

# Ηλεκτρικά Κυκλώματα Ι

Κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσομένου σταθερής κατάστασης

Α. Δροσόπουλος

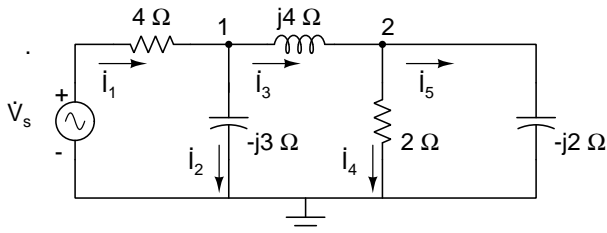
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικό Η/Υ  
Σχολή Μηχανικών  
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

# Ανάλυση κυκλωμάτων στη σταθερή κατάσταση με ημιτονική διέγερση

Κύκλωμα AC με ημιτονική διέγερση σημαίνει κύκλωμα με πηγές που παράγουν ημίτονα ή συνημίτονα τάσης και/ή ρεύματος και που περιέχουν ωμικές, χωρητικές και επαγωγικές αντιστάσεις. Οι κυματομορφές τάσης ή ρεύματος είναι αυτές που θα βλέπαμε σε έναν παλμογράφο. Τα βήματα ανάλυσης είναι τα εξής:

- 1 Μετασχηματισμός των στοιχείων του κυκλώματος από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας (φάσορες/παραστατικοί μιγάδες για τάσεις και ρεύματα και μιγαδικές αντιστάσεις/εμπεδησεις για χωρητικότητες και επαγωγές).
- 2 Λύση του προβλήματος με τις γνωστές μεθόδους ανάλυσης κυκλωμάτων (κανόνες Kirchhoff, κομβική ή κλαδική ανάλυση, μετασχηματισμοί πηγών, υπέρθεση, Thevenin, Norton, κλπ.).
- 3 Μετασχηματισμός των φασόρων τάσης ή ρεύματος που προκύπτουν, στο πεδίο του χρόνου, στις κυματομορφές τάσεις ή ρεύματος που αντιπροσωπεύουν.

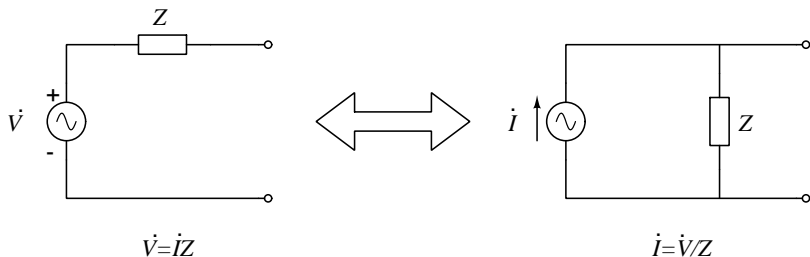
# Γραμμικότητα



Υπολογισμός  $i_4(t)$  στη σταθερή κατάσταση δοθέντος ότι  $v_s(t) = 12 \cos(377t + 30^\circ) \text{ V}$ .

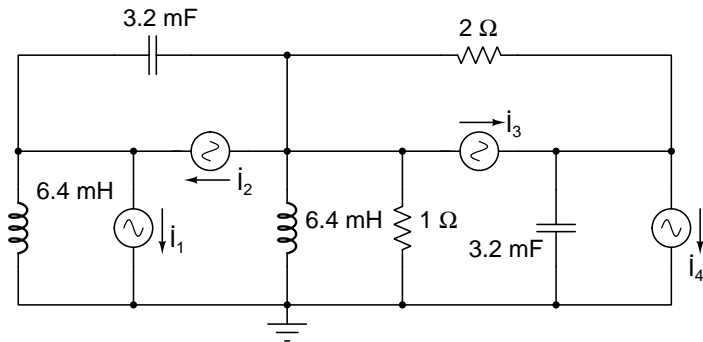
# Μετασχηματισμοί Πηγών

Οι γνωστοί μετασχηματισμοί πηγών ισχύουν και στο χώρο των συχνοτήτων.



$$\dot{V} = Z\dot{I} \quad \text{και} \quad \dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z}$$

# Μέθοδος Κόμβων

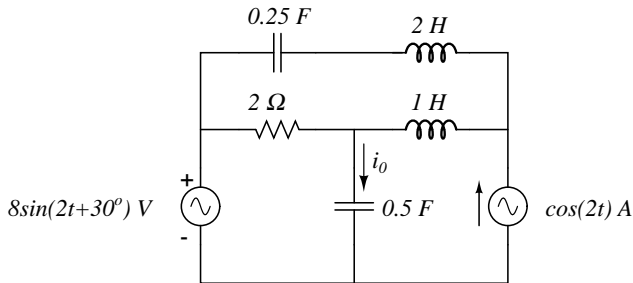


Να βρεθούν οι τάσεις στους κόμβους εάν

$$i_1(t) = 2 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ A}, i_2(t) = 2 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A},$$

$$i_3(t) = 2 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}, i_4(t) = 2 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ A}, f = 50 \text{ Hz}.$$

# Μέθοδος Υπερθέσεως ή Επαλληλίας



Υπολογισμός ρεύματος  $i_0(t)$  με υπέρθεση.

# Υπενθύμιση

$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin(\theta) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta) = \cos(\theta - \pi) \quad -\sin(\theta) = \sin(-\theta)$$

# Θεώρημα Thevenin

Ένα γραμμικό δίκτυωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο δίκτυωμα που περιέχει μία πηγή τάσης σε σειρά με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση,  $Z_{TH}$  είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (για πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (για πηγές ιδανικές) στο δίκτυωμα. Η τάση  $V_{TH}$  είναι η τάση που φαίνεται με το κύκλωμα ενεργό, στους ανοικτούς ακροδέκτες A, B.



# Θεώρημα Norton

Ένα γραμμικό δίκτυωμα με δύο ακροδέκτες A, B μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα ισοδύναμο δίκτυωμα που περιέχει μία πηγή ρεύματος παράλληλα με μία εμπέδηση. Η εμπέδηση,  $Z_N$  είναι η εμπέδηση που φαίνεται από τους ακροδέκτες A, B όταν αντικαταστήσουμε τις πηγές με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (για πηγές πραγματικές) ή βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσης και ανοίξουμε τις πηγές ρεύματος (για πηγές ιδανικές) στο δίκτυωμα. Το ρεύμα  $I_N$  είναι το ρεύμα που παίρνουμε με το κύκλωμα ενεργό, όταν βραχυκυκλώσουμε τούς ακροδέκτες A, B.

# Ανάλυση ισχύος - Επανάληψη ορισμών

στιγμιαία ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t)$$

μέση ή πραγματική ισχύς

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \dots = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

μιγαδική ισχύς

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + jQ$$

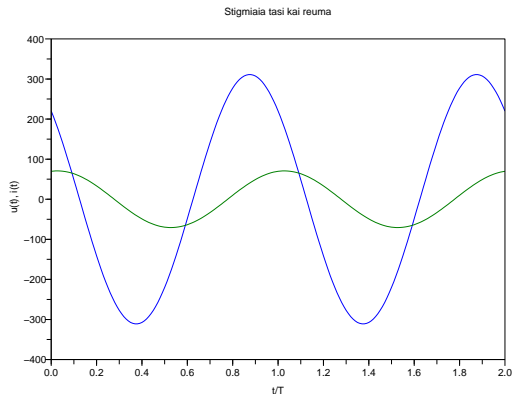
$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\phi_v - \phi_i)$$

φαινομένη ισχύς

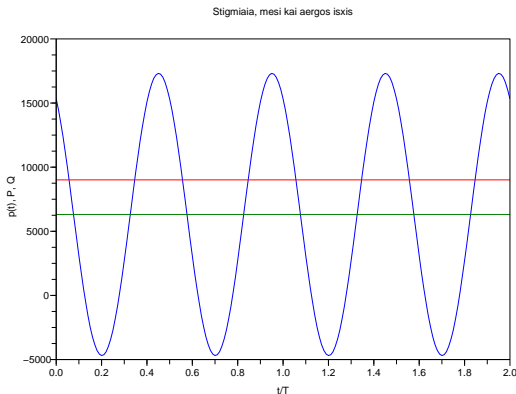
$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$$

# Ανάλυση ισχύος - εικόνες



Η στιγμιαία τάση  $v(t)$  και ρεύμα  $i(t)$  σε διάστημα 2 περιόδων. Η κυματομορφή με το μεγαλύτερο πλάτος είναι η τάση.

# Ανάλυση ισχύος - εικόνες



Η αντίστοιχη στιγμιαία,  $p(t)$ , μέση,  $P = 6.31 \text{ kW}$ , και άεργος,  $Q = 9.01 \text{ kVAR}$ , ισχύς.

# Παράδειγμα

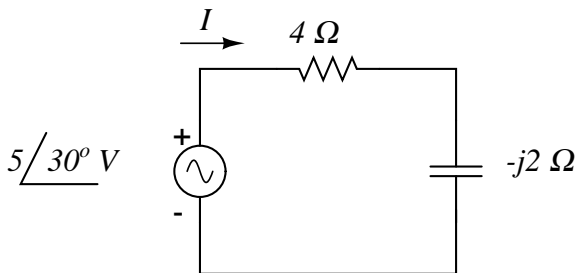
Υπολογίστε τη μέση ισχύ που καταναλώνεται σε μια εμπέδηση  $Z = 30 - j70 \, \Omega$  όταν η τάση που εφαρμόζεται στα άκρα της είναι  $\dot{V} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$ .

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{30 - j70} = \frac{220 \angle 0^\circ}{76.16 \angle -66.8^\circ} = 2.89 \angle 66.8^\circ \text{ A}$$

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\phi_v - \phi_i) = 220 \cdot 2.89 \cos(0 - 66.8^\circ) = 250.35 \text{ W}$$

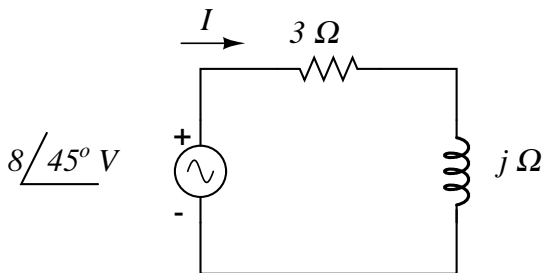
# Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος υπολογίστε την μέση ισχύ που παράγεται από την πηγή, καθώς και την μέση ισχύ που καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση και τον πυκνωτή. Επαναλάβετε το ίδιο και για την μιγαδική ισχύ.



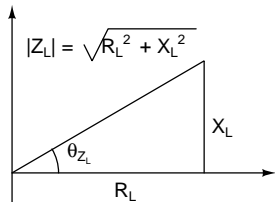
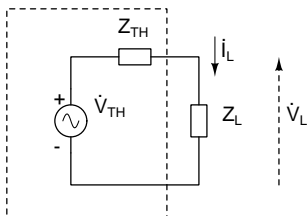
# Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος υπολογίστε την μέση ισχύ που παράγεται από την πηγή, καθώς και την μέση ισχύ που καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση και το πηνίο. Επαναλάβετε το ίδιο και για την μιγαδική ισχύ.



# Μέγιστη μεταφορά μέσης ή πραγματικής ισχύος

Μέγιστη μεταφορά πραγματικής ισχύος  $P$  σε κάποιο φορτίο  $Z_L$  από κάποιο κύκλωμα.



Στο αριστερό τμήμα του σχήματος βλέπουμε το ισοδύναμο κατά Thevenin ενός οποιουδήποτε γραμμικού κυκλώματος ενώ στο δεξιό τμήμα του σχήματος, έχουμε την απεικόνιση στο μιγαδικό επίπεδο του φορτίου  $Z_L$ .



Περίπτωση  $Z_L$  μιγαδικό

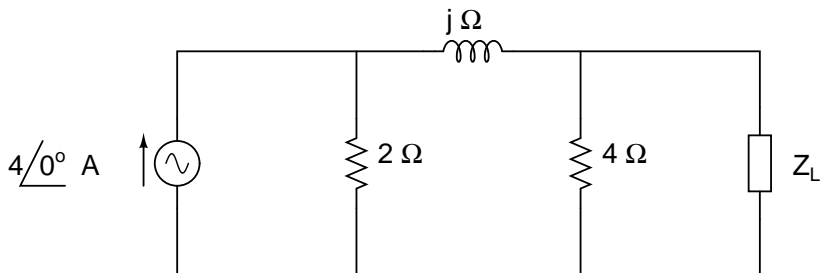
$$Z_L = Z_{TH}^*$$
$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{4\Re\{Z_{TH}\}}$$

Περίπτωση  $Z_L = R_L$  πραγματικό

$$R_L = |Z_{TH}|$$
$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}_{TH}|^2}{2|Z_{TH}| + 2\Re\{R_{TH}\}}$$

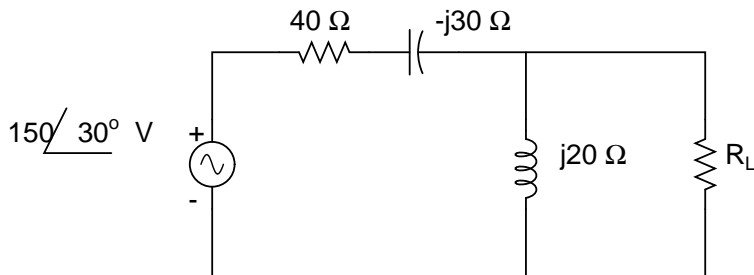
# Παράδειγμα

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί το φορτίο  $Z_L$  για το οποίο έχουμε μέγιστη πραγματική ισχύ από το κύκλωμα καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης πραγματικής ισχύος.



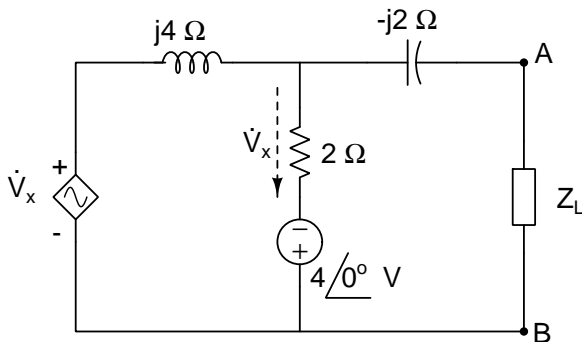
# Παράδειγμα

Να βρεθεί το ωμικό φορτίο  $R_L$  για το οποίο έχουμε μέγιστη κατανάλωση μέσης ισχύος από το κύκλωμα του σχήματος καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης αυτής ισχύος.



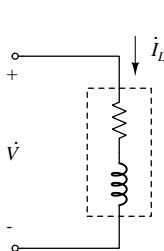
# Παράδειγμα

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθεί το φορτίο  $Z_L$  για το οποίο έχουμε μέγιστη πραγματική ισχύ από το κύκλωμα καθώς επίσης και η τιμή της μέγιστης πραγματικής ισχύος.

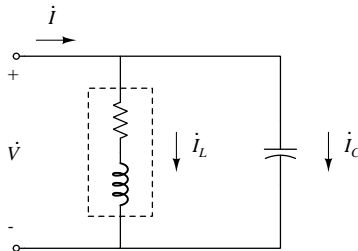


# Ανάλυση ισχύος - Διόρθωση ΣΙ

Λέμε ότι ο ΣΙ προηγείται ή υστερεί **αναφορικά με τη φάση του ρεύματος σε σχέση με τη φάση της τάσεως**. Για χωρητικές αντιστάσεις όπου το ρεύμα προηγείται της τάσης, ο ΣΙ προηγείται, ενώ για επαγωγικές αντιστάσεις όπου το ρεύμα υστερεί της τάσης, ο ΣΙ βρίσκεται σε υστέρηση.



(a)

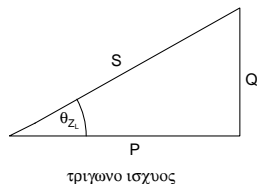
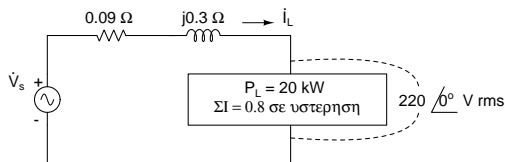


(b)

α) Αρχικό επαγωγικό φορτίο β) Επαγωγικό φορτίο με διόρθωση

# Παράδειγμα

Ένα βιομηχανικό φορτίο λειτουργεί στα 20 kW με συντελεστή ισχύος ( $\text{SI}$ ) 0.8 σε υστέρηση. Η τάση τροφοδοσίας του είναι  $220 \angle 0^\circ$  V rms στα 50 Hz. Η γραμμή μεταφοράς από την γεννήτρια παροχής έχει εμπέδηση  $0.09 + j0.3 \Omega$ . Να προσδιοριστεί η τάση και ο  $\text{SI}$  της γεννήτριας. Υπολογίστε την χωρητικότητα που απαιτείται για διόρθωση του  $\text{SI}$  στο φορτίο στην τιμή 0.98.



# Παράδειγμα

Η φαινομένη ισχύος στο φορτίο (τρίγωνο ισχύος) είναι

$$S_L = \frac{P_L}{\cos \theta} = \frac{P_L}{\Sigma I} = \frac{20000}{0.8} = 25000 \text{ VA}$$

$$\dot{S}_L = S_L \angle \theta = 25000 \angle 36.87^\circ = 20000 + j15000 \text{ VA}$$

$$\dot{S}_L = \dot{V}_L \dot{I}_L^* \Rightarrow \dot{I}_L = \left( \frac{25000 \angle 36.87^\circ}{220 \angle 0^\circ} \right)^* = 113.64 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

$$\dot{S}_{\text{γραμμή}} = I_L^2 Z_{\text{γραμμή}} = 113.64^2 (0.09 + j0.3) = 1162.2 + j3873.9 \text{ VA}$$

Από τη διατήρηση της μιγαδικής ισχύος

$$\begin{aligned} \dot{S}_S &= \dot{S}_{\text{γραμμή}} + \dot{S}_L = 1162.2 + j3873.9 + 20000 + j15000 = \\ &21162 + j18874 = 28356 \angle 41.73^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$



# Παράδειγμα

Η τάση στη γεννήτρια είναι

$$V_S = \frac{S_S}{I_L} = \frac{28356}{113.64} = 249.52 \text{ V}$$

και ο αντίστοιχος  $\Sigma I$  είναι  $\Sigma I = \cos(41.73^\circ) = 0.746$  σε υστέρηση. Για διόρθωση του  $\Sigma I$  στο φορτίο, τοποθετούμε μια συστοιχία πυκνωτών παράλληλα, με συνολική χωρητικότητα  $C$ . Η μιγαδική ισχύς στη συστοιχία είναι

$$\dot{S}_C = 0 + jQ_C = j \frac{V_C^2}{X_C} = j \frac{V_C^2}{1/(\omega C)} = j\omega C V_C^2$$

# Παράδειγμα

Ο καινούργιος ΣΙ είναι 0.98 και αντιστοιχεί σε γωνία  $\theta_N = \cos^{-1}(0.98) = 11.478^\circ$  οπότε η καινούργια άεργος ισχύς για το σύστημα φορτίο / παράλληλος πυκνωτής είναι

$$Q_N = P_L \tan \theta_N = 4061.2 \text{ VAR}$$

και η μείωση (τρίγωνο ισχύος) είναι

$$Q_L - Q_N = Q_C = \omega C V_C^2 \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q_L - Q_N}{\omega V_C^2} = \frac{15000 - 4061.2}{2\pi \cdot 50 \cdot 220^2} = 719.4 \mu\text{F}$$