

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσομένου σταθερής κατάστασης

Α. Δροσόπουλος

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικό Η/Υ
Σχολή Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

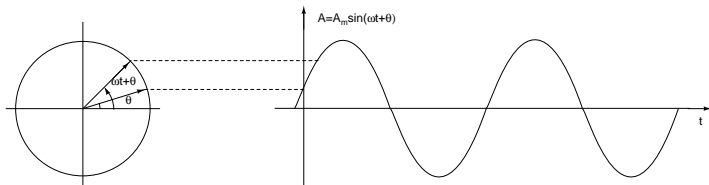
Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

- Σχέση τάσης – ρεύματος για πυκνωτές/πηνία περιλαμβάνει παραγώγους και ολοκληρώματα επομένως η εφαρμογή κανόνων Kirchhoff οδηγεί σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις κυματομορφές τάσης – ρεύματος σε ένα κύκλωμα.
- Όταν οι διεγέρσεις τάσης και ρεύματος σε ένα κύκλωμα που περιέχει γραμμικά στοιχεία (R , L , C) είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, μπορούμε να κάνουμε μετασχηματισμό Fourier ή Laplace και να μετατρέψουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές.

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

Για διεγέρσεις μιας συχνότητας και για ημιτονικές συναρτήσεις παρατηρήστε το διάγραμμα όπου φαίνεται ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα περιστρεφόμενο μιγαδικό διάνυσμα με μια ημιτονική συνάρτηση.

Όλα τα ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις στο κύκλωμα για την παραπάνω περίπτωση περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα άρα, «παγώνοντας» το χρόνο, μπορούμε να περιγράψουμε ημιτονοειδή ρεύματα και τάσεις με μιγαδικά διανύσματα.



Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

Ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση γράφεται

$$y(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad y(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

Θυμηθείτε και τη σχέση του Euler

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

Οπότε

$$Ae^{j(\omega t + \theta)} = A \cos(\omega t + \theta) + jA \sin(\omega t + \theta)$$

$$\Re\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} = A \cos(\omega t + \theta) \quad \text{και} \quad \Im\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} = A \sin(\omega t + \theta)$$

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

- Επομένως, αν παραστήσουμε ένα ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση με τον μιγαδικό αριθμό $Ae^{j\theta}$ μπορούμε να γυρίσουμε στην αρχική μορφή πολ/ζοντας με $e^{j\omega t}$ και παίρνοντας το φανταστικό ή πραγματικό μέρος ανάλογα αν θέλουμε σαν αναφορά το ημίτονο ή το συνημίτονο.
- Επιπλέον, εφόσον το μέγεθος που μετράμε στα ημιτονοειδή ρεύματα είναι η ενεργός τιμή, αντί του πλάτους A στον παραπάνω μιγαδικό αριθμό, χρησιμοποιούμε την ενεργό τιμή A_{rms} .

Φάσορες / Παραστατικοί Μιγάδες

Οπότε, ο φάσορας ή παραστατικός μιγάδας ενός ημιτονοειδούς ρεύματος $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ ή τάσης $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \theta)$ είναι

$$\dot{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = I_{rms} \underline{\angle \theta} \quad \text{ή} \quad \dot{V} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = V_{rms} \underline{\angle \theta}$$

και από τον φάσορα ή παραστατικό μιγάδα πηγαίνουμε στο ημιτονοειδές ρεύμα ή τάση

$$\dot{I} = I_{rms} \underline{\angle \theta} \Rightarrow i(t) = \Im m\{I_{rms} \underline{\angle \theta} \cdot \sqrt{2}e^{j\omega t}\} = I_0 \sin(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το ημίτονο, ή

$$\dot{V} = V_{rms} \underline{\angle \theta} \Rightarrow v(t) = \Re e\{V_{rms} \underline{\angle \theta} \cdot \sqrt{2}e^{j\omega t}\} = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

με αναφορά το συνημίτονο.

Ασκήσεις

Δυο κυματομορφές τάσης δίδονται από τις σχέσεις

$$v_1(t) = 12 \sin(314t + 45^\circ) \text{ V} \quad \text{και} \quad v_2(t) = 6 \sin(314t - 15^\circ) \text{ V}$$

Να βρείτε τη συχνότητα των τάσεων, τη διαφορά φάσης μεταξύ τους και να γράψετε τους φάσορες.

Η συχνότητα f σε Hz είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

Η διαφορά φάσης είναι

$$45^\circ - (-15^\circ) = 60^\circ$$

δηλ. η $v_1(t)$ προηγείται της $v_2(t)$ κατά 60° ή η $v_2(t)$ έπεται της $v_1(t)$ κατά 60° . Οι φάσορες με βάση το ημίτονο είναι

$$\dot{V}_1 = \frac{12}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 8.485 \angle 45^\circ \text{ V} \quad \text{και} \quad \dot{V}_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ = 4.243 \angle -15^\circ \text{ V}$$

Ασκήσεις

Δυο κυματομορφές τάσης δίδονται από τις σχέσεις

$$v_1(t) = 12 \sin(314t + 45^\circ) \text{ V} \quad \text{και} \quad v_2(t) = 6 \sin(314t - 15^\circ) \text{ V}$$

Να βρείτε τη συχνότητα των τάσεων, τη διαφορά φάσης μεταξύ τους και να γράψετε τους φάσορες.

Η συχνότητα f σε Hz είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

Η διαφορά φάσης είναι

$$45^\circ - (-15^\circ) = 60^\circ$$

δηλ. η $v_1(t)$ προηγείται της $v_2(t)$ κατά 60° ή η $v_2(t)$ έπεται της $v_1(t)$ κατά 60° . Οι φάσορες με βάση το ημίτονο είναι

$$\dot{V}_1 = \frac{12}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 8.485 \angle 45^\circ \text{ V} \quad \text{και} \quad \dot{V}_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ = 4.243 \angle -15^\circ \text{ V}$$

Σύνθετη Αντίσταση

Οι αντικαταστάσεις κυματομορφών με φάσορες είναι στην ουσία μετασχηματισμοί Fourier. Και εφόσον στους μετασχηματισμούς Fourier

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \quad \text{και} \quad \int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$$

για το πηνίο

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \dot{V} = j\omega L \dot{I}$$

και για τον πυκνωτή

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \rightarrow \dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

Σύνθετη Αντίσταση

Δηλαδή έχουμε τις σύνθετες αντιστάσεις (ή εμπεδήσεις) για το πηνίο

$$Z_L = jX_L = j\omega L \quad \Omega$$

και για τον πυκνωτή

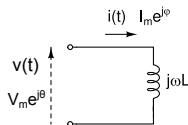
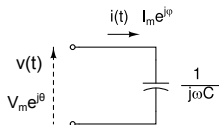
$$Z_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad \Omega$$

Φυσικά για την ωμική αντίσταση δεν αλλάζει τίποτα, $R \rightarrow R$ και η φάση της τάσης / ρεύματος που την διαρρέουν παραμένει ίδια με αυτήν του κλάδου που ευρίσκονται.

Προσοχή. Οι σύνθετες αντιστάσεις ΔΕΝ είναι φάσορες.

Μπορούμε όμως να τις χρησιμοποιούμε σε κυκλώματα όπως ακριβώς και τις ωμικές αντιστάσεις αν αντικαταστήσουμε επίσης και όλες τις διεγέρσεις με παραστατικούς μιγάδες.

Σχέση Τάσης/Ρεύματος



Για τον πυκνωτή

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta-\phi)} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \Rightarrow$$

$$\theta - \phi = -\pi/2 \Rightarrow \phi = \theta + \pi/2$$

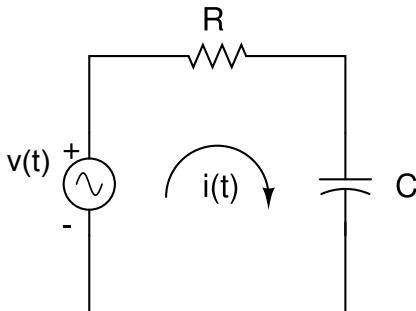
δηλ. το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90° ή η τάση καθυστερεί του ρεύματος κατά 90° , ενώ για το πηνίο

$$\frac{V_m e^{j\theta}}{I_m e^{j\phi}} = j\omega L \Rightarrow \frac{V_m}{I_m} e^{j(\theta-\phi)} = \omega L e^{j\pi/2} \Rightarrow \theta - \phi = \pi/2 \Rightarrow \phi = \theta - \pi/2$$

δηλ. το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά 90° ή η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90° .

Ασκήσεις

Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10 \sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ και $C = 3 \mu\text{F}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Ασκήσεις

$$f = 628/(2\pi) = 100 \text{ Hz και } \dot{V} = (10/\sqrt{2}) \angle 15^\circ = 7.071 \angle 15^\circ \text{ V}$$

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 1000 - \frac{j}{1884 \times 10^{-6}} = 1000 - j530.8 = 1132.14 \angle -27.96^\circ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = 4.571 + j4.256 = 6.246 \angle 42.96^\circ \text{ mA} \Rightarrow$$

$$i(t) = 6.246\sqrt{2} \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ mA} = 8.833 \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ mA}$$

$$\dot{V}_R = \dot{I}R = 4.571 + j4.256 = 6.246 \angle 42.96^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

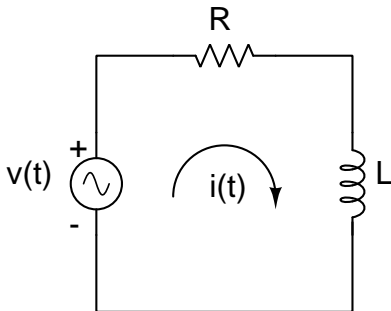
$$v_R(t) = 6.246\sqrt{2} \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ V} = 8.833 \sin(628t + 42.96^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{V}_C = \dot{I} \cdot X_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = 2.259 - j2.426 = 3.315 \angle -47.04^\circ \text{ V} \Rightarrow$$

$$v_C(t) = 3.315\sqrt{2} \sin(628t - 47.04^\circ) \text{ V} = 4.688 \sin(628t - 47.04^\circ) \text{ V}$$

Ασκήσεις

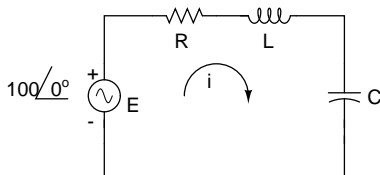
Στο παρακάτω κύκλωμα είναι $v(t) = 10 \sin(628t + 15^\circ)$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ και $L = 15 \text{ mH}$. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση που βλέπει η πηγή καθώς και τις κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.



Ασκήσεις

Στο παρακάτω κύκλωμα έχουμε τιμές στοιχείων $R = 100 \, \Omega$, $C = 1 \, \mu\text{F}$, $L = 15 \, \text{mH}$ και συχνότητα πηγής $f = 1 \, \text{kHz}$. Να βρεθούν

- 1 Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή.
- 2 Οι κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.
- 3 Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων.
- 4 Το κύκλωμα έχει χωρητική ή επαγωγική αντίσταση και γιατί;

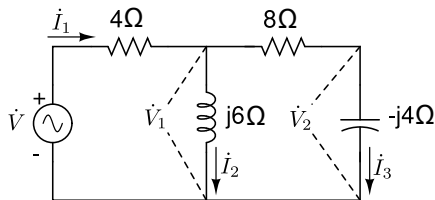


- 1 Η εμπέδηση που βλέπει η πηγή.
- 2 Οι κυματομορφές τάσης και ρεύματος στα στοιχεία του κυκλώματος.
- 3 Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων.



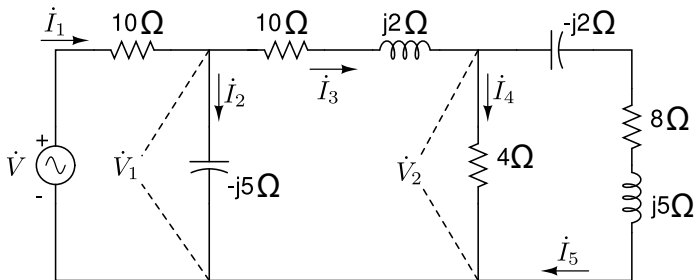
Ασκήσεις

Να υπολογιστούν οι τάσεις \dot{V}_1 , \dot{V}_2 και τα ρεύματα \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{I}_3 στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{V} = 24 \angle 60^\circ \text{ V}$.



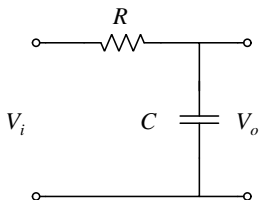
Ασκήσεις

Να υπολογιστεί η τάση της πηγής στο παρακάτω κύκλωμα όταν $\dot{I}_4 = 3 \angle 45^\circ \text{ A}$.

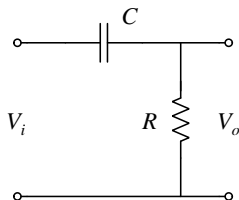


Ασκήσεις

Κατασκευάστε ένα κύκλωμα RC έτσι ώστε η φάση της τάσης εξόδου να προηγείται 90° από τη φάση της τάσης εισόδου.



(a)



(b)

Στο κύκλωμα (a) έχουμε τον διαιρέτη τάσης

$$\dot{V}_o = \frac{Z_C}{Z_C + R} \dot{V}_i \Rightarrow \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

Ασκήσεις

ενώ στο κύκλωμα (b) έχουμε

$$\dot{V}_o = \frac{R}{Z_C + R} \dot{V}_i \Rightarrow \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R}$$

Το ζητούμενο είναι να έχουμε

$$\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = Ke^{j90^\circ}$$

όπου K πραγματικός αριθμός. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις και να βρούμε σχέσεις για τιμές R , C και συχνότητα έτσι ώστε

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = Ke^{j90^\circ} \quad \text{ή} \quad \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = Ke^{j90^\circ}$$

Ασκήσεις

Παρατηρούμε όμως ότι αν $R = |1/(\omega C)|$ για κάποια συχνότητα f , τότε για το (a) έχουμε

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{\frac{1}{j}}{\frac{1}{j} + 1} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

ενώ για το (b)

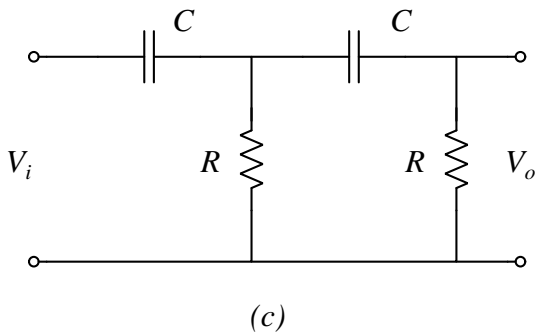
$$\frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{\frac{1}{j} + 1} = \frac{j}{1 + j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

Επομένως, αν πάρουμε δυο διατάξεις (b) σε σειρά, κύκλωμα (c), θα έχουμε τελικά

$$\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = \frac{1}{2} \angle 90^\circ$$

όπως μας ζητείται.

Ασκήσεις



Περί ισχύος

στιγμιαία ισχύς

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Για εναλλασσόμενο ρεύμα ημιτονικής μορφής όπου

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_u) \quad \text{και} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

η στιγμιαία ισχύς γίνεται

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \phi_u) \cos(\omega t + \phi_i) = \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \left[\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \right] \Rightarrow \\ p(t) &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \left[\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \right] \end{aligned}$$

Περί ισχύος

μέση ισχύ

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt =$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \left[\cos(\phi_u - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \right] dt \Rightarrow$$

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_u - \phi_i)$$

συντελεστής ισχύος

ωμικά, χωρητικά και επαγωγικά φορτία

Περί ισχύος

μιαδική ισχύ

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$$

όπου το $*$ δηλώνει συζυγή μιγαδικό. Επομένως

$$\dot{S} = V_{\text{rms}} \angle \phi_u \cdot I_{\text{rms}} \angle -\phi_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \phi_u - \phi_i \Rightarrow$$

$$\Re\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_u - \phi_i) = P \quad \text{και} \quad \Im\{\dot{S}\} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\phi_u - \phi_i) = Q$$

και το πραγματικό μέρος P είναι η μέση ισχύς που ορίσαμε παραπάνω ενώ το φανταστικό Q το ονομάζουμε *άεργο ισχύ*.

Περί ισχύος

Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος το ονομάζουμε *φαινομένη ισχύ* και είναι

$$S = |\dot{S}| = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}^*| = V \cdot I$$

Για λόγους διαχωρισμού, οι μονάδες της μιγαδικής (και φαινομένης) ισχύος είναι VA, της πραγματικής W και της αέργου VAR.