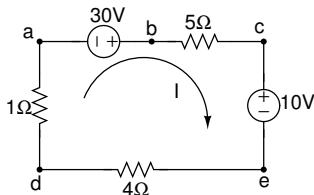
και η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_2 είναι

$$P_{R_2} = I V_{R_2} = \left(\frac{V}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2$$

Το κύκλωμα αυτό εμφανίζεται τόσες πολλές φορές στην πράξη που του έχει δοθεί το όνομα **διαιρέτης τάσης**.

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα: I , $P_{5\Omega}$, V_{be} , V_{bd} .



$$-30 + 5I + 10 + 4I + 1I = 0 \Rightarrow -20 + 10I = 0 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

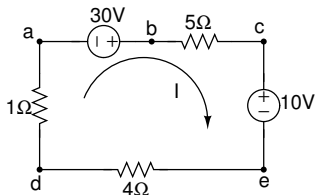
$$P_{5\Omega} = I^2 R = 4 \cdot 5 = 20 \text{ W}$$

$$V_{be} = V_{bc} + V_{ce} = 5I + 10 = 20 \text{ V}$$

$$V_{bd} = V_{bc} + V_{ce} + V_{ed} = 5I + 10 + 4I = 10 + 9I = 10 + 18 = 28 \text{ V}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα: I , $P_{5\Omega}$, V_{be} , V_{bd} .



$$-30 + 5I + 10 + 4I + 1I = 0 \Rightarrow -20 + 10I = 0 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

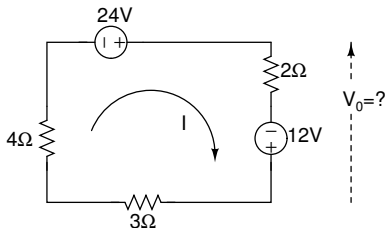
$$P_{5\Omega} = I^2 R = 4 \cdot 5 = 20 \text{ W}$$

$$V_{be} = V_{bc} + V_{ce} = 5I + 10 = 20 \text{ V}$$

$$V_{bd} = V_{bc} + V_{ce} + V_{ed} = 5I + 10 + 4I = 10 + 9I = 10 + 18 = 28 \text{ V}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι η V_0 ;

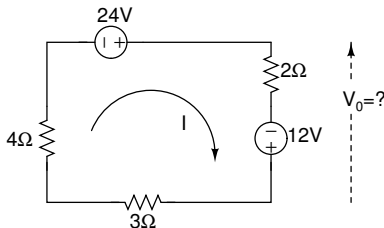


$$2I - 12 + 3I + 4I - 24 = 0 \Rightarrow 9I = 36 \Rightarrow I = 4 \text{ A}$$

$$V_0 = 2I - 12 = 8 - 12 = -4 \text{ V}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι η V_0 ;

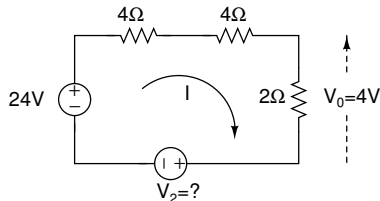


$$2I - 12 + 3I + 4I - 24 = 0 \Rightarrow 9I = 36 \Rightarrow I = 4 \text{ A}$$

$$V_0 = 2I - 12 = 8 - 12 = -4 \text{ V}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι η V_2 ;

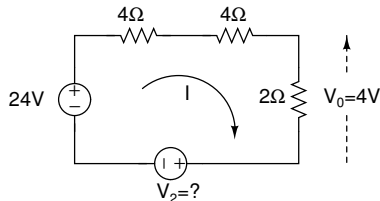


$$2I = 4 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

$$10I + V_2 - 24 = 0 \Rightarrow V_2 = 24 - 10I = 24 - 10 \cdot 2 = 4 \text{ V}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι η V_2 ;

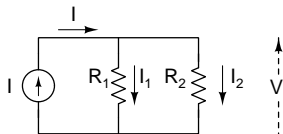


$$2I = 4 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

$$10I + V_2 - 24 = 0 \Rightarrow V_2 = 24 - 10I = 24 - 10 \cdot 2 = 4 \text{ V}$$

Διαιρέτης Ρεύματος

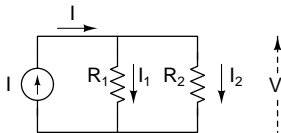
Στο παρακάτω κύκλωμα ποια είναι τα ρεύματα I_1 , I_2 που διαρρέουν τις δύο αντιστάσεις;



$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V = \frac{V}{R_0} \Rightarrow V = I R_0$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Διαιρέτης Ρεύματος



$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_0}{R_1} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

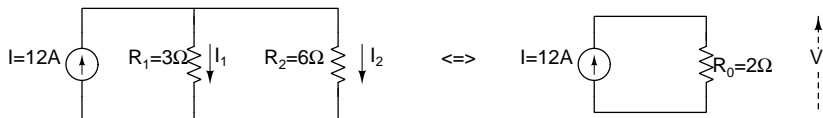
$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_0}{R_2} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Και αυτό το κύκλωμα εμφανίζεται πολλές φορές στην πράξη και του έχει δοθεί το όνομα **διαιρέτης ρεύματος**. Επαναλαμβάνεται ότι **παράλληλες αντιστάσεις είναι αυτές που έχουν κοινούς ακροδέκτες και κοινή τάση στα άκρα τους**.

$$\frac{1}{R_{\text{ολική}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα I_1 , I_2 .



Από διαιρέτη ρεύματος

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{6}{6 + 3} 12 = 8 \text{ A} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{3}{6 + 3} 12 = 4 \text{ A}$$

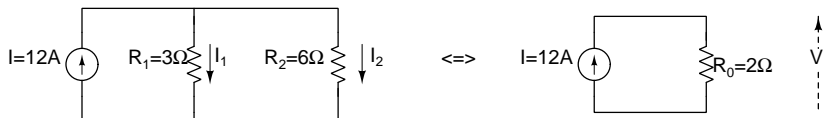
Με ολική αντίσταση

$$R_0 = 2 \quad V = I \cdot R_0 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{24}{3} = 8 \text{ A} \quad I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{24}{6} = 4 \text{ A}$$

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα I_1 , I_2 .



Από διαιρέτη ρεύματος

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{6}{6 + 3} 12 = 8 \text{ A} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{3}{6 + 3} 12 = 4 \text{ A}$$

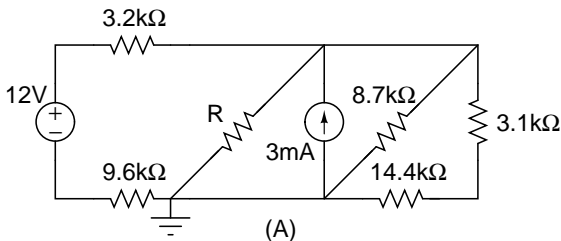
Με ολική αντίσταση

$$R_0 = 2 \quad V = I \cdot R_0 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{24}{3} = 8 \text{ A} \quad I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{24}{6} = 4 \text{ A}$$

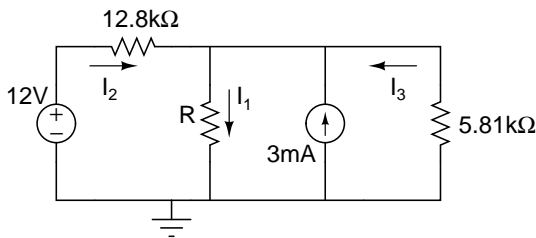
Άσκηση

Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης R στο κύκλωμα (A) έτσι ώστε η τάση στα άκρα της να είναι 9 V.



Άσκηση

Απλοποιώντας εν σειρά και παράλληλες αντιστάσεις έχουμε



όπου με κανόνες Kirchhoff

$$I_2 - I_1 + 3 + I_3 = 0$$

$$12.8I_2 + 9 - 12 = 0 \Rightarrow I_2 = 0.234 \text{ mA}$$

$$5.81I_3 + 9 = 0 \Rightarrow I_3 = -1.55 \text{ mA}$$

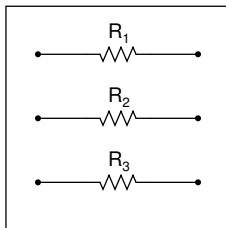
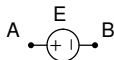
$$I_1 = 3 + I_2 + I_3 = 1.685 \text{ mA} \Rightarrow R = \frac{9}{1.685} = 5.34 \text{ k}\Omega$$

Εργαστήριο 1

Πολύμετρο - Ωμόμετρο - Βολτόμετρο - Αμπερόμετρο

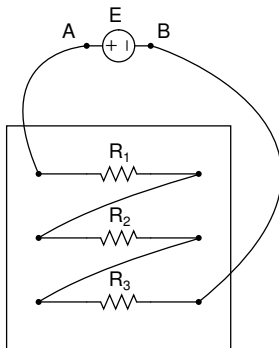
Εργαστήριο 2

Αντιστάσεις



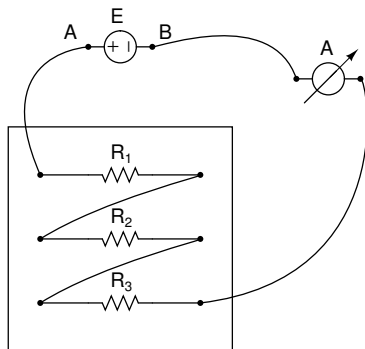
Εργαστήριο 3

Σύνδεση σε σειρά



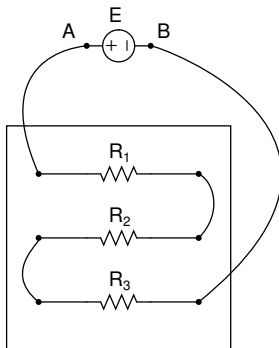
Εργαστήριο 4

Σύνδεση σε σειρά - Μέτρηση ρεύματος



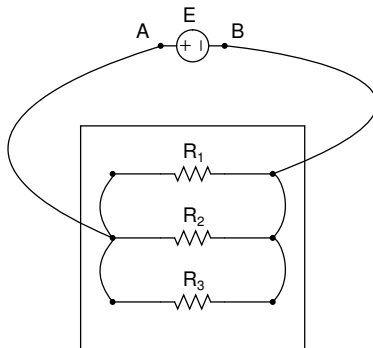
Εργαστήριο 5

Σύνδεση σε σειρά



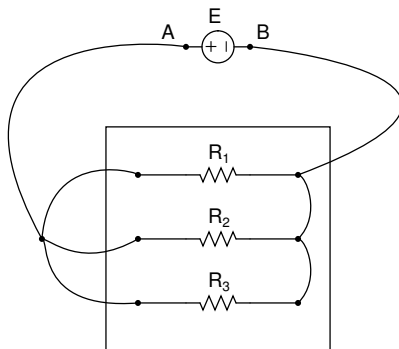
Εργαστήριο 6

Σύνδεση παράλληλα



Εργαστήριο 7

Σύνδεση παράλληλα - Μέτρηση ρεύματος



Το ρεύμα θέλει προσοχή

- Το ανθρώπινο σώμα έχει ηλεκτρική αντίσταση και αν γίνει μέρος κυκλώματος και περάσει ρεύμα μέσα του έχουμε τραυματισμό και ίσως και θάνατο. Το διερχόμενο ρεύμα εξαρτάται από την τάση επαφής, την σωματική αντίσταση και τη συχνότητα του ρεύματος.
- Διάφορα τμήματα του σώματος έχουν διαφορετική αντίσταση που μεταβάλλεται από τις συνθήκες περιβάλλοντος. Π.χ. η υγρασία ελαττώνει την αντίσταση, άρα περνάει περισσότερο ρεύμα.
- Με $\sim 10\text{mA}$ στο χέρι έχουμε σπασμούς και αδυναμία να ανοίξουμε το κύκλωμα.
- Με 1mA από την καρδιά έχουμε μαρμαρυγή που μπορεί να οδηγήσει σε θάνατο.
- Ακολουθούν δυο φωτογραφίες από σχετικά σοβαρό τραυματισμό από ρεύμα κοινής οικιακής τάσης.

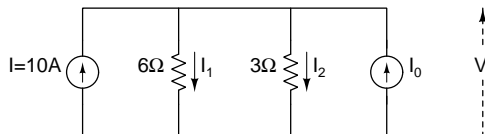
Το ρεύμα θέλει προσοχή

Τραυματισμός τόξου όπου το ρεύμα πέρασε μέσα από το χέρι.



Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα δίδεται $P_{6\Omega} = 24 \text{ W}$. Ποιο είναι το ρεύμα I_0 ;



$$P_{6\Omega} = I_1^2 6 = 24 \Rightarrow I_1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \text{ A}$$

$$V = I_1 6 = \pm 12 \text{ V}$$

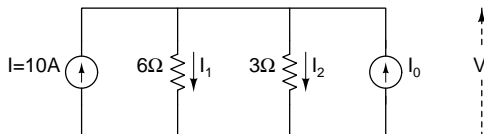
$$I_2 = \frac{V}{3} = \pm \frac{12}{3} = \pm 4 \text{ A}$$

$$I + I_0 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_0 = I_1 + I_2 - I = \begin{cases} 2 + 4 - 10 = -4 \text{ A} \\ -2 - 4 - 10 = -16 \text{ A} \end{cases}$$

Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

Άσκηση

Στο παρακάτω κύκλωμα δίδεται $P_{6\Omega} = 24 \text{ W}$. Ποιο είναι το ρεύμα I_0 ;



$$P_{6\Omega} = I_1^2 6 = 24 \Rightarrow I_1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \text{ A}$$

$$V = I_1 6 = \pm 12 \text{ V}$$

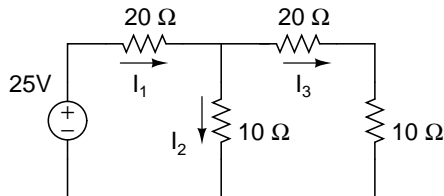
$$I_2 = \frac{V}{3} = \pm \frac{12}{3} = \pm 4 \text{ A}$$

$$I + I_0 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_0 = I_1 + I_2 - I = \begin{cases} 2 + 4 - 10 = -4 \text{ A} \\ -2 - 4 - 10 = -16 \text{ A} \end{cases}$$

Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

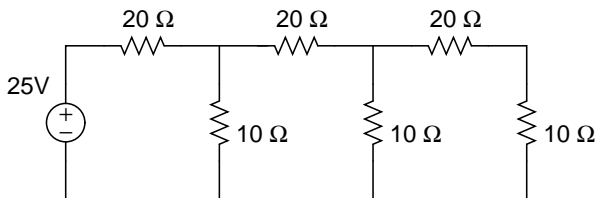
Άσκηση

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα.

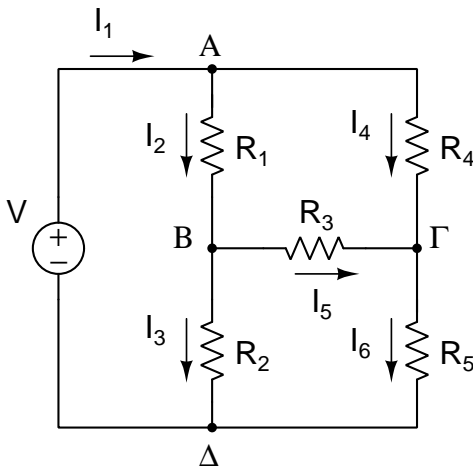


Άσκηση

Να βρεθούν τα κλαδικά ρεύματα στο παρακάτω κύκλωμα.



Παράδειγμα 1 - Kirchhoff - κλαδικά ρεύματα



Παράδειγμα 1 - Kirchhoff - κλαδικά ρεύματα 2

$$A : \quad I_1 - I_2 - I_4 = 0$$

$$B : \quad I_2 - I_5 - I_3 = 0$$

$$\Gamma : \quad I_4 + I_5 - I_6 = 0$$

$$\Delta : \quad I_3 + I_6 - I_1 = 0$$

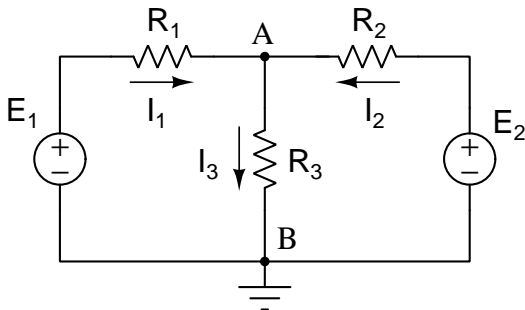
συνδυασμός $-(A+B+\Gamma) = \Delta$, άρα μόνο 3 εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους - και από ελάχιστους βρόγχους (οφθαλμούς):

$$R_1 I_2 + R_2 I_3 - V = 0$$

$$R_4 I_4 - R_3 I_5 - R_1 I_2 = 0$$

$$R_3 I_5 + R_5 I_6 - R_2 I_3 = 0$$

Παράδειγμα 2 - Kirchhoff - κλαδικά ρεύματα



Παράδειγμα 2 - Kirchhoff - κλαδικά ρεύματα 2

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - E_1 &= 0 \\ -R_2 I_2 + E_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{E_1 - R_3 I_3}{R_1} + \frac{E_2 - R_3 I_3}{R_2} - I_3 &= 0 \\ I_1 &= \frac{E_1 - R_3 I_3}{R_1} \\ I_2 &= \frac{E_2 - R_3 I_3}{R_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + 1}$$

Νούμερα: $E_1 = 12\text{V}$, $E_2 = 9\text{V}$, $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 4\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\text{k}\Omega$

Λύση: $I_1 = 2.192 \text{ mA}$, $I_2 = 0.346 \text{ mA}$, $I_3 = 2.538 \text{ mA}$

Kirchhoff ανάλυση με κλαδικά ρεύματα

- Εντοπίζετε κόμβους και κλάδους.
- Κάνετε όποιες απλοποιήσεις μπορείτε χωρίς να *σκεπάσετε* τα στοιχεία που χρειάζεστε για τη λύση.
- Σχεδιάζετε ρεύματα στους κλάδους με αυθαίρετη φορά.
- Εφαρμόζετε κανόνα ρευμάτων Kirchhoff σε όλους τους κόμβους. Αλγεβρικό άθροισμα ρευμάτων σε κάθε κόμβο είναι μηδέν. Επιλέξτε μια παραδοχή για πρόσημο και διατηρείστε τη για όλη τη διαδικασία. Προσοχή. Δεν θα είναι όλες οι εξισώσεις σας ανεξάρτητες.

Kirchhoff ανάλυση με κλαδικά ρεύματα

- Εφαρμόζετε κανόνα τάσεων Kirchhoff στους ελάχιστους βρόχους (οφθαλμούς) για ανεξάρτητες εξισώσεις. Για ωμικές αντιστάσεις, αν διαγράφετε τον βρόχο με τη φορά του ρεύματος η πτώση τάσης είναι θετική. Διαφορετικά, αρνητική. Για πηγές τάσης το πρόσημο είναι ίδιο με την πολικότητα που συναντάτε πρώτα. Αν συναντάτε πηγή ρεύματος έχετε μια άγνωστη τάση στα άκρα της. Σύσταση: Επιλέξτε βρόχο χωρίς πηγές ρεύματος.
- Λύνετε το γραμμικό σύστημα ανεξαρτήτων εξισώσεων με όποιον τρόπο θέλετε (π.χ. μέθοδο αντικαταστάσεως, απαλοιφή Gauss).
- Από τα ρεύματα μπορείτε να υπολογίσετε τάσεις στα άκρα στοιχείων και ισχύ που καταναλώνουν ή παράγουν.