

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσομένου σταθερής
κατάστασης

Α. Δροσόπουλος

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικό Η/Υ
Σχολή Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών

- καρτεσιανή μορφή

$$z = x + jy$$

όπου $j = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα, x είναι το πραγματικό μέρος του z και y είναι το φανταστικό μέρος του z .

$$x = \Re\{z\} \qquad y = \Im\{z\}$$

- Ιδιότητες φανταστικής μονάδας

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &= -j \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\ j^4 &= j^2 \cdot j^2 = 1 \\ j^5 &= j \cdot j^4 = j \\ &\vdots \\ j^{n+4} &= j^n \end{aligned}$$

Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών

- καρτεσιανή μορφή

$$z = x + jy$$

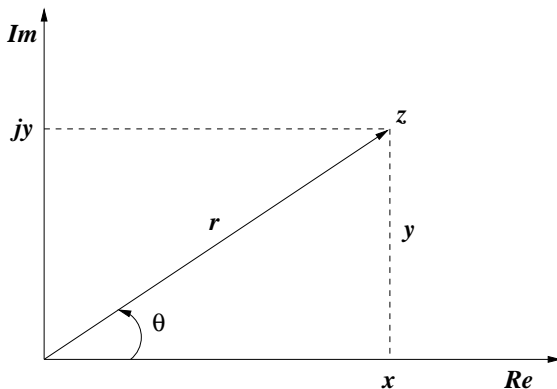
όπου $j = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα, x είναι το πραγματικό μέρος του z και y είναι το φανταστικό μέρος του z .

$$x = \Re\{z\} \qquad y = \Im\{z\}$$

- Ιδιότητες φανταστικής μονάδας

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &= -j \\ j^2 &= -1 \\ j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\ j^4 &= j^2 \cdot j^2 = 1 \\ j^5 &= j \cdot j^4 = j \\ &\vdots \\ j^{n+4} &= j^n \end{aligned}$$

Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών



Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών

- πολική μορφή

$$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ή

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

και

$$z = x + jy = r \angle \theta = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

- εκθετική μορφή

$$z = re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

Αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών

- πολική μορφή

$$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ή

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta$$

και

$$z = x + jy = r \angle \theta = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

- εκθετική μορφή

$$z = re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

Μετατροπές

$$z = x + jy \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 10 \text{ ΤΕΤ}$$

$$z = -x + jy \quad \theta = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 20 \text{ ΤΕΤ}$$

$$z = -x - jy \quad \theta = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 30 \text{ ΤΕΤ}$$

$$z = x - jy \quad \theta = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad \text{ή} \quad \theta = -\tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 40 \text{ ΤΕΤ}$$

όπου $x > 0, y > 0$.

Παραδείγματα

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική και εκθετική μορφή. $z_1 = 6 + j8$, $z_2 = -6 + j8$, $z_3 = -6 - j8$, $z_4 = 6 - j8$.

Ο $z_1 = 6 + j8$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_1 = 10 \angle 53.13^\circ$ και η εκθετική $z_1 = 10e^{j53.13^\circ}$.

Παραδείγματα

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε πολική και εκθετική μορφή. $z_1 = 6 + j8$, $z_2 = -6 + j8$, $z_3 = -6 - j8$, $z_4 = 6 - j8$.

Ο $z_1 = 6 + j8$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_1 = 10 \angle 53.13^\circ$ και η εκθετική $z_1 = 10e^{j53.13^\circ}$.

Παραδείγματα

Ο $z_2 = -6 + j8$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο επομένως

$$r_2 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_2 = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 126.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_2 = 10 \angle 126.87^\circ$ και η εκθετική
 $z_2 = 10e^{j126.87^\circ}$.

Ο $z_3 = -6 - j8$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_3 = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = 233.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_3 = 10 \angle 233.13^\circ$ και η εκθετική
 $z_3 = 10e^{j233.13^\circ}$.

Παραδείγματα

Ο $z_2 = -6 + j8$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο επομένως

$$r_2 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_2 = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 126.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_2 = 10 \angle 126.87^\circ$ και η εκθετική
 $z_2 = 10e^{j126.87^\circ}$.

Ο $z_3 = -6 - j8$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_3 = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = 233.13^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_3 = 10 \angle 233.13^\circ$ και η εκθετική
 $z_3 = 10e^{j233.13^\circ}$.

Παραδείγματα

Επίσης σωστό είναι

$$\theta_3 = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = -126.87^\circ$$

και πολική μορφή $z_3 = 10 \angle -126.87^\circ$ και εκθετική $z_3 = 10e^{-j126.87^\circ}$.

Ο $z_4 = 6 - j8$ ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_4 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_4 = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 306.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_4 = 10 \angle 306.87^\circ$ και η εκθετική $z_4 = 10e^{j306.87^\circ}$.

Παραδείγματα

Επίσης σωστό είναι

$$\theta_3 = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{6} = -126.87^\circ$$

και πολική μορφή $z_3 = 10 \angle -126.87^\circ$ και εκθετική
 $z_3 = 10e^{-j126.87^\circ}$.

Ο $z_4 = 6 - j8$ ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο επομένως

$$r_4 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \quad \theta_4 = 360^\circ - \tan^{-1} \frac{8}{6} = 306.87^\circ$$

Η πολική μορφή είναι $z_4 = 10 \angle 306.87^\circ$ και η εκθετική
 $z_4 = 10e^{j306.87^\circ}$.

Παραδείγματα

Επίσης σωστό είναι

$$\theta_4 = -\tan^{-1} \frac{8}{6} = -53.13^\circ$$

και πολική μορφή $z_4 = 10 \angle -53.13^\circ$ και εκθετική $z_4 = 10e^{-j53.13^\circ}$.

Για σας:

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή. $z_1 = 12 \angle -60^\circ$, $z_2 = -50 \angle 285^\circ$, $z_3 = 8e^{j10^\circ}$, $z_4 = 20e^{-j\pi/3}$.

Παραδείγματα

Επίσης σωστό είναι

$$\theta_4 = -\tan^{-1} \frac{8}{6} = -53.13^\circ$$

και πολική μορφή $z_4 = 10 \angle -53.13^\circ$ και εκθετική $z_4 = 10e^{-j53.13^\circ}$.

Για σας:

Να εκφράσετε τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή. $z_1 = 12 \angle -60^\circ$, $z_2 = -50 \angle 285^\circ$, $z_3 = 8e^{j10^\circ}$, $z_4 = 20e^{-j\pi/3}$.

Πράξεις

- Ισότητα: Δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$ είναι ίσοι αν και μόνον αν και τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη είναι αντιστοίχως ίσα

$$x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2$$

- Άθροισμα / Διαφορά

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

- Πολλαπλασιασμός / Διαίρεση

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Πράξεις

- Εναλλακτικά, στην καρτεσιανή μορφή

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \left(\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \right) \left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) =$$

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ασκήσεις

- Εάν $A = 2 + j5$, $B = 4 - j6$ να βρείτε, α) $A^*(A + B)$ και β) $(A + B)/(A - B)$.
- Εάν $A = 2 + j5$ τότε $A^* = 2 - j5$ και

$$A + B = (2 + 4) + j(5 - 6) = 6 - j$$

οπότε

$$A^*(A + B) = (2 - j5)(6 - j) = 5.385 \angle -68.2^\circ \cdot 6.083 \angle -9.46^\circ = 32.757 \angle -77.66^\circ = 7 - j32$$

Ομοίως

$$A - B = (2 - 4) + j[5 - (-6)] = -2 + j11$$

οπότε

$$\frac{A + B}{A - B} = \frac{6 - j}{-2 + j11} = \frac{6.083 \angle -9.46^\circ}{11.18 \angle 100.305^\circ} = 0.544 \angle -109.765^\circ = -0.184 - j0.512$$

Ασκήσεις

- Εάν $A = 2 + j5$, $B = 4 - j6$ να βρείτε, α) $A^*(A + B)$ και β) $(A + B)/(A - B)$.
- Εάν $A = 2 + j5$ τότε $A^* = 2 - j5$ και

$$A + B = (2 + 4) + j(5 - 6) = 6 - j$$

οπότε

$$\begin{aligned} A^*(A + B) &= (2 - j5)(6 - j) = 5.385 \angle -68.2^\circ \cdot 6.083 \angle -9.46^\circ = \\ &32.757 \angle -77.66^\circ = 7 - j32 \end{aligned}$$

Ομοίως

$$A - B = (2 - 4) + j[5 - (-6)] = -2 + j11$$

οπότε

$$\begin{aligned} \frac{A + B}{A - B} &= \frac{6 - j}{-2 + j11} = \frac{6.083 \angle -9.46^\circ}{11.18 \angle 100.305^\circ} = \\ &0.544 \angle -109.765^\circ = -0.184 - j0.512 \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων

$$\frac{(2 + j5) \cdot (8e^{j10^\circ})}{2 + j4 + 2 \angle -40^\circ} \quad \text{και} \quad \frac{j(3 - j4)^*}{(-1 + j6)(2 + j)^2}$$

$$Z_1 = 10 + j12 + \frac{(20 + j40)(5 - j15)}{25 + j25} \quad Z_2 = \frac{10(-5 + j13)(4 + j4)}{(1 + j2)(2 + j5)(-5 + j3)}$$

$$Z_3 = 0.2 + j7 + 4.7e^{j0.5} + (2 + j3)e^{-j0.6\pi}$$

Ορισμός Εναλλασσομένου Ρεύματος

Εναλλασσόμενο ρεύμα είναι το ρεύμα που επαναλαμβάνεται περιοδικά στο χρόνο και διαγράφει ίσες θετικές και αρνητικές επιφάνειες σε μια περίοδο.

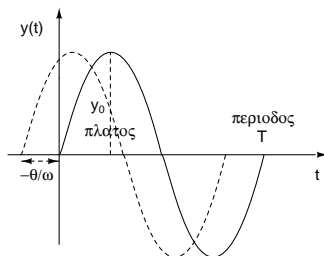
Σύμβολα συνεχούς: I για το ρεύμα, V για την τάση

Σύμβολα εναλλασσομένου: i ή $i(t)$ για το ρεύμα, v ή $v(t)$ για την τάση

Σύνθεση

Η πιο απλή μορφή

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \theta)$$



Με σύνθεση Fourier μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε μορφή εναλλασσομένου ρεύματος από ημίτονα με διαφορετικά πλάτη, συχνότητες και αρχικές φάσεις. Με ανάλυση Fourier μπορούμε να αναλύσουμε οποιοδήποτε εναλλασσόμενο ρεύμα σε ημίτονα (αρμονικές).

Ενεργός Τιμή

- Το ρεύμα που διαρρέει μια ωμική αντίσταση αναπτύσσει θερμότητα (φαινόμενο Joule). Ορίζουμε ενεργό τιμή εναλλασσομένου ρεύματος, την τιμή της αντίστοιχης τάσης ή ρεύματος του συνεχούς ρεύματος που έχει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με το εναλλασσόμενο σε μια ωμική αντίσταση.
- Τρόπος υπολογισμού
- Σε περιοδικές συναρτήσεις,
 $f(t) = f(t + kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, με περίοδο T , η ενεργός τιμή της συνάρτησης (rms - root mean square) είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός που ορίζεται ως:

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Ενεργός Τιμή

- Το ρεύμα που διαρρέει μια ωμική αντίσταση αναπτύσσει θερμότητα (φαινόμενο Joule). Ορίζουμε ενεργό τιμή εναλλασσομένου ρεύματος, την τιμή της αντίστοιχης τάσης ή ρεύματος του συνεχούς ρεύματος που έχει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με το εναλλασσόμενο σε μια ωμική αντίσταση.
- Τρόπος υπολογισμού
- Σε περιοδικές συναρτήσεις,
 $f(t) = f(t + kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, με περίοδο T , η ενεργός τιμή της συνάρτησης (rms - root mean square) είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός που ορίζεται ως:

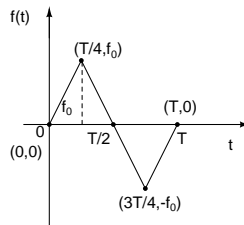
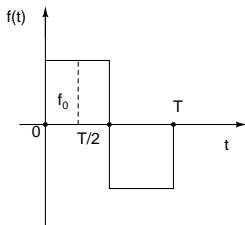
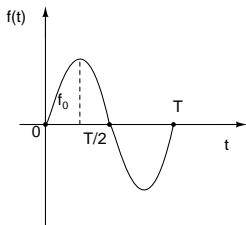
$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Ενεργός Τιμή

- Το ρεύμα που διαρρέει μια ωμική αντίσταση αναπτύσσει θερμότητα (φαινόμενο Joule). Ορίζουμε ενεργό τιμή εναλλασσομένου ρεύματος, την τιμή της αντίστοιχης τάσης ή ρεύματος του συνεχούς ρεύματος που έχει τα ίδια θερμικά αποτελέσματα με το εναλλασσόμενο σε μια ωμική αντίσταση.
- Τρόπος υπολογισμού
- Σε περιοδικές συναρτήσεις,
 $f(t) = f(t + kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, με περίοδο T , η ενεργός τιμή της συνάρτησης (rms - root mean square) είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός που ορίζεται ως:

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

Ενεργός Τιμή



$$f_{rms} = K f_0$$

Ενεργός Τιμή ημιτόνου

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

όπου $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt &= \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt = \frac{1}{2}(T-0) - \frac{1}{4\omega} \int_0^T \cos(2\omega t) d(2\omega t) = \\ &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} [\sin(2\omega t)]_0^T = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega} \left[\sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right) - \sin 0 \right] = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

εφόσον τα ημίτονα μηδενίζονται. Οπότε

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T f_0^2}{2}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ενεργός Τιμή τετραγωνικού παλμού

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{για } 0 \leq t < T/2 \\ -f_0 & \text{για } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} f_0^2 dt + \int_{T/2}^T f_0^2 dt = f_0^2 \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = f_0^2 T \Rightarrow$$

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} f_0^2 T} = f_0 \Rightarrow K = 1$$

Ενεργός Τιμή τριγωνικού παλμού

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4f_0}{T}t & \text{για } 0 \leq t < T/4 \\ 2f_0 - \frac{4f_0}{T}t & \text{για } T/4 \leq t < 3T/4 \\ -4f_0 + \frac{4f_0}{T}t & \text{για } 3T/4 \leq t < T \end{cases}$$

Στο τέλος καταλήγουμε (βλ βιβλίο)

$$f_{rms} = \frac{f_0}{\sqrt{3}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Αριθμητικές τιμές - Ισχύς και Ενέργεια

- Μέση αριθμητική τιμή

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Μέση αριθμητική τιμή ανορθωμένου

$$|\bar{f}| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |f(t)| dt$$

- Ισχύς και Ενέργεια

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

και εφόσον η ισχύς είναι πάντα ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, η ενέργεια που «δίνει» ή «παίρνει» κάποιο στοιχείο τη χρονική στιγμή t είναι

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

Αριθμητικές τιμές - Ισχύς και Ενέργεια

- Μέση αριθμητική τιμή

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Μέση αριθμητική τιμή ανορθωμένου

$$|\bar{f}| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |f(t)| dt$$

- Ισχύς και Ενέργεια

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

και εφόσον η ισχύς είναι πάντα ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, η ενέργεια που «δίνει» ή «παίρνει» κάποιο στοιχείο τη χρονική στιγμή t είναι

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

Αριθμητικές τιμές - Ισχύς και Ενέργεια

- Μέση αριθμητική τιμή

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Μέση αριθμητική τιμή ανορθωμένου

$$|\bar{f}| = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} |f(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |f(t)| dt$$

- Ισχύς και Ενέργεια

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

και εφόσον η ισχύς είναι πάντα ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, η ενέργεια που «δίνει» ή «παίρνει» κάποιο στοιχείο τη χρονική στιγμή t είναι

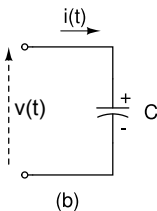
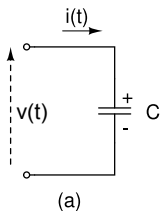
$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

Ο πυκνωτής είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που αποτελείται από δυο αγωγίμες επιφάνειες (οπλισμοί) με διηλεκτρικό υλικό ανάμεσά τους. Εάν συνδεθεί κάποια πηγή στα άκρα του πυκνωτή, ο ένας οπλισμός θα φορτιστεί με θετικό φορτίο και ο άλλος με αρνητικό. Το ολικό φορτίο στον πυκνωτή είναι ανάλογο με την τάση στα άκρα του

$$q = Cv$$

όπου η σταθερά αναλογίας C είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή με διαστάσεις Coulomb ανά Volt ή Farad (F).



Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

- Η διαφορά φορτίου μεταξύ των οπλισμών δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια.
- Λόγω του διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών, δεν υπάρχει κίνηση ηλεκτρικών φορτίων.
- Αν μεταβάλλεται το φορτίο στους οπλισμούς, τότε μεταβάλλεται και το ηλεκτρικό πεδίο, και είναι σαν να διέρχεται ρεύμα

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Με αντιστροφή και για $v(-\infty) = 0$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt$$

- Επίσης

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i \, dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

- Η διαφορά φορτίου μεταξύ των οπλισμών δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια.
- Λόγω του διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών, δεν υπάρχει κίνηση ηλεκτρικών φορτίων.
- Αν μεταβάλλεται το φορτίο στους οπλισμούς, τότε μεταβάλλεται και το ηλεκτρικό πεδίο, και είναι σαν να διέρχεται ρεύμα

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Με αντιστροφή και για $v(-\infty) = 0$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt$$

- Επίσης

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i \, dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

- Η διαφορά φορτίου μεταξύ των οπλισμών δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια.
- Λόγω του διηλεκτρικού μεταξύ των οπλισμών, δεν υπάρχει κίνηση ηλεκτρικών φορτίων.
- Αν μεταβάλλεται το φορτίο στους οπλισμούς, τότε μεταβάλλεται και το ηλεκτρικό πεδίο, και είναι σαν να διέρχεται ρεύμα

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Με αντιστροφή και για $v(-\infty) = 0$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt$$

- Επίσης

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i \, dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt$$

Ο πυκνωτής στο εναλλασσόμενο

- ιδανικός πυκνωτής
- πραγματικός πυκνωτής
- οι πυκνωτές μπορεί να έχουν σταθερή ή μεταβλητή τιμή χωρητικότητας με συνήθεις τιμές της τάξεως των mF μέχρι pF και έχουν πολλές εφαρμογές στα ηλεκτρικά κυκλώματα

Ασκήσεις

- Εάν ένας πυκνωτής με τάση 12 V στα άκρα του έχει συσσωρευμένο φορτίο 600 pC στους οπλισμούς του ποια είναι η χωρητικότητά του;

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{600 \times 10^{-12}}{12} = 50 \text{ pF}$$

Ασκήσεις

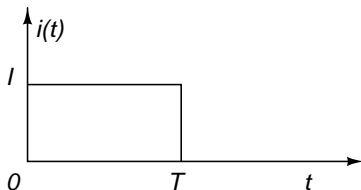
- Εάν ένας πυκνωτής με τάση 12 V στα άκρα του έχει συσσωρευμένο φορτίο 600 pC στους οπλισμούς του ποια είναι η χωρητικότητά του;



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{600 \times 10^{-12}}{12} = 50 \text{ pF}$$

Ασκήσεις

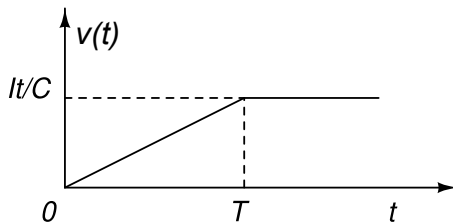
Από έναν αφόρτιστο πυκνωτή διέρχεται ο παλμός ρεύματος του σχήματος. Υπολογίστε και σχεδιάστε την τάση στα άκρα του.



$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, dt = 0 + \frac{I}{C} \int_0^t dt = \frac{It}{C} \quad \text{για } 0 \leq t \leq T$$

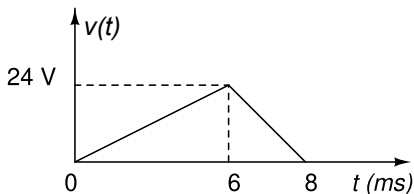
$$v(t) = \frac{IT}{C} \quad \text{για } t \geq T$$

Ασκήσεις



Ασκήσεις

Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή $5 \mu\text{F}$ δίδεται από την κυματομορφή του σχήματος. Υπολογίστε και σχεδιάστε την κυματομορφή του ρεύματος.



Ασκήσεις

$$\frac{24 - 0}{6 \times 10^{-3} - 0} = \frac{v - 0}{t - 0} \Rightarrow v(t) = 4 \times 10^3 t \text{ V για } 0 \leq t \leq 6 \text{ ms}$$

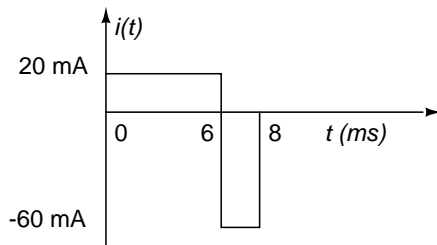
$$\frac{24 - 0}{6 \times 10^{-3} - 8 \times 10^{-3}} = \frac{v - 0}{t - 8 \times 10^{-3}} \Rightarrow$$

$$v(t) = -12 \times 10^3 (t - 8 \times 10^{-3}) = -12 \times 10^3 t + 96 \text{ V για } 6 \leq t \leq 8 \text{ ms}$$

Ασκήσεις

Επομένως το ρεύμα είναι

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = \begin{cases} 5 \times 10^{-6} \cdot 4 \times 10^3 = 20 \times 10^{-3} = 20 \text{ mA} \\ \text{για } 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ \\ -5 \times 10^{-6} \cdot 12 \times 10^3 = -60 \text{ mA} \\ \text{για } 6 \leq t \leq 8 \text{ ms} \end{cases}$$



Ασκήσεις

- Υπολογίστε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή του προηγούμενου παραδείγματος την χρονική στιγμή $t = 6 \text{ ms}$.

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \Rightarrow w_C(6 \text{ ms}) = \frac{1}{2} 5 \times 10^{-6} \cdot 24^2 =$$
$$1.44 \times 10^{-3} \text{ J} = 1.44 \text{ mJ}$$

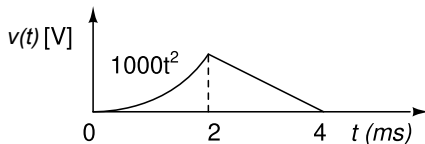
Ασκήσεις

- Υπολογίστε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή του προηγούμενου παραδείγματος την χρονική στιγμή $t = 6 \text{ ms}$.

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \Rightarrow w_C(6 \text{ ms}) = \frac{1}{2} 5 \times 10^{-6} \cdot 24^2 =$$
$$1.44 \times 10^{-3} \text{ J} = 1.44 \text{ mJ}$$

Ασκήσεις

- Η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή $4 \mu\text{F}$ δίδεται από την κυματομορφή του σχήματος. Υπολογίστε και σχεδιάστε την κυματομορφή του ρεύματος.

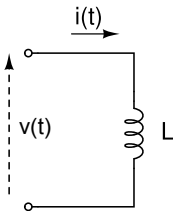


- Υπολογίστε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή την χρονική στιγμή $t = 2$ ms.

Το πηνίο στο εναλλασσόμενο

Πηνίο είναι ένα ηλεκτρικό στοιχείο που αποτελείται από αγωγό τυλιγμένο συνήθως γύρω από κάποιον κυλινδρικό σιδηρομαγνητικό πυρήνα. Σύμφωνα με το φαινόμενο επαγωγής, μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, προκαλεί την δημιουργία τάσης στα άκρα του πηνίου σύμφωνα με τη σχέση

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



όπου η σταθερά αναλογίας L είναι η αυτεπαγωγή του πηνίου (συνήθως συντομεύεται απλώς σε επαγωγή) με διαστάσεις Volt-second ανά Ampere ή Henry (H).

Το πηνίο στο εναλλασσόμενο

σχέση ρεύματος - τάσης

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t)$$

ενέργεια

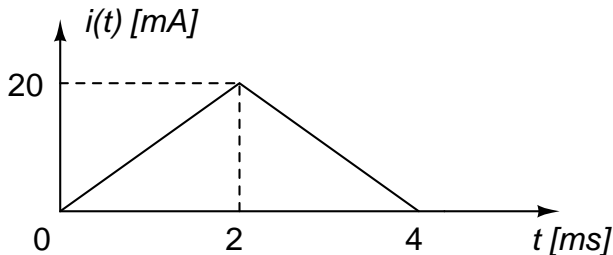
$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = \int_{-\infty}^t L i(t) di(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \Bigg|_{i(-\infty)}^{i(t)} =$$

$$\frac{1}{2} L i^2(t) \quad \text{J}$$

εφόσον $i(-\infty) = 0$.

Ασκήσεις

Το ρεύμα σε ένα πηνίο 10 mH έχει την κυματομορφή του παρακάτω σχήματος. Υπολογίστε και σχεδιάστε την κυματομορφή της τάσης.



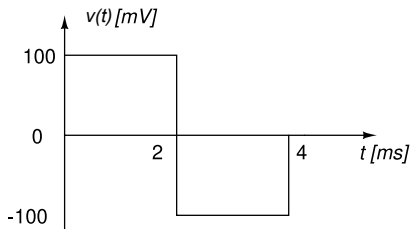
Ασκήσεις

Η κυματομορφή του ρεύματος είναι

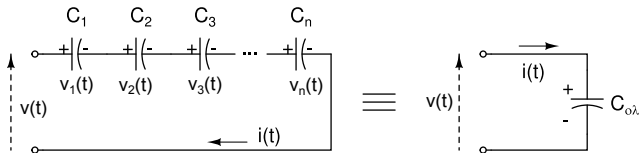
$$\frac{20-0}{2-0} = \frac{i-0}{t-0} \Rightarrow i(t) = 10t \text{ mA} \quad \text{για } 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$\frac{20-0}{2-4} = \frac{i-0}{t-4} \Rightarrow i(t) = -10(t-4) = -10t+40 \text{ mA} \quad \text{για } 2 \leq t \leq 4 \text{ ms}$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \begin{cases} 10 \times 10^{-3} \cdot 10 = 100 \text{ mV} & \text{για } 0 \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ -10 \times 10^{-3} \cdot 10 = -100 \text{ mV} & \text{για } 2 \leq t \leq 4 \text{ ms} \end{cases}$$



Πυκνωτές σε σειρά



Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο έχουμε

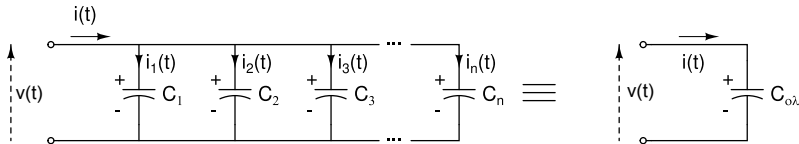
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \int_{t_0}^t i_k(t) dt + v_k(t_0) \right) =$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) = \frac{1}{C_{ολ}} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \right)$$

δηλ. πυκνωτές σε σειρά είναι σαν ωμικές αντιστάσεις παράλληλα.

Πυκνωτές παράλληλα



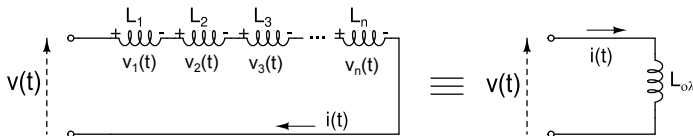
Από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο έχουμε

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(C_k \frac{dv(t)}{dt} \right) \Rightarrow$$

$$C_{ολ} = \sum_{k=1}^n C_k$$

δηλ. πυκνωτές παράλληλα είναι σαν ωμικές αντιστάσεις σε σειρά.

Πηνία σε σειρά

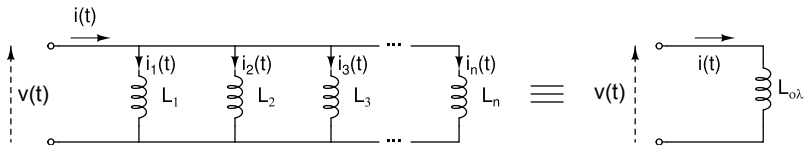


Από τον κανόνα τάσεων του Kirchhoff στο βρόχο έχουμε

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(L_k \frac{di(t)}{dt} \right) \Rightarrow L_{ολ} = \sum_{k=1}^n L_k$$

δηλ. επαγωγές σε σειρά είναι σαν ωμικές αντιστάσεις σε σειρά.

Πηνία παράλληλα



Από τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff στον επάνω κόμβο έχουμε

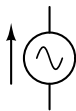
$$\begin{aligned}
 i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v(t) dt + i_k(t_0) \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L_k} \right) \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0) \Rightarrow \\
 \frac{1}{L_{ολ}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L_k} \right)
 \end{aligned}$$

δηλ. επαγωγές παράλληλα είναι σαν ωμικές αντιστάσεις παράλληλα.

Είδη πηγών εναλλασσομένου



(a)



(b)



(c)



(d)

Ανεξάρτητες και εξαρτημένες