

Ψηφιακή Λογική Σχεδίαση

<https://eclass.uop.gr/courses/ECE107/>

Πέτρος Βλαχόπουλος, Καθηγητής

petrosv@uop.gr

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου – Σχολή Μηχανικών

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Περιεχόμενο μαθήματος

1. Εισαγωγή: Αναλογικά και ψηφιακά σήματα, μετατροπή σημάτων, ψηφιακά συστήματα
2. Αριθμητικά συστήματα, αριθμητικές πράξεις και δυαδικοί κώδικες
3. Δυαδική Λογική, Λογικές Πύλες, Άλγεβρα Boole
4. Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων - Πίνακες Karnaugh
5. Συνδυαστικά Λογικά Κυκλώματα
6. Εισαγωγή στην ακολουθιακή ψηφιακή λογική - Ακολουθιακά κυκλώματα

Σημειώσεις διαλέξεων θεωρίας

eclass, ενότητα «Έγγραφα»

<https://eclass.uop.gr/modules/document/?course=ECE107>

Κατάλογος: Σημειώσεις και παρουσιάσεις θεωρίας

<https://eclass.uop.gr/modules/document/index.php?course=ECE107&openDir=/5da63b8dJzGX>

01_ Εισαγωγή

Στην καθημερινότητά μας χρησιμοποιούμε ποσοτικά μεγέθη τα οποία μετράμε, καταγράφουμε και αποθηκεύουμε σε κάποιο μέσο, σε έντυπη ή/και ηλεκτρονική μορφή.

Για το λόγο αυτό είναι σημαντική η ύπαρξη της δυνατότητας παράστασής τους με αποδοτικό και ακριβή τρόπο.

Οι βασικοί τρόποι παράστασης ποσοτικών μεγεθών είναι δύο: ο **αναλογικός** και ο **ψηφιακός**.

Στην **αναλογική παράσταση**, ένα μέγεθος λαμβάνει **άπειρες συνεχείς τιμές**.

Τα περισσότερα μεγέθη που μπορούν να μετρηθούν ποσοτικά, όπως θερμοκρασία, πίεση, απόσταση, ταχύτητα, ένταση ηλεκτρικού ρεύματος κ.ά., εμφανίζονται στη φύση με αναλογική μορφή.

Για παράδειγμα, η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου, στη διάρκεια ενός ταξιδιού, λαμβάνει συνεχείς τιμές, αφού δεν μπορεί να μεταβληθεί στιγμιαία από τα 50 στα 70 χιλιόμετρα ανά ώρα, χωρίς να λάβει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Στην ψηφιακή παράσταση, ένα μέγεθος λαμβάνει **διακριτές τιμές ή διακριτά στοιχεία πληροφοριών.**

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οποιοδήποτε σύνολο έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, περιέχει **διακριτή** πληροφορία.

Για παράδειγμα,

- τα 10 δεκαδικά ψηφία,
- τα 24 γράμματα της αλφαβήτου,
- τα 52 φύλλα της τράπουλας, και
- τα 64 τετράγωνα της σκακιέρας,

είναι τέτοια σύνολα διακριτής πληροφορίας.

Οι πρώτοι ψηφιακοί υπολογιστές χρησιμοποιήθηκαν για αριθμητικούς υπολογισμούς.

Σε αυτή την περίπτωση, τα διακριτά στοιχεία πληροφορίας ήταν τα ψηφία των αριθμών και έτσι προέκυψε και ο όρος **ψηφιακός υπολογιστής**.

Τα διακριτά στοιχεία πληροφορίας παριστάνονται σε ένα ψηφιακό σύστημα με τιμές φυσικών μεγεθών, τα οποία ονομάζονται **σήματα**.

Τα πιο κοινά σήματα είναι τα **ηλεκτρικά**, όπως η **τάση** και το **ρεύμα**.

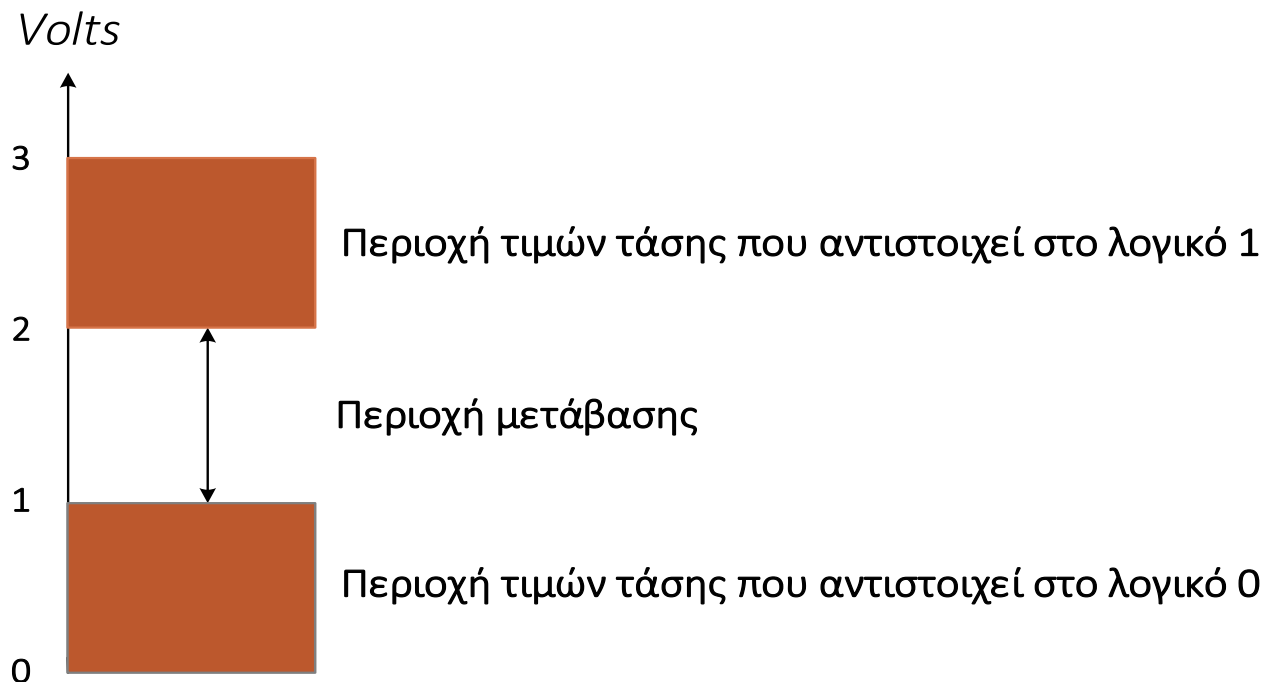
Στην πλειονότητα των σύγχρονων ηλεκτρονικών ψηφιακών συστημάτων χρησιμοποιούνται **δύο διακριτές τιμές ηλεκτρικών μεγεθών** για την παράσταση των σχετικών σημάτων (συνήθως η ηλεκτρική τάση), τα οποία για τον λόγο αυτό ονομάζονται **δυναδικά σήματα**.

Ένα δυναδικό ψηφίο, το οποίο ονομάζεται **bit** (**binary digit**), έχει δύο δυνατές διακριτές τιμές: **0** και **1**.

Τα ψηφιακά κυκλώματα που λειτουργούν με τάση ανταποκρίνονται σε δύο ξεχωριστά επίπεδα τάσης, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί στην τιμή μιας δυναδικής μεταβλητής, το “**λογικό**” **0** ή το “**λογικό**” **1**.

Για παράδειγμα, σε ένα συγκεκριμένο ψηφιακό σύστημα μπορεί να οριστεί ότι το λογικό 0 αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρικό σήμα ίσο με 0 Volt και ότι το λογικό 1 αντιστοιχεί σε ένα ηλεκτρικό σήμα ίσο με 3 Volt.

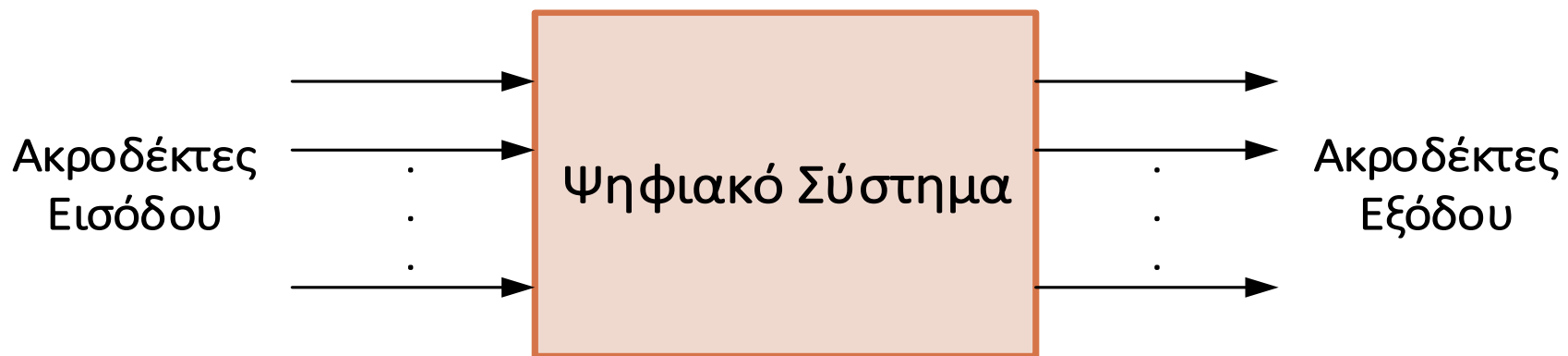
Στην πράξη, αντί για τιμές τάσης, χρησιμοποιούμε περιοχές επιτρεπτών τιμών τάσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1 Περιοχές τάσης δυαδικού σήματος

Στο Σχήμα 1.2 παρουσιάζεται σχηματικά, σε επίπεδο “χονδρικού διαγράμματος” (block diagram) ένα ψηφιακό σύστημα. Το ψηφιακό σύστημα περιλαμβάνει ακροδέκτες εισόδου και εξόδου, ενώ το εσωτερικό του αποτελείται από ηλεκτρονικά κυκλώματα κατάλληλα διασυνδεδεμένα για να επιτελούν συγκεκριμένη λειτουργία.

Τα ηλεκτρονικά αυτά κυκλώματα αποτελούνται από “λογικές πύλες” (logic gates), οι οποίες υλοποιούνται με βασικά ηλεκτρονικά δομικά στοιχεία, όπως τρανζίστορ, αντιστάσεις, κλπ.



Σχήμα 1.2 Χονδρικό διάγραμμα ψηφιακού συστήματος

Όταν τα ψηφιακά κυκλώματα δέχονται στους ακροδέκτες εισόδου τους τιμές τάσεων, οι οποίες είναι μέσα στις επιτρεπτές περιοχές τιμών και αντιστοιχούν στα συγκεκριμένα δυαδικά σήματα εισόδου, παράγουν στους ακροδέκτες εξόδου τους τιμές τάσεων που, επίσης, είναι μέσα στις επιτρεπτές περιοχές τιμών και αντιστοιχούν στα συγκεκριμένα δυαδικά σήματα εξόδου.

Ένας ακροδέκτης εισόδου ή εξόδου επιτρέπεται να πάρει τιμή που βρίσκεται στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ των επιτρεπτών περιοχών τιμών τάσης μόνο κατά τη διάρκεια της μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη.

Μπορούμε να επεξεργαστούμε οποιαδήποτε δυαδική πληροφορία με τη χρήση ψηφιακών διατάξεων, είτε για να εκτελέσουμε υπολογισμούς, είτε για να ελέγξουμε άλλες συσκευές. Στην περίπτωση αυτή, κάθε φυσικό σήμα παριστάνει μια συγκεκριμένη δυαδική μεταβλητή.

Οποιαδήποτε διακριτά στοιχεία πληροφορίας παριστάνονται με ομάδες από bits, που ονομάζονται **δυναμικοί κώδικες**.

Για παράδειγμα, τα ψηφία του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος από το 0 έως το 9 παριστάνονται σε ένα ψηφιακό σύστημα με έναν κώδικα τεσσάρων bits:

0	⇒	0 0 0 0
1	⇒	<u>0 0 0 1</u>
2	⇒	0 0 1 0
3	⇒	<u>0 0 1 1</u>
4	⇒	0 1 0 0
5	⇒	<u>0 1 0 1</u>
6	⇒	0 1 1 0
7	⇒	<u>0 1 1 1</u>
8	⇒	1 0 0 0
9	⇒	1 0 0 1

Με διάφορες τεχνικές, ομάδες από bits μπορούν να παραστήσουν ποικίλα διακριτά σύμβολα, τα οποία κατόπιν χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη ενός συστήματος σε ψηφιακή μορφή.

Επομένως, ένα **ψηφιακό σύστημα** είναι ένα σύστημα που **χρησιμοποιεί διακριτά στοιχεία πληροφοριών**, τα οποία **παριστάνονται εσωτερικά σε δυαδική μορφή.**

Οι διακριτές τιμές πληροφορίας προκύπτουν είτε από την φύση των προς επεξεργασία δεδομένων, είτε από την **ψηφιοποίηση** ενός συνεχούς (αναλογικού) σήματος.

Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να αναφέρουμε ως παράδειγμα τη διαδικασία μισθοδοσίας, που από τη φύση της είναι μια διεργασία κατά την οποία γίνεται επεξεργασία διακριτών στοιχείων πληροφοριών, όπως ονόματα υπαλλήλων, αριθμοί μητρώου κοινωνικής ασφάλισης, μισθοί, κρατήσεις κλπ.

Η επεξεργασία της επιταγής πληρωμής ενός υπαλλήλου γίνεται μέσω διακριτών τιμών δεδομένων, όπως είναι τα γράμματα της αλφαβήτου (ονόματα), τα ψηφία (μισθός), και ειδικά σύμβολα (όπως το €).

Στη δεύτερη περίπτωση μπορούμε να αναφέρουμε ως παράδειγμα την εργαστηριακή διαδικασία όπου παρατηρούμε ένα αναλογικό σήμα (π.χ. την μεταβολή της θερμοκρασίας σε κάποιο μέσο), αλλά μετράμε, ανά τακτά χρονικά διαστήματα, συγκεκριμένες τιμές φυσικών ποσοτήτων και τις καταγράφουμε σε μορφή πίνακα.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι **ψηφιοποιούμε συνεχή δεδομένα**, με σκοπό την παραγωγή ενός πίνακα με διακριτές αριθμητικές ποσότητες, ο οποίος περιγράφει ικανοποιητικά τη φυσική διεργασία.

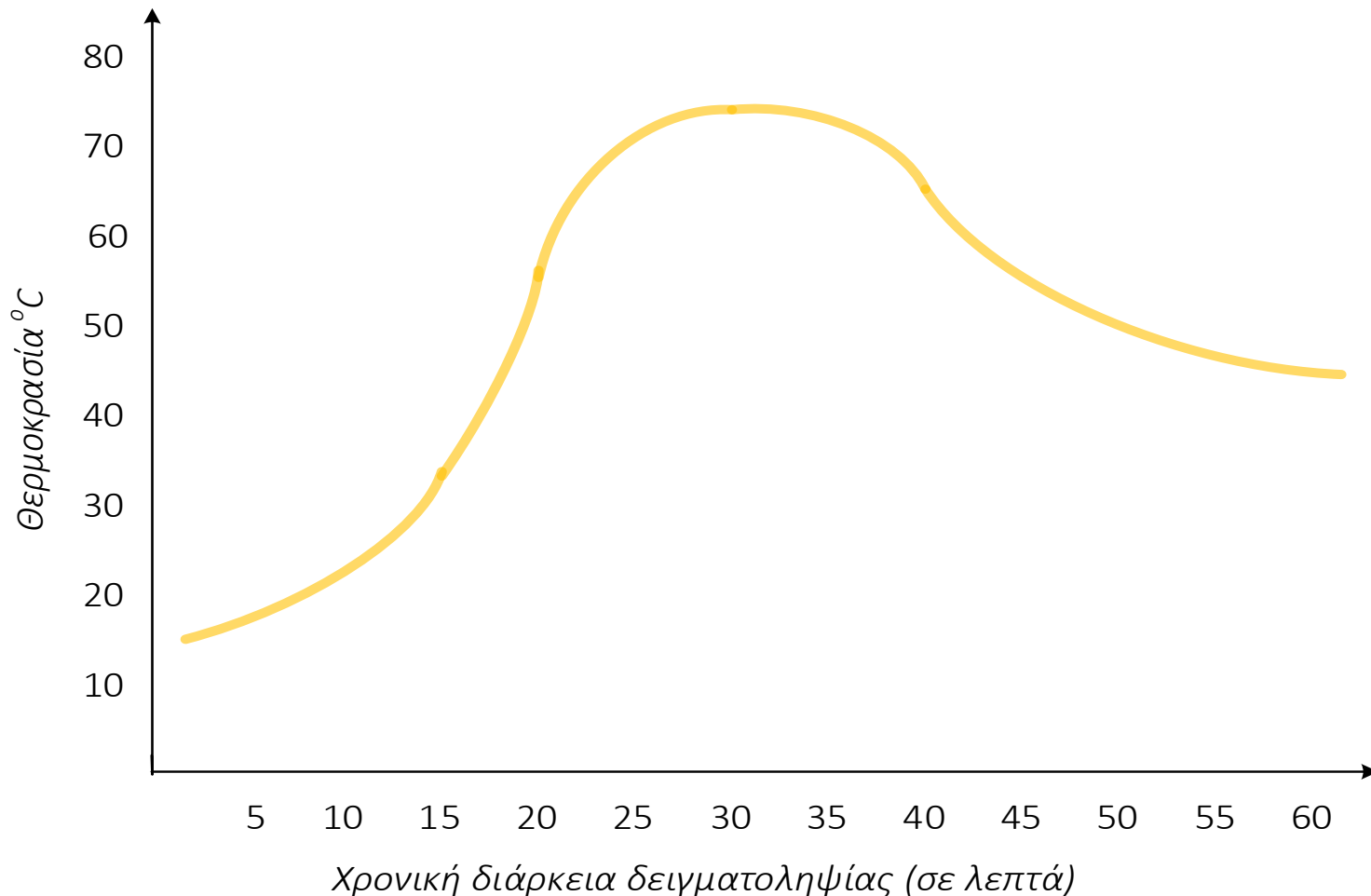
Σε πολλές περιπτώσεις, η ψηφιοποίηση αναλογικών σημάτων μπορεί να γίνει αυτόματα με τη χρήση διατάξεων που ονομάζονται μετατροπείς αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά (Analog to Digital converters, A/D converters).

Ας δούμε ένα παράδειγμα ψηφιοποίησης ενός αναλογικού σήματος, μελετώντας τη διακύμανση της θερμοκρασίας σε ένα μέσο στη διάρκεια μιας ώρας.

Η θερμοκρασία λαμβάνει συνεχείς τιμές, αφού δεν μπορεί να μεταβληθεί στιγμιαία, για παράδειγμα από τους 10 στους 20 βαθμούς, χωρίς να λάβει όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

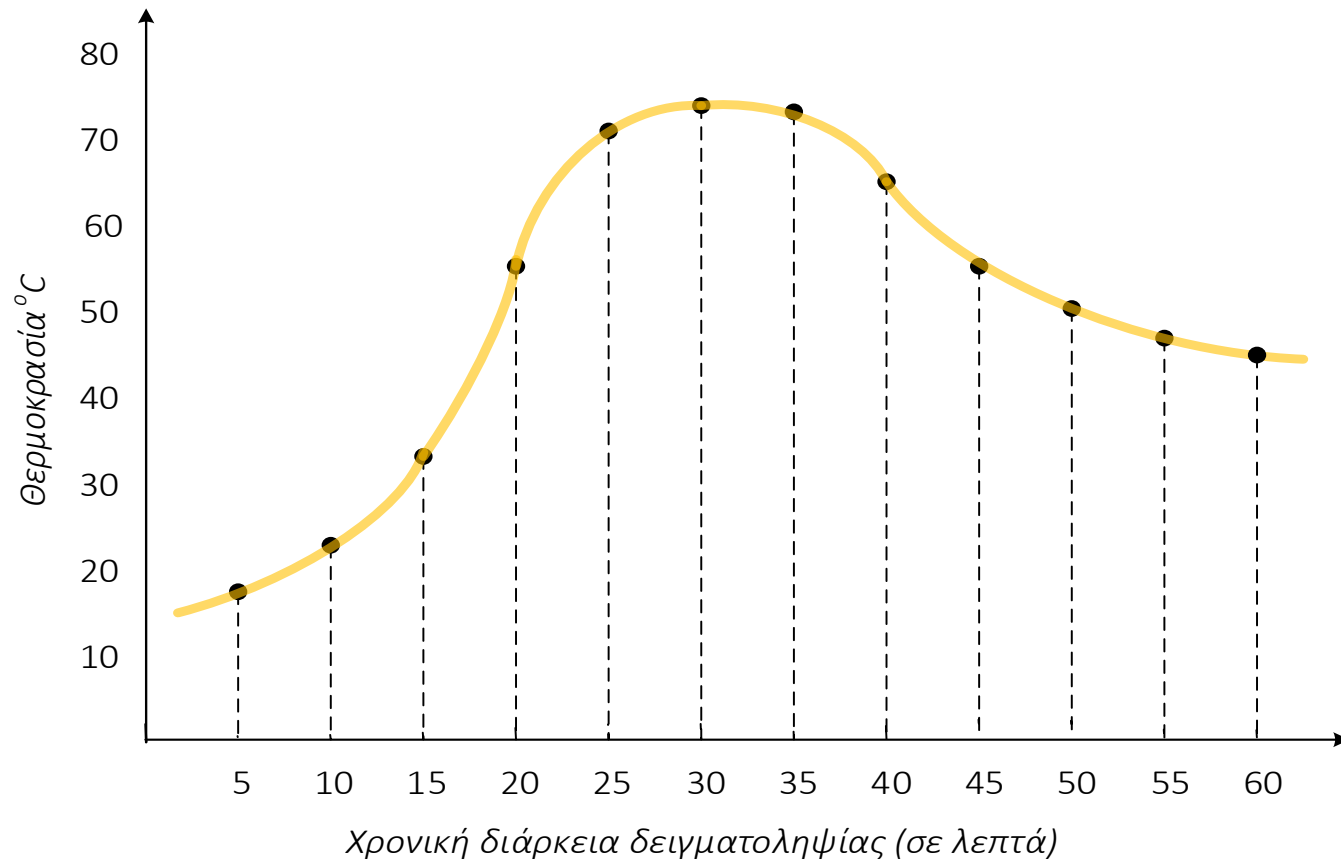
Η γραφική παράσταση που προκύπτει είναι μία συνεχής καμπύλη γραμμή και αποτελεί την **αναλογική παράσταση** του ποσοτικού μεγέθους της θερμοκρασίας.

Στο Σχήμα 1.3, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της διακύμανσης της θερμοκρασίας.



Σχήμα 1.3 Αναλογική παράσταση θερμοκρασίας

Υποθέστε στη συνέχεια ότι μετράμε την τιμή της θερμοκρασίας ανά πεντάλεπτο. Αυτό έχει αποτέλεσμα τη λήψη δώδεκα διακριτών δειγμάτων που παριστάνουν την τιμή της θερμοκρασίας σε διακριτές χρονικές στιγμές, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.4.



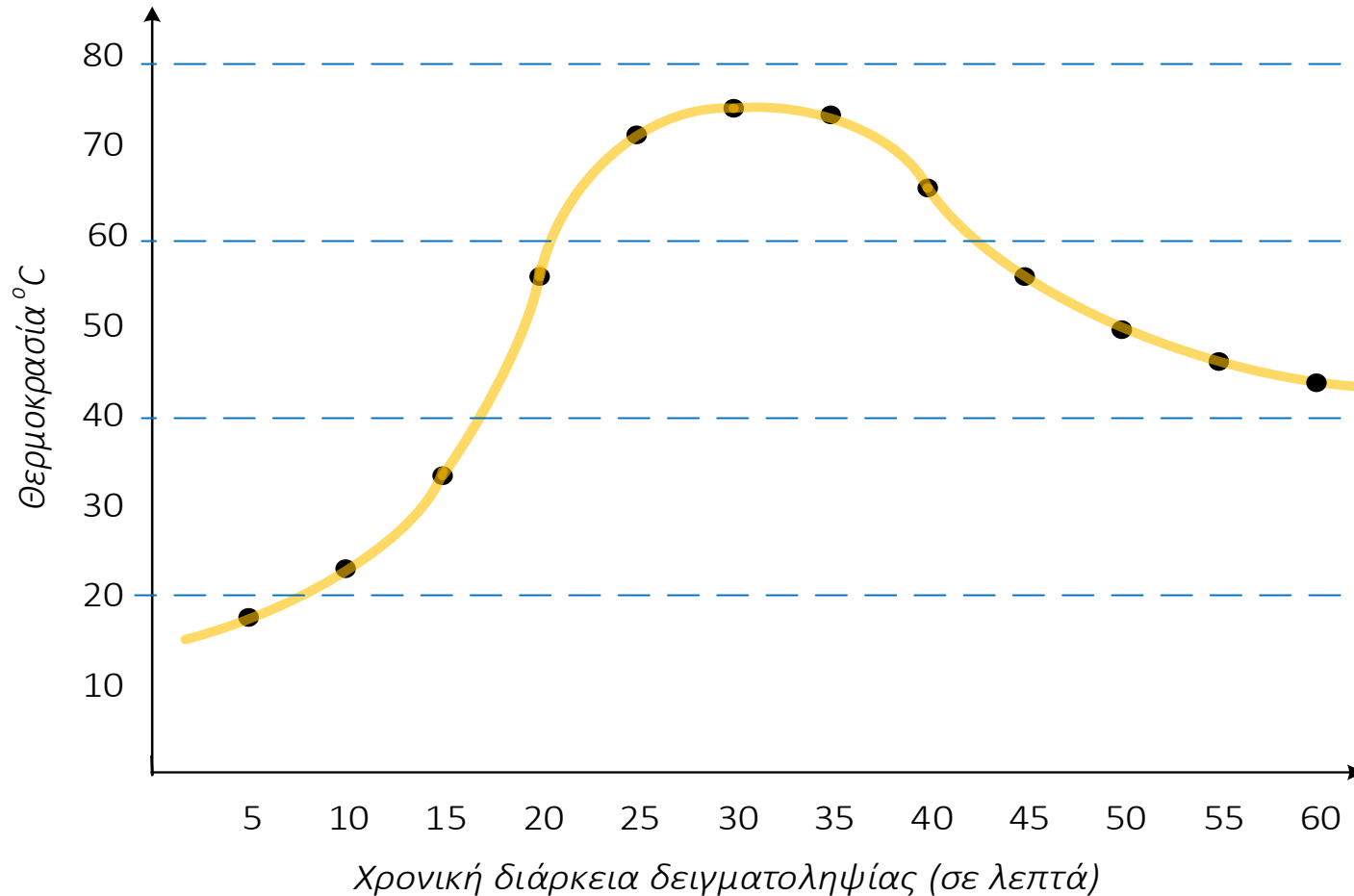
Σχήμα 1.4 Δειγματοληψία θερμοκρασίας

Η διαδικασία με την οποία παράγουμε ένα διακριτό από ένα συνεχές σήμα ονομάζεται **δειγματοληψία** (sampling) και προκύπτει από την καταγραφή των τιμών του συνεχούς σήματος σε μια σειρά από διακριτά και ισαπέχοντα σημεία στο χρόνο (ομοιόμορφη δειγματοληψία).

Η δειγματοληψία δημιουργεί διακριτοποίηση του σήματος στο χρόνο. Οι τιμές των δειγμάτων (πλάτος σήματος) όμως μπορούν να είναι οποιεσδήποτε.

Για να αναπαραστήσουμε τις τιμές αυτές στον υπολογιστή χρειαζόμαστε και διακριτοποίηση των τιμών πλάτους (προσέγγιση των πραγματικών τιμών με κάποιες προκαθορισμένες).

Στο Σχήμα 1.5 ορίζονται τέσσερα επίπεδα με τιμές πλάτους 20°C, συγκεκριμένα 0-20, 20-40, 40-60 και 60-80 °C αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο το κάθε δείγμα (μέτρηση στιγμιαίας θερμοκρασίας) εντάσσεται σε κάποιο από τα τέσσερα επίπεδα.

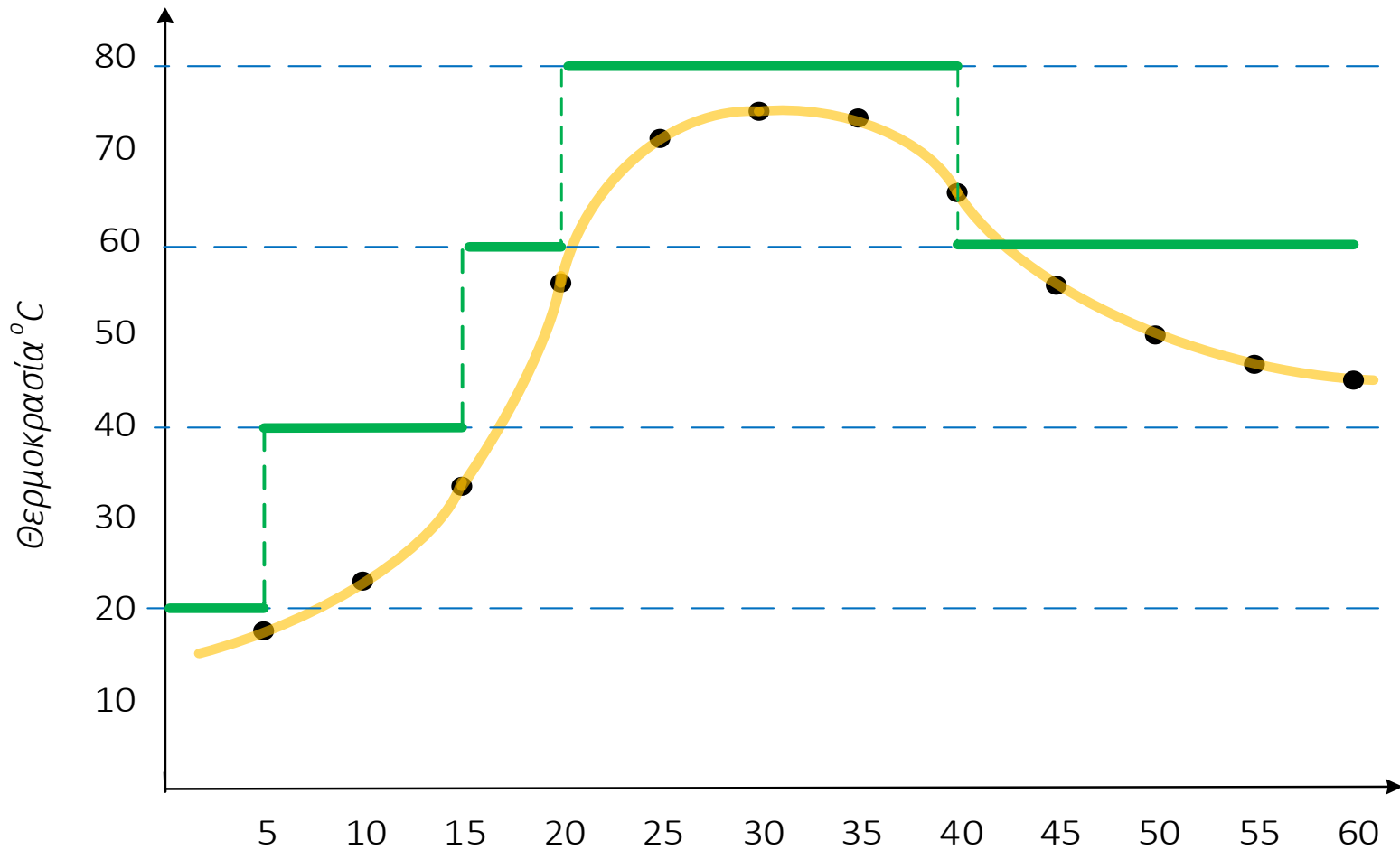


Σχήμα 1.5

Η διακριτοποίηση των τιμών πλάτους του σήματος (δειγμάτων), δηλαδή, η διαδικασία αντιστοίχισης των συνεχών δειγμάτων σε πεπερασμένο πλήθος εύρους τιμών, ονομάζεται **κβαντισμός**.

Κατά τη διαδικασία του κβαντισμού, επομένως, σε κάθε δείγμα πρέπει να εκχωρηθεί μία τιμή από αυτές που διαθέτει και επιτρέπει η χρησιμοποιούμενη κλίμακα.

Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζονται τα τέσσερα επίπεδα κβαντισμού της θερμοκρασίας και τα δείγματα που εντάσσονται σε κάθε ένα επίπεδο για το παράδειγμά μας.

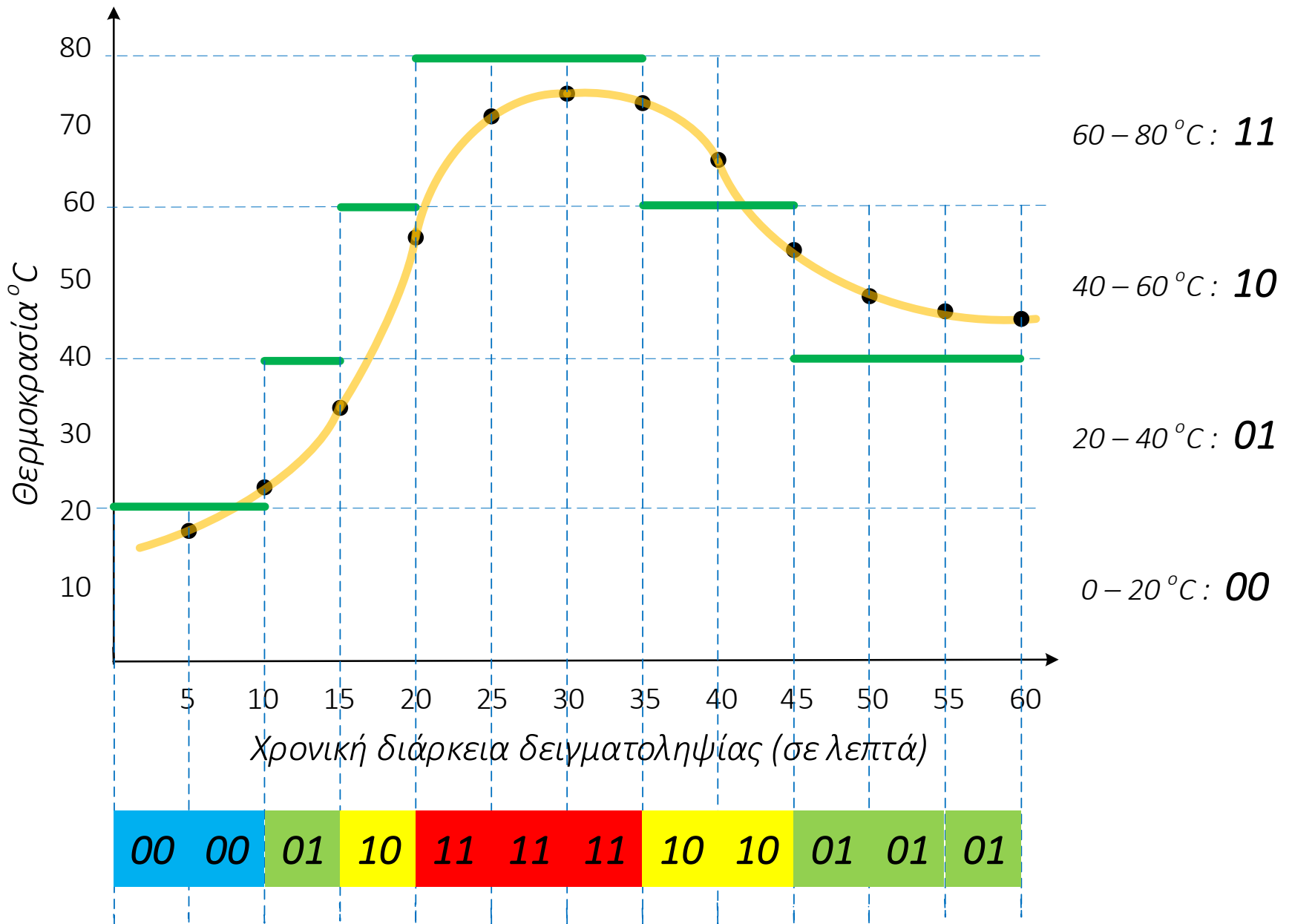


Σχήμα 1.6 Κβαντισμός της θερμοκρασίας

Τα αναλογικά σήματα έχουν συνεχείς τιμές και χρειάζεται άπειρος αριθμός bits για την παράσταση τους.

Το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού M συνδέεται με το πλήθος N των bits που αφιερώνεται για την **κωδικοποίηση** (περιγραφή) τους με τη σχέση: $M=2^N$.

Στο παράδειγμά μας έχουμε τέσσερα επίπεδα κβαντισμού της θερμοκρασίας ($M = 4 = 2^2$), επομένως χρειαζόμαστε δύο bits ($N=2$), για να τα κωδικοποιήσουμε όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7 Ψηφιακή παράσταση της θερμοκρασίας

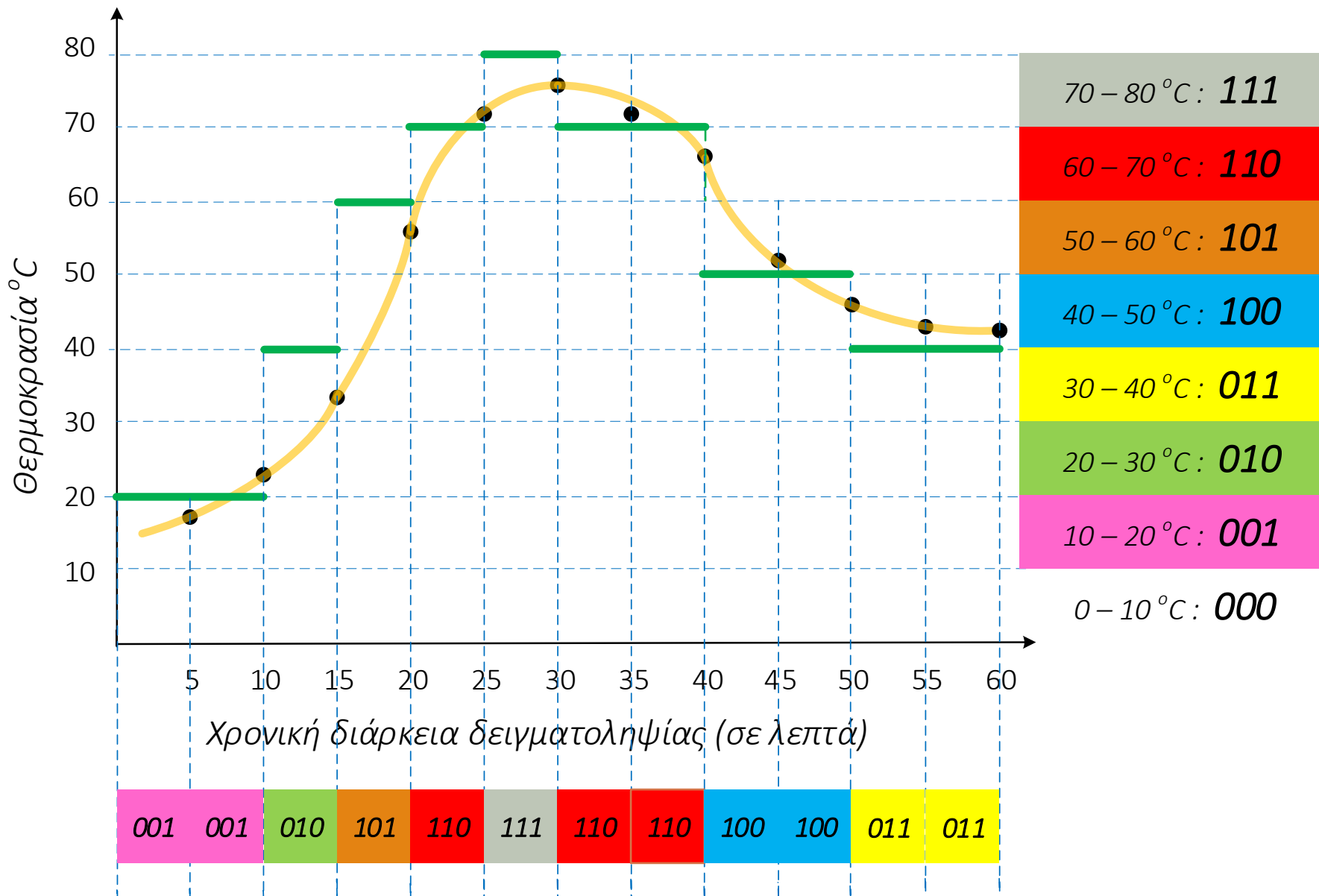
Εάν αναπαραστήσουμε την τιμή κάθε δείγματος της θερμοκρασίας με έναν αριθμό πεπερασμένου πλήθους ψηφίων, τότε επιτελούμε τη διαδικασία που αναφέρεται ως **ψηφιοποίηση** (digitization), αποτέλεσμα της οποίας είναι η **ψηφιακή παράσταση** της θερμοκρασίας, δηλαδή μια απλή ακολουθία αριθμών που αναπαριστά το μέγεθος των διαδοχικών δειγμάτων.

Από το Σχήμα 1.7 βλέπουμε ότι το ψηφιακό σήμα που προέκυψε δεν αποτελεί αρκετά καλή προσέγγιση του αναλογικού σήματος (“**σφάλμα κβαντισμού**”).

Όσο μεγαλύτερο το πλήθος των επιπέδων κβαντισμού που χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερη προσέγγιση θα έχει το ψηφιακό προς το αναλογικό σήμα.

Στο παράδειγμά μας, μπορούμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση εάν ορίσουμε οκτώ επίπεδα κβαντισμού με τιμή πλάτους 10°C , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.8.

Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται $N=3$ bits ($8=2^3$) για να τα κωδικοποιήσουμε.



Σχήμα 1.8 Ψηφιακή παράσταση της θερμοκρασίας (N=3)

Ερωτήσεις αξιολόγησης

Ποια από τα παρακάτω μεγέθη είναι αναλογικά και ποια ψηφιακά;

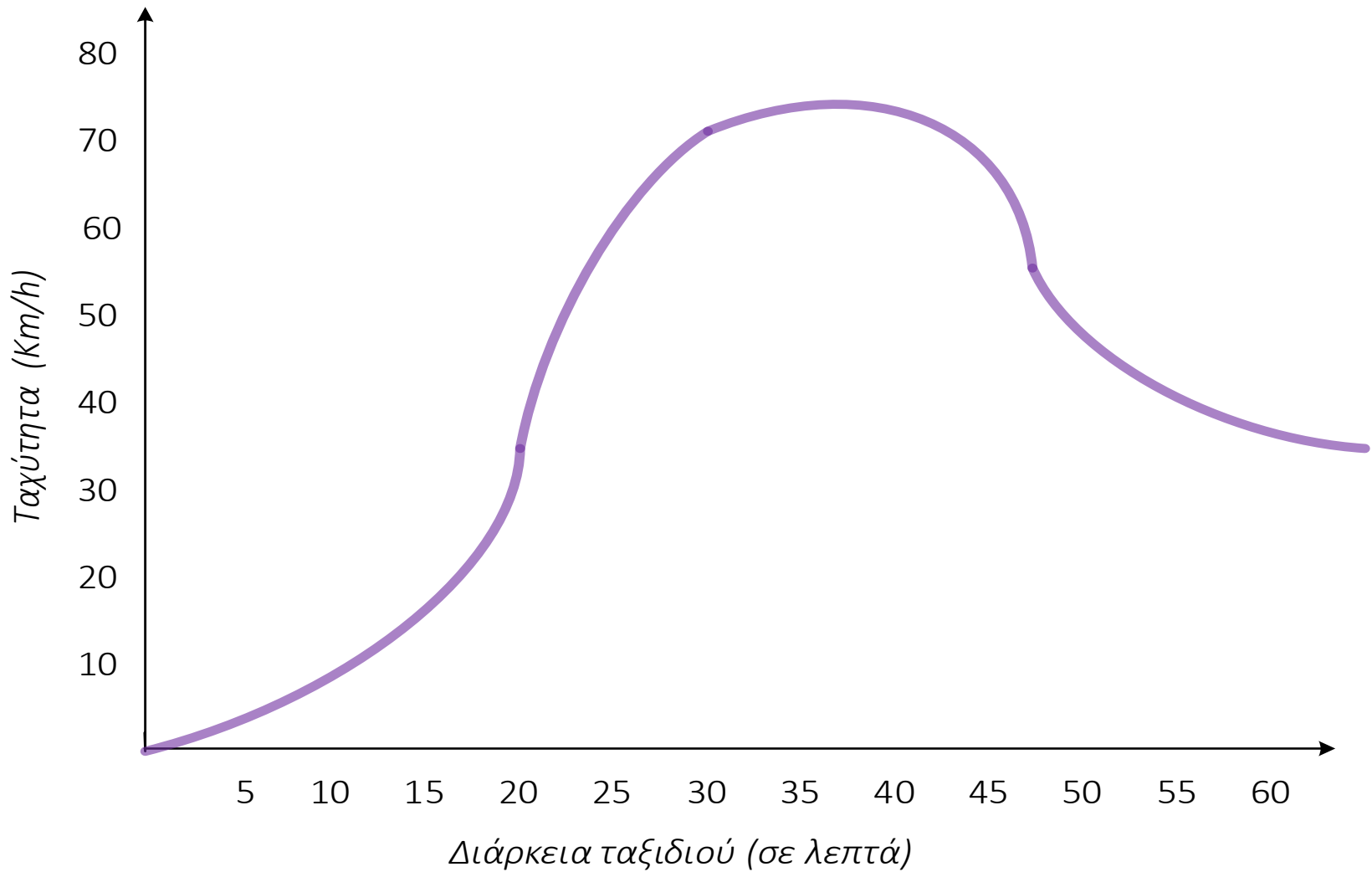
- a) Επιλογές του διακόπτη που ελέγχει το «μάτι» ηλεκτρικής κουζίνας
- b) Ρεύμα που διαρρέει ηλεκτρικό κύκλωμα
- c) Θερμοκρασία εσωτερικού χώρου
- d) Φοιτητές στην αίθουσα
- e) Ροή νερού σε σωλήνα ύδρευσης
- f) Ηλικιακή κατανομή πληθυσμού Ελλάδας

Άσκηση

Στο Σχήμα 1.9 παρουσιάζεται η διακύμανση της ταχύτητας με την οποία κινείται ένα αυτοκίνητο, σε διάρκεια μιας ώρας.

Μετατρέψτε την παράσταση του μεγέθους της ταχύτητας σε ψηφιακή μορφή, λαμβάνοντας δείγματα ανά πέντε λεπτά της ώρας και επιλέγοντας επίπεδα κβαντισμού τόσα, ώστε να επιτευχθεί κωδικοποίηση με τρία δυαδικά ψηφία.

Προτείνετε μία λύση για τη μείωση του σφάλματος κβαντισμού.



Σχήμα 1.9 Αναλογική παράσταση ταχύτητας

Πηγές

Για τη δημιουργία των σημειώσεων των διαλέξεων του μαθήματος έχει χρησιμοποιηθεί υλικό από την παρακάτω βιβλιογραφία:

- Morris Mano, M. & Ciletti, M.D. (2013). Ψηφιακή Σχεδίαση (5η έκδοση). Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Nelson, V.P., Troy Nagle, H., David Irwin, J. & Carrol, B.D. (2007). Ανάλυση και Σχεδίαση Κυκλωμάτων Ψηφιακής Λογικής. Εκδόσεις Επίκεντρο.
- Ρουμελιώτης, Μ. & Σουραβλάς, Στ. (2013). Ψηφιακή Σχεδίαση: Αρχές & Εφαρμογές. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Wakerly, J.F. (2005). Ψηφιακή Σχεδίαση: Αρχές & Πρακτικές (3η έκδοση). Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- Brown, S., Vranesic, Z. (2001). Σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων με τη Γλώσσα VHDL. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Μπισδούνης, Λ. (2015). Βασικές Εξειδικεύσεις σε Αρχιτεκτονική και Δίκτυα Υπολογιστών – Τόμος Α'. Εκδόσεις Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.