

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

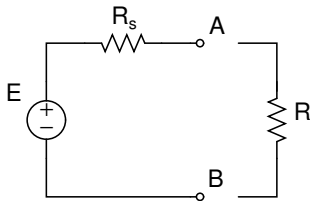
Κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσομένου σταθερής κατάστασης

Α. Δροσόπουλος

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικό Η/Υ
Σχολή Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

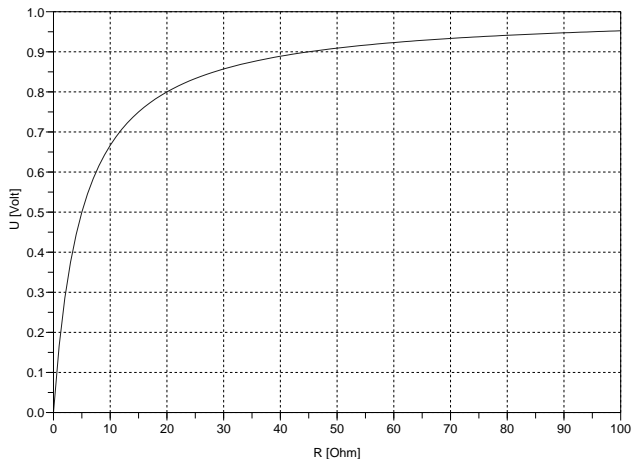
Πραγματική πηγή τάσης

$$V = \frac{R}{R_s + R} E = \frac{R + R_s - R_s}{R_s + R} E = E \left(1 - \frac{R_s}{R_s + R} \right)$$



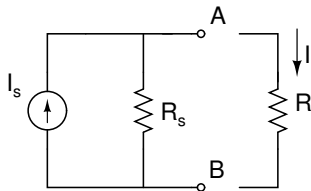
Αν θέσουμε $R_s = 5 \, \Omega$, $E = 1 \, \text{V}$ και μεταβάλλουμε το φορτίο R μεταξύ $0 - 100 \, \Omega$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα.

Πραγματική πηγή τάσης



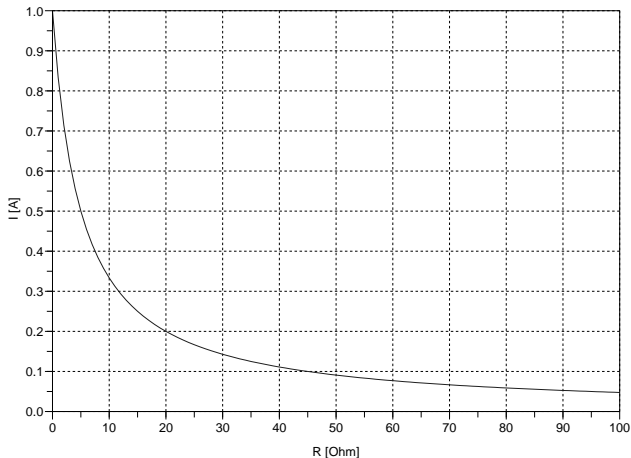
Πραγματική πηγή ρεύματος

$$I = \frac{R_s}{R_s + R} I_s$$

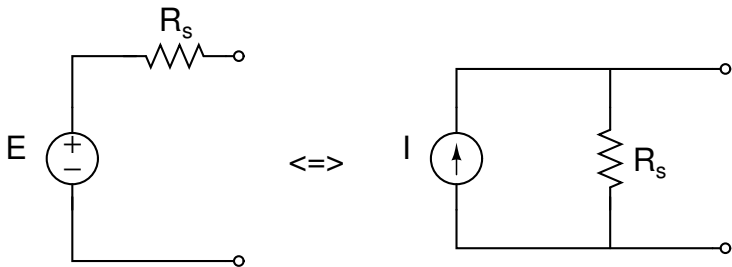


Αν θέσουμε $R_s = 5 \, \Omega$, $I_s = 1 \, \text{A}$ και μεταβάλουμε το φορτίο R μεταξύ $0 - 100 \, \Omega$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα.

Πραγματική πηγή ρεύματος



Μετασχηματισμός πηγών



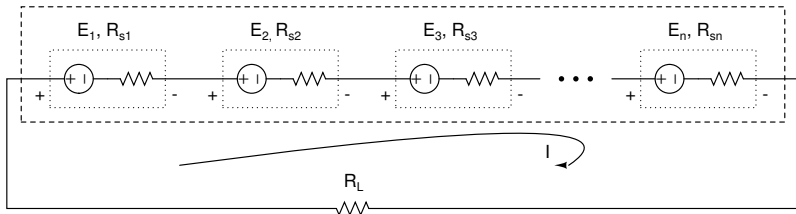
Από πηγή τάσης σε πηγή ρεύματος, η εν σειρά αντίσταση είναι ίδια με την παράλληλη και

$$I = \frac{E}{R_s}$$

Από πηγή ρεύματος σε πηγή τάσης, η παράλληλη αντίσταση είναι ίδια με την εν σειρά και

$$E = IR_s$$

Πηγές τάσης εν σειρά



$$I \cdot (R_{s1} + R_{s2} + \dots + R_{sN}) + I \cdot R_L + (E_1 + E_2 + \dots + E_N) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$I R_L + I R_{s,ολικη} + E_{ολικη} = 0$$

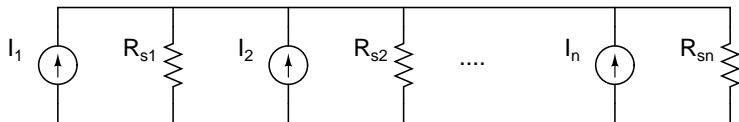
όπου

$$E_{ολικη} = \sum_{i=1}^N E_i$$

και

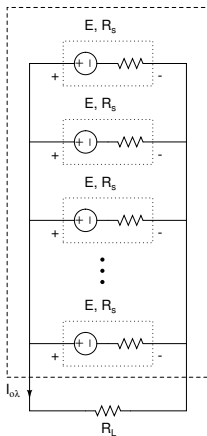
$$R_{s,ολικη} = \sum_{i=1}^N R_{si}$$

Πηγές ρεύματος παράλληλα



$$I_{\text{ολικό}} = \sum_{i=1}^N I_i \quad \frac{1}{R_{s,\text{ολική}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_{s,i}}$$

Πηγές τάσης παράλληλα

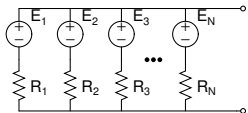


$$I_{ολικό} = \sum_{i=1}^N I_i = N \cdot I \quad \text{προϋπόθεση};; \quad R_{s,ολική} = \frac{R_s}{N}$$

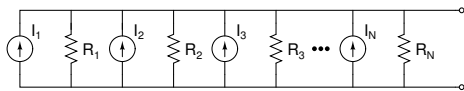
Αδύνατες συνδεσμολογίες

- Ιδανικές πηγές ρεύματος (διαφορετικής τιμής καθεμιά) εν σειρά.
- Ιδανικές πηγές τάσης (διαφορετικής τιμής καθεμιά) παράλληλα.

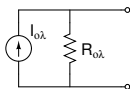
Θεώρημα Millman



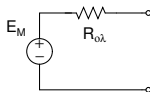
(a)



(b)



(c)



(d)

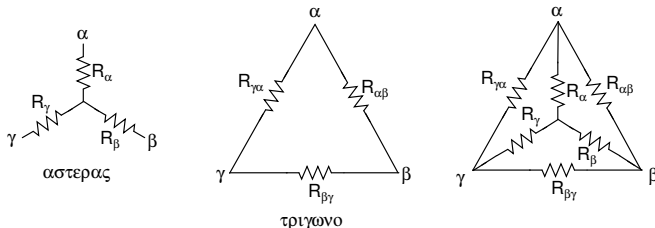
$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

$$E_M = (I_1 + I_2 + \dots + I_N) R_{o\lambda} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_N}{R_N}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}$$

Άσκηση

Άσκηση από εξεταστική Σεπτεμβρίου 2017 σαν παράδειγμα μετασχηματισμών πηγών

Μετατροπή αστήρα / τριγώνου



$$R_{AB} = R_{\alpha} + R_{\beta} = \frac{R_{\alpha\beta} \cdot (R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha})}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}} \quad (1)$$

$$R_{B\Gamma} = R_{\beta} + R_{\gamma} = \frac{R_{\beta\gamma} \cdot (R_{\gamma\alpha} + R_{\alpha\beta})}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}} \quad (2)$$

$$R_{\Gamma A} = R_{\gamma} + R_{\alpha} = \frac{R_{\gamma\alpha} \cdot (R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma})}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}} \quad (3)$$

Μετατροπή αστέρα / τριγώνου

Από τρίγωνο σε αστέρα ($\Delta \rightarrow \Upsilon$).

$$R_{\alpha} = \frac{R_{\alpha\beta}R_{\gamma\alpha}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}} \quad (4)$$

$$R_{\beta} = \frac{R_{\beta\gamma}R_{\alpha\beta}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}} \quad (5)$$

$$R_{\gamma} = \frac{R_{\gamma\alpha}R_{\beta\gamma}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}} \quad (6)$$

Από (3) - (2) + (1) έχουμε την (4). Ομοίως και για τις άλλες.

Μετατροπή αστέρα / τριγώνου

Από αστέρα σε τρίγωνο ($\Upsilon \rightarrow \Delta$).

$$R_{\alpha\beta} = \frac{R_{\alpha}R_{\beta} + R_{\beta}R_{\gamma} + R_{\gamma}R_{\alpha}}{R_{\gamma}} \quad (7)$$

$$R_{\beta\gamma} = \frac{R_{\alpha}R_{\beta} + R_{\beta}R_{\gamma} + R_{\gamma}R_{\alpha}}{R_{\alpha}} \quad (8)$$

$$R_{\gamma\alpha} = \frac{R_{\alpha}R_{\beta} + R_{\beta}R_{\gamma} + R_{\gamma}R_{\alpha}}{R_{\beta}} \quad (9)$$

Από ((4)(5) + (5)(6) + (6)(4)) / (4) έχουμε την (8). Ομοίως και για τις άλλες.

Μετατροπή αστέρα / τριγώνου

Μνημονικός κανόνας για $\Upsilon \rightarrow \Delta$ Η αντίσταση κάθε πλευράς του ισοδυνάμου τριγώνου Δ είναι ίση με το άθροισμα των τριών γινομένων των αντιστάσεων του αστέρα Υ , αν πάρουμε τις πλευρές ανά δύο, που διαιρείται με την αντίσταση του αντίθετου κλάδου του αστέρα.

Μνημονικός κανόνας για $\Delta \rightarrow \Upsilon$ Η αντίσταση σε κάθε κλάδο του ισοδυνάμου αστέρα Υ είναι ίση με το γινόμενο των αντιστάσεων των διπλανών πλευρών του τριγώνου Δ που περικλείουν τον κλάδο, διαιρούμενο με το άθροισμα των αντιστάσεων του τριγώνου.

Μετατροπή αστέρα / τριγώνου

Αν οι τρεις πλευρές του αστέρα είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή R_Y τότε και οι τρεις πλευρές του τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή

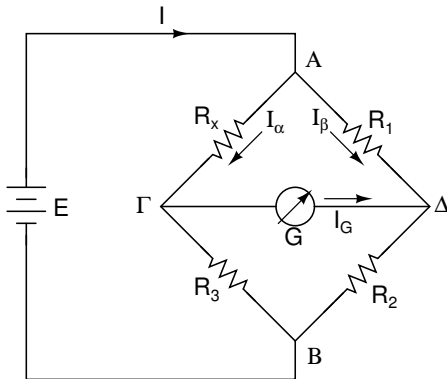
$$R_{\Delta} = \frac{3R_Y^2}{R_Y} = 3R_Y$$

Ομοίως, αν οι τρεις πλευρές του τριγώνου είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή R_{Δ} τότε και οι τρεις πλευρές του αστέρα είναι ίσες μεταξύ τους με τιμή

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}^2}{3R_{\Delta}} = \frac{1}{3} R_{\Delta}$$

Γέφυρα Wheatstone

Η γέφυρα Wheatstone είναι ένα κύκλωμα που εφαρμόζεται πολύ σε ηλεκτρικές μετρήσεις. Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ότι αποτελείται από 4 ωμικές αντιστάσεις εκ των οποίων η μία είναι άγνωστη και οι άλλες τρεις γνωστές.



Γέφυρα Wheatstone

Το γαλβανόμετρο που συνδέει τα Γ και Δ είναι ένα πολύ ευαίσθητο όργανο που δείχνει την παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος. Λέμε ότι η γέφυρα βρίσκεται σε ισορροπία όταν το ρεύμα που περνάει από το γαλβανόμετρο είναι $I_G = 0$. Έχουμε τότε $I = I_\alpha + I_\beta$ όπου I_α είναι το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΓΒ και I_β το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο ΑΔΒ. Εφόσον $I_G = 0$ τα σημεία Γ και Δ έχουν το ίδιο δυναμικό. Προσοχή εδώ. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των Γ και Δ είναι μηδέν. Τα δυναμικά στα Γ και Δ είναι ίδια αλλά όχι απαραίτητα μηδέν. Επομένως,

$$V_{A\Gamma} = V_{A\Delta} \Rightarrow I_\alpha R_x = I_\beta R_1$$

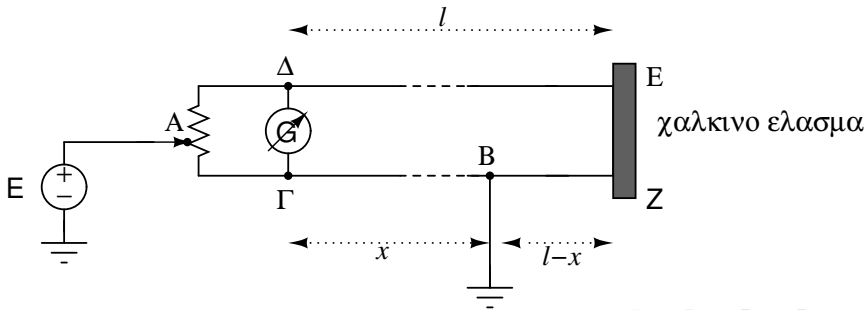
$$V_{\Gamma B} = V_{\Delta B} \Rightarrow I_\alpha R_3 = I_\beta R_2$$

Διαιρώντας κατά μέλη βγαίνει η συνθήκη ισορροπίας την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την άγνωστη αντίσταση από τις γνωστές.

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}$$

Εντοπισμός θέσης σφάλματος

Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια γραμμή μεταφοράς μήκους ℓ που αποτελείται από δύο ηλεκτρικές γραμμές (π.χ. υπόγειο καλώδιο). Έστω ότι υπάρχει διαρροή στο σημείο Β που απέχει άγνωστη απόσταση x από το Γ. Η αρχή της γραμμής είναι τα σημεία Γ και Δ και το τέρμα της γραμμής τα σημεία Ε και Ζ. Βραχυκυκλώνουμε το τέρμα Ε, Ζ με ένα μικρό χάλκινο έλασμα αμελητέας αντίστασης.



Εντοπισμός θέσης σφάλματος

Στην αρχή Γ, Δ συνδέουμε το γαλβανόμετρο G , μια μεταβλητή αντίσταση και την πηγή με τάση E . Ο συμβολισμός είναι ίδιος με το διάγραμμα που ορίστηκε η γέφυρα Wheatstone. Η συνθήκη ισορροπίας μας δίνει

$$\frac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}} = \frac{R_{\Delta EZB}}{R_{\Gamma B}} = \frac{l + (l - x)}{x} = \frac{2l - x}{x} \Rightarrow x = \frac{2l}{1 + \frac{R_{A\Delta}}{R_{A\Gamma}}}$$

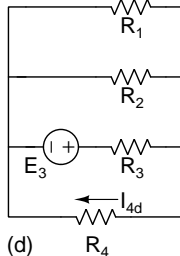
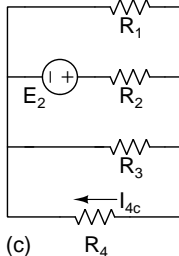
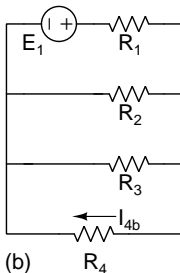
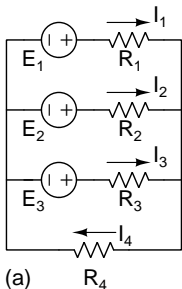
όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $R = \rho l/S$ για τις αντιστάσεις και το γεγονός ότι το υλικό και η διατομή των αγωγών είναι ίδια (ρ και S ίδια).

Θεώρημα Επαλληλίας – Αρχή Υπέρθεσης

- Ένα άλλο σημαντικό και χρήσιμο θεώρημα είναι το θεώρημα επαλληλίας ή αλλιώς η αρχή της υπερθέσεως. Σε ένα γραμμικό κύκλωμα που έχει περισσότερες από μία πηγές μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκρισή του (τάση και ρεύμα σε κάθε στοιχείο) για κάθε πηγή ξεχωριστά, «σβήνοντας» τις υπόλοιπες. Η συνολική απόκριση είναι το άθροισμα των επί μέρους αποκρίσεων. Με το θεώρημα αυτό μπορούμε πολλές φορές να απλοποιήσουμε σύνθετα κυκλώματα σε πιο απλά.
- Πηγή τάσης την «σβήνουμε» βραχυκυκλώνοντάς την.
- Πηγή ρεύματος την «σβήνουμε» ανοίγοντάς την.

Άσκηση

Να βρεθεί το ρεύμα I_4 στο κύκλωμα (a) με τη μέθοδο υπέρθεσης όταν $E_1 = 18\text{ V}$, $E_2 = 9\text{ V}$, $E_3 = 20\text{ V}$, $R_1 = 1.2\text{ k}\Omega$, $R_2 = 800\ \Omega$, $R_3 = 1.4\text{ k}\Omega$, $R_4 = 600\ \Omega$.



Άσκηση

Με τη μέθοδο επαλληλίας έχουμε τα κυκλώματα (b),(c),(d). Ένας απλός τρόπος είναι να κάνουμε την κάθε πηγή τάσης πηγή ρεύματος, παράλληλες τις R_1 , R_2 , R_3 και έναν διαιρέτη ρεύματος για το κάθε ρεύμα I_{4b} , I_{4c} , I_{4d} .

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R = 357.45 \, \Omega$$

$$I_{4b} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_1}{R_1} = 5.6 \, \text{mA}$$

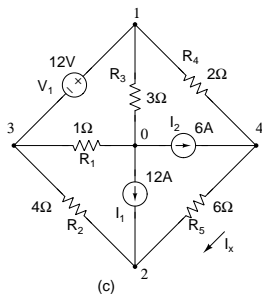
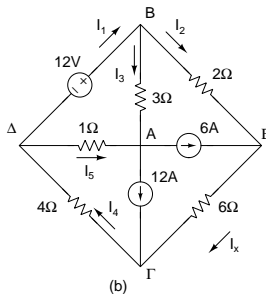
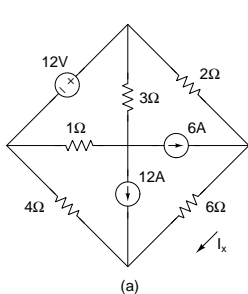
$$I_{4c} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_2}{R_2} = 4.2 \, \text{mA} \quad I_{4d} = \frac{R}{R + R_4} \frac{E_3}{R_3} = 5.33 \, \text{mA}$$

$$I_4 = I_{4b} + I_{4c} + I_{4d} = 15.1 \, \text{mA}$$

Στο βιβλίο βλέπετε και εναλλακτικούς τρόπους και μπορείτε και εσείς να σκεφτείτε και άλλους.

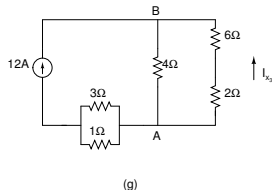
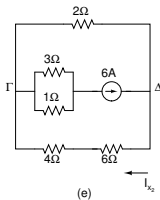
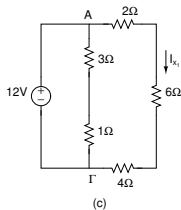
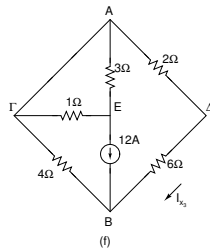
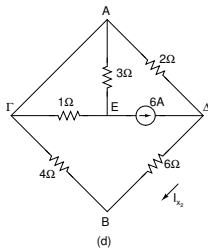
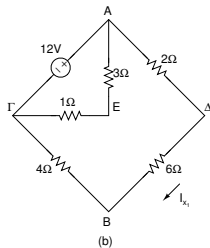
Άσκηση

Να υπολογισθεί το ρεύμα και η καταναλισκόμενη ισχύς στην αντίσταση $6\ \Omega$ στο κύκλωμα (a).



Άσκηση

Με υπέρθεση



Άσκηση

Όταν μόνο η πηγή τάσης είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (b) και το ισοδύναμό του (c). Η τάση V_{AG} στα άκρα του κλάδου που περιέχει την αντίσταση $6\ \Omega$ είναι 12 V. Οπότε,

$$I_{x_1} = \frac{12}{2 + 6 + 4} = 1\text{ A}$$

Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 6 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (d) και το ισοδύναμό του (e). Με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_2} = \frac{2}{2 + 10} 6 = 1\text{ A}$$

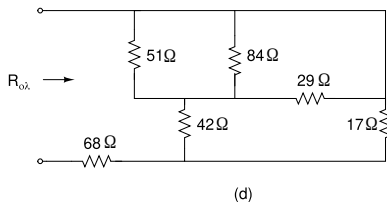
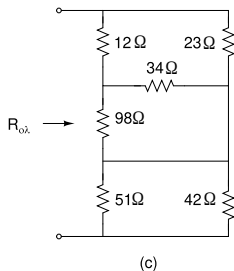
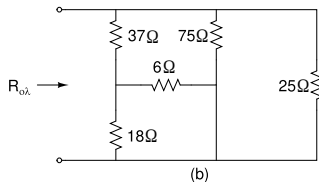
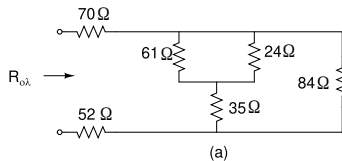
Όταν μόνο η πηγή ρεύματος 12 A είναι ενεργός, έχουμε το κύκλωμα (f) και το ισοδύναμό του (g). Και πάλι με διαιρέτη ρεύματος

$$I_{x_3} = -\frac{4}{4 + 8} 12 = -4\text{ A}$$

Τελικά, $I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} = 1 + 1 - 4 = -2\text{ A}$ και $P = I_x^2 \cdot 6 = 24\text{ W}$.

Άσκηση

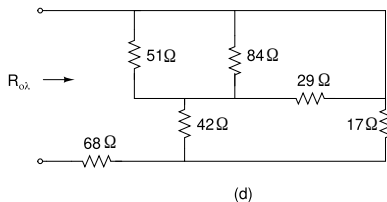
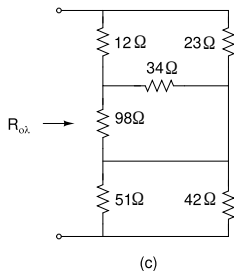
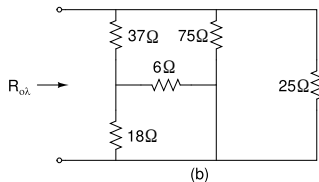
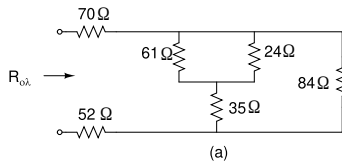
Να υπολογιστούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις στα παρακάτω δικτυώματα.



154.2 Ω , 12.9 Ω , 37.25 Ω , 81.1 Ω

Άσκηση

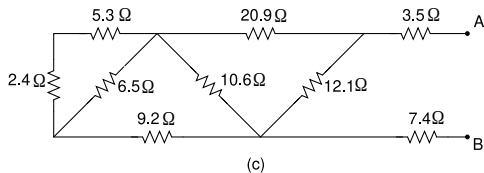
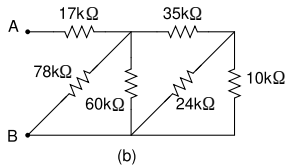
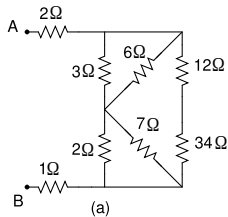
Να υπολογιστούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις στα παρακάτω δικτυώματα.



154.2 Ω , 12.9 Ω , 37.25 Ω , 81.1 Ω

Άσκηση

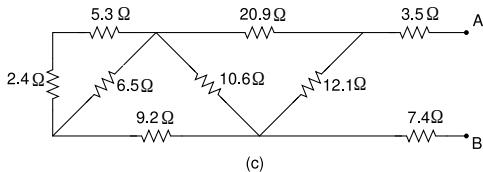
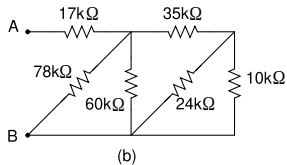
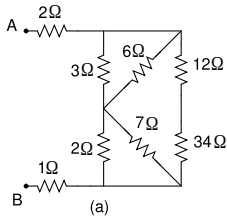
Να υπολογιστούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις που φαίνονται από τα A,B στα παρακάτω δικτυώματα.



6.3 Ω, 35.77 kΩ, 19.22 Ω

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι ισοδύναμες αντιστάσεις που φαίνονται από τα A, B στα παρακάτω δικτυώματα.



6.3Ω , $35.77k\Omega$, 19.22Ω