04_Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων

Γνωρίζουμε ότι, **μια λογική συνάρτηση** μπορεί να περιγραφεί με **έναν και μοναδικό πίνακα αλήθειας**, ενώ μπορεί να έχει **πολλές διαφορετικές**, αλλά ισοδύναμες, **αλγεβρικές εκφράσεις**.

Συνεπώς, μπορούμε να συνθέσουμε **πολλά διαφορετικά λογικά κυκλώματα που υλοποιούν την ίδια λογική συνάρτηση**, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει διαφορετικούς τύπους πυλών και διαφορετικές διασυνδέσεις μεταξύ τους.

Η **πολυπλοκότητα των λογικών κυκλωμάτων** που υλοποιούν μια λογική συνάρτηση σχετίζεται άμεσα με την **πολυπλοκότητα της αλγεβρικής έκφρασης** της συνάρτησης αυτής.

Κάποια από τα λογικά κυκλώματα που υλοποιούν μια συνάρτηση είναι απλούστερα από άλλα και στόχος κατά τη σχεδίαση είναι η μείωση του κόστους υλοποίησης.

Το κόστος υλοποίησης συνδέεται, προφανώς, με το πλήθος των λογικών πυλών που χρησιμοποιούνται.

Επομένως, στο ερώτημα **"ποια από το σύνολο των υλοποιήσεων είναι η προτιμότερη κατά τη λογική σχεδίαση ενός ψηφιακού συστήματος;"**, η προφανής απάντηση είναι "**η απλούστερη**", δηλαδή, αυτή που απαιτεί το **μικρότερο πλήθος λογικών πυλών**.

Κάθε υλοποίηση περιγράφεται με μια αλγεβρική έκφραση της λογικής συνάρτησης.

Επομένως, **η επιλογή της απλούστερης υλοποίησης αντιστοιχεί στην επιλογή της απλούστερης αλγεβρικής έκφρασης** που μπορούμε να έχουμε για τη λογική συνάρτηση.

Για το λόγο αυτό, κατά τη διαδικασία της σχεδίασης, επιδιώκουμε με διάφορες μεθόδους **να προσδιορίσουμε την απλούστερη δυνατή μορφή της λογικής συνάρτησης.**

Η απλοποίηση με τη χρήση αλγεβρικών μετασχηματισμών δεν οδηγεί πάντοτε με βεβαιότητα στην απλούστερη δυνατή (ελαχιστοποιημένη) ισοδύναμη αλγεβρική έκφραση, επειδή οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί δεν μπορούν να συστήσουν συγκεκριμένη μεθοδολογία απλοποίησης.

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η **μέθοδος του χάρτη (ή πίνακα) Karnaugh**, η οποία παρέχει μια απλή και εύκολη διαδικασία ελαχιστοποίησης (: απλοποίησης) των λογικών συναρτήσεων.

Η μέθοδος αυτή μας **δίνει τη <u>βέλτιστη απλοποίηση</u>** μιας λογικής συνάρτησης **σε επίπεδο <u>βασικών λογικών πράξεων μόνο</u> (AND, OR και NOT),** που αντιστοιχεί σε υλοποίηση λογικού κυκλώματος με τις αντίστοιχες βασικές πύλες μόνο.

Περαιτέρω ελαχιστοποίηση της λογικής συνάρτησης μπορεί να επιτευχθεί με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, με τη χρήση παράγωγων λογικών πράξεων (XOR, NAND, NOR και XNOR).

Αυτό αντιστοιχεί σε υλοποίηση με όλους των τύπους λογικών πυλών και είναι πιθανό να οδηγεί σε ακόμα μικρότερο πλήθος απαιτούμενων πυλών και, ως εκ τούτου, σε χαμηλότερο κόστος υλοποίησης.

Ο χάρτης (πίνακας) Karnaugh

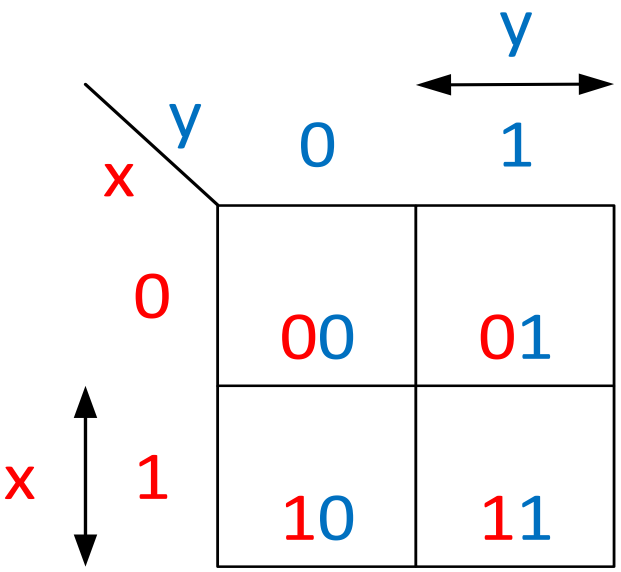
Ο πίνακας Karnaugh μιας λογικής συνάρτησης αποτελεί απεικόνιση του πίνακα αλήθειας της συνάρτησης και είναι ισοδύναμος με αυτόν:

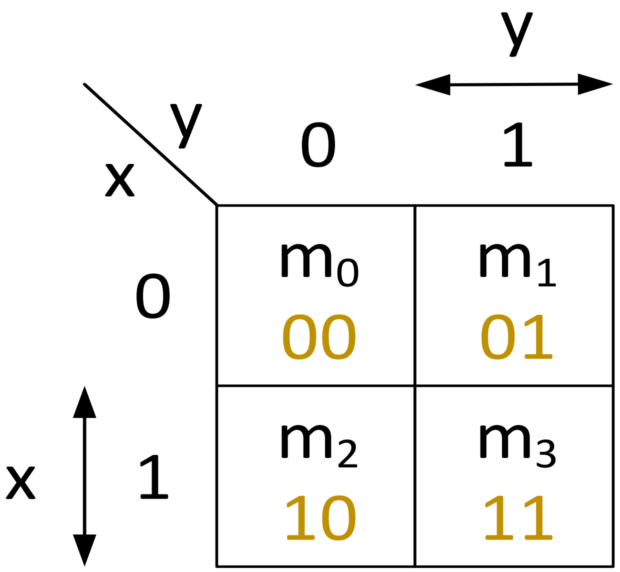
Από τον πίνακα αλήθειας μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα Karnaugh και από τον πίνακα Karnaugh μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα αλήθειας.

Ο πίνακας Karnaugh αποτελείται από **τετράγωνα ("κυψέλες"),** σε διάταξη γραμμών και στηλών, καθένα από τα οποία **αντιστοιχεί σε ένα και μοναδικό συνδυασμό τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών του πίνακα αλήθειας** και, συνεπώς, σε **ένα και μοναδικό ελαχιστόρο** της λογικής συνάρτησης.

Σε κάθε κυψέλη του πίνακα Karnaugh μεταφέρουμε την τιμή που έχει η λογική συνάρτηση στον αντίστοιχο συνδυασμό τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών στον πίνακα αλήθειας.

Πίνακας Karnaugh λογικής συνάρτησης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών





Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στη συμπληρωματική τιμή της μεταβλητής **x** και η δεύτερη στην κανονική μορφή αυτής. Αντίστοιχα, η πρώτη στήλη του πίνακα αντιστοιχεί στη συμπληρωματική τιμή της μεταβλητής **y** και η δεύτερη στην κανονική μορφή αυτής.

Οι περιοχές του πίνακα στις οποίες κάθε μεταβλητή λαμβάνει λογική τιμή 1, υποδεικνύονται με βέλη συνδυαζόμενα με το όνομα της μεταβλητής, αν και η ένδειξη αυτή δεν χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Οι τιμές, 0 ή 1, που έχουν οι λογικές συναρτήσεις σε κάθε συνδυασμό τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών του πίνακα αλήθειας μεταφέρονται στις αντίστοιχες κυψέλες του πίνακα karnaugh.

Σημειώνεται ότι, πολλές φορές μεταφέρονται από τον πίνακα αλήθειας μόνο οι τιμές 1 της λογικής συνάρτησης και οι υπόλοιπες κυψέλες, που αντιστοιχούν στα 0 του πίνακα αλήθειας της λογικής συνάρτησης, αφήνονται κενές.

x y	**F**	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	0	
1 1	**1**	m_3

x \ y	0	1
0	0	**1**
1	0	**1**

$F = \Sigma(1, 3) = x'y + xy$

x y	**F**	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	**1**	m_2
1 1	**1**	m_3

x \ y	0	1
0		**1**
1	**1**	**1**

$F = \Sigma(1, 2, 3) = x'y + xy' + xy$

Πίνακας Karnaugh λογικής συνάρτησης τριών ανεξάρτητων μεταβλητών

x \ yz	00	01	11	10
			y	y
0	000	001	011	010
x 1	100	101	111	110
		z	z	

x \ yz	00	01	11	10
			y	y
0	m_0 000	m_1 001	m_3 011	m_2 010
x 1	m_4 100	m_5 101	m_7 111	m_6 110
		z	z	

Αποτελείται από <u>οκτώ κυψέλες</u>, αφού <u>τρεις μεταβλητές συνιστούν οκτώ ελαχιστόρους</u>. **Οι λογικές τιμές των μεταβλητών y και z**, στις οποίες αντιστοιχούν οι στήλες του πίνακα Karnaugh, **διατάσσονται με την ακολουθία του κώδικα Gray**, σύμφωνα με τον οποίο **δύο διαδοχικοί αριθμοί διαφέρουν μόνο σε ένα ψηφίο**.

Στη διάταξη αυτή, **κατά τη μετάβαση από μία στήλη του πίνακα Karnaugh στη γειτονική της, παρουσιάζεται αλλαγή τιμής μόνο στη μία από τις δύο μεταβλητές**.

Ο πίνακας αλήθειας και ο συμπληρωμένος πίνακας karnaugh της λογικής συνάρτησης:

$F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 4, 5)$

x y z	F	
0 0 0	**1**	m_0
0 0 1	**1**	m_1
0 1 0	0	
0 1 1	0	
1 0 0	**1**	m_4
1 0 1	**1**	m_5
1 1 0	0	
1 1 1	0	

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	0	0
1	**1**	**1**	0	0

y

z

Πίνακας Karnaugh λογικής συνάρτησης τεσσάρων ανεξάρτητων μεταβλητών

Αποτελείται από δεκάξι κυψέλες, αφού τέσσερις μεταβλητές συνιστούν δεκάξι ελαχιστόρους. Οι λογικές τιμές των μεταβλητών **x** και **y**, στις οποίες αντιστοιχούν οι γραμμές του πίνακα Karnaugh, καθώς και οι λογικές τιμές των μεταβλητών **z** και **w**, στις οποίες αντιστοιχούν οι στήλες του πίνακα Karnaugh, διατάσσονται με την ακολουθία του κώδικα Gray.

xy \ zw	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

xy \ zw	00	01	11	10
00	m_0 0000	m_1 0001	m_3 0011	m_2 0010
01	m_4 0100	m_5 0101	m_7 0111	m_6 0110
11	m_{12} 1100	m_{13} 1101	m_{15} 1111	m_{14} 1110
10	m_8 1000	m_9 1001	m_{11} 1011	m_{10} 1010

Ο συμπληρωμένος πίνακας karnaugh της λογικής συνάρτησης:

F(x, y, z, w) = Σ(0, 1, 2, 6, 7, 9, 10, 14, 15)

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**		**1**
01			**1**	**1**
11			**1**	**1**
10		**1**		**1**

z

y

x

w

Πίνακας Karnaugh λογικής συνάρτησης πέντε ανεξάρτητων μεταβλητών

Για την περιγραφή μιας λογικής συνάρτησης πέντε μεταβλητών, έστω **F(x, y, z, w, v)**, χρησιμοποιούνται δύο πίνακες Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών, στον πρώτο από τους οποίους σε μία από τις πέντε μεταβλητές (π.χ. στη μεταβλητή **x**) τίθεται η λογική τιμή 0, ενώ στον δεύτερο πίνακα τίθεται στην ίδια μεταβλητή η τιμή 1, και αναπτύσσουμε δύο πίνακες με τις υπόλοιπες τέσσερις μεταβλητές.

x = 0

w

yz \ wv	00	01	11	10
00	m_0 0000	m_1 0001	m_3 0011	m_2 0010
01	m_4 0100	m_5 0101	m_7 0111	m_6 0110
11	m_{12} 1100	m_{13} 1101	m_{15} 1111	m_{14} 1110
10	m_8 1000	m_9 1001	m_{11} 1011	m_{10} 1010

z

y

v

x = 1

w

yz \ wv	00	01	11	10
00	m_{16} 0000	m_{17} 0001	m_{19} 0011	m_{18} 0010
01	m_{20} 0100	m_{21} 0101	m_{23} 0111	m_{22} 0110
11	m_{28} 1100	m_{29} 1101	m_{31} 1111	m_{30} 1110
10	m_{24} 1000	m_{25} 1001	m_{27} 1011	m_{26} 1010

z

y

v

Ελαχιστοποίηση λογικών συναρτήσεων με πίνακες Karnaugh

Δύο **γειτονικές κυψέλες** του πίνακα, δηλαδή δύο **κυψέλες με κοινή πλευρά**, διαφέρουν μόνο κατά μία μεταβλητή, η οποία συμμετέχει με την κανονική της μορφή στον ελαχιστόρο που αντιστοιχεί στη μια κυψέλη και με τη συμπληρωματική της μορφή στον ελαχιστόρο που αντιστοιχεί στη γειτονική κυψέλη.

Για παράδειγμα, οι ελαχιστόροι $\mathbf{m_0 = x'y'}$ και $\mathbf{m_1 = x'y}$, που αντιστοιχούν σε κυψέλες με κοινή πλευρά, διαφέρουν στο ότι η μεταβλητή **y** συμμετέχει στον ελαχιστόρο $\mathbf{m_0}$ με τη συμπληρωματική της μορφή, ενώ στον ελαχιστόρο $\mathbf{m_1}$, που αντιστοιχεί στη γειτονική κυψέλη, συμμετέχει με την κανονική της μορφή.

Εφαρμόζοντας τα αξιώματα της άλγεβρας Boole, το λογικό άθροισμα αυτών των ελαχιστόρων είναι: $\mathbf{m_0 + m_1 = x'y' + x'y = x'(y' + y) = x'}$.

Αυτό σημαίνει ότι, **κατά τη λογική άθροιση ελαχιστόρων που αντιστοιχούν σε γειτονικές κυψέλες, απαλείφεται (:απλοποιείται) η μεταβλητή κατά την οποία διαφέρουν αυτοί οι δύο ελαχιστόροι.**

Δεν αποτελούν ζεύγη οι κυψέλες που είναι διαγώνιες μεταξύ τους, αφού στην περίπτωση αυτή αλλάζουν κατάσταση δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Στην περίπτωση που **όλες οι κυψέλες** του πίνακα Karnaugh περιέχουν **τιμή 1**, τότε **η λογική συνάρτηση ισούται με 1**, ενώ, εάν **όλες οι κυψέλες** του πίνακα Karnaugh περιέχουν **τιμή 0**, τότε **η λογική συνάρτηση ισούται με 0**.

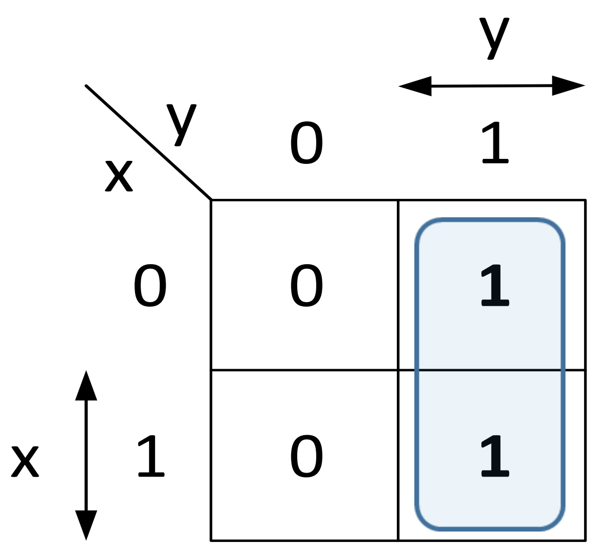
Διαδικασία:

- Οι τιμές της συνάρτησης μεταφέρονται στον πίνακα Karnaugh.
- Επιλέγουμε στον πίνακα ζεύγη γειτονικών κυψελών που περιέχουν τιμή 1.
- Εξάγουμε την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση σε πρότυπη μορφή αθροίσματος γινομένων, λαμβάνοντας υπόψη ότι **κάθε ζεύγος γειτονικών κυψελών οδηγεί στην απαλοιφή μιας μεταβλητής** και, συγκεκριμένα, **αυτής που στη μία κυψέλη είναι σε κανονική μορφή και στη γειτονική κυψέλη σε συμπληρωματική μορφή.**

Για παράδειγμα, στο Σχήμα δίνεται ο πίνακας αλήθειας μιας λογικής συνάρτησης **F(x, y)** και ο συμπληρωμένος πίνακας Karnaugh. Από τον πίνακα αλήθειας εξάγουμε τη μορφή της συνάρτησης ως άθροισμα ελαχιστόρων:

$$\mathbf{F(x, y) = m_1 + m_3 = x'y + xy.}$$

x y	**F**	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	0	
1 1	**1**	m_3



Η μεταβλητή **x** αλλάζει τιμή στην ομάδα, επομένως: **F(x, y) = y**

<u>Επιβεβαίωση:</u> **x’y + xy = y(x’ + x) = y**

Παράδειγμα 4.1: Να απλοποιηθεί η συνάρτηση του Σχήματος.

Η λογική συνάρτηση είναι: **F(x, y) = x’y + xy’ + xy = Σ(1, 2, 3).**

x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	**1**	m_2
1 1	**1**	m_3

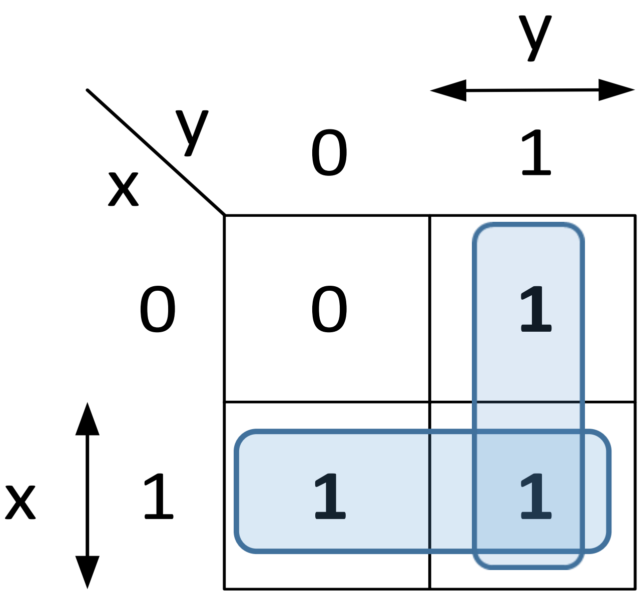
x \ y	0	1
0	0	**1**
1	**1**	**1**

m_2, m_3 $\longrightarrow$ **x** **[xy’ + xy = x(y’ + y) = x]**

Παράδειγμα 4.1: Να απλοποιηθεί η συνάρτηση του Σχήματος.

Η λογική συνάρτηση είναι: **F(x, y) = x’y + xy’ + xy = Σ(1, 2, 3).**

x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	**1**	m_2
1 1	**1**	m_3



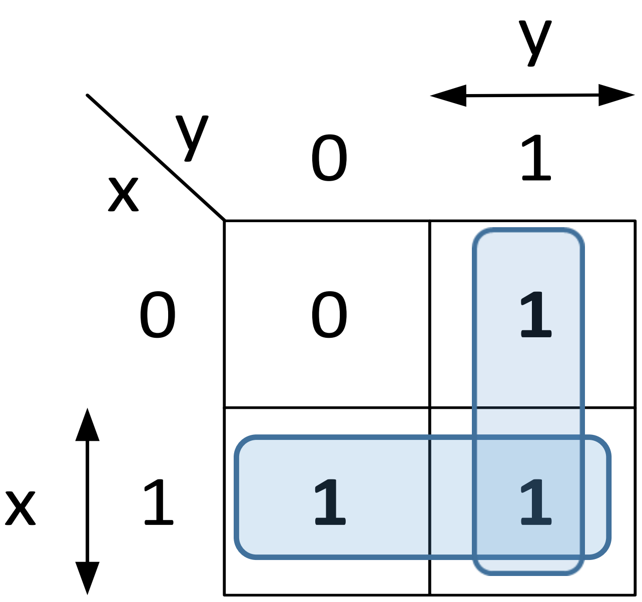
$m_2, m_3 \longrightarrow$ **x** [xy’ + xy = x(y’ + y) = x]

$m_1, m_3 \longrightarrow$ **y** [x’y + xy = y(x’ + x) = y]

Παράδειγμα 4.1: Να απλοποιηθεί η συνάρτηση του Σχήματος.

Η λογική συνάρτηση είναι: **F(x, y) = x’y + xy’ + xy = Σ(1, 2, 3).**

x y	F	
0 0	0	
0 1	**1**	m_1
1 0	**1**	m_2
1 1	**1**	m_3



m_2, m_3 $\longrightarrow$ **x [xy’ + xy = x(y’ + y) = x]** **m_1,m_3** $\longrightarrow$ **y [x’y + xy = y(x’ + x) = y]**

F = x + y

<u>Επιβεβαίωση:</u>

F = x’y + xy’ + xy = x’y + xy’ + xy + xy = x’y + xy + xy’ + xy = x(y’ + y) + y(x’ + x) = x + y

- **Κάθε ομάδα μπορεί να περιλαμβάνει “1” που περιλαμβάνονται και σε άλλη ομάδα (κοινά “1”), αφού, σύμφωνα με τα θεωρήματα της άλγεβρας Boole, A + A = A.**

  Αυτό συμφέρει όταν η χρησιμοποίηση κοινών “1” σε μια ομάδα απλοποιεί επιπλέον μεταβλητές, διαφορετικά είναι διαδικασία χωρίς όφελος.

- **Κάθε ομάδα, όμως, πρέπει να περιλαμβάνει <u>οπωσδήποτε τουλάχιστον ένα μη κοινό “1”.</u>**

  Δεν πρέπει, δηλαδή, να φτιάξουμε ομάδα με “1” που όλα ανήκουν και σε άλλες ομάδες.

Παράδειγμα 4.2: Να απλοποιηθεί με πίνακα Karnaugh η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 3.7.

Παράδειγμα 4.2: Να απλοποιηθεί με πίνακα Karnaugh η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 3.7.

Η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων εκφράζεται ως: F(x, y, z) = Σ(3, 5, 6, 7)

και ο πίνακας αλήθειας είναι:

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Παράδειγμα 4.2: Να απλοποιηθεί με πίνακα Karnaugh η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 3.7.

Η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων εκφράζεται ως: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7)$

και ο πίνακας αλήθειας είναι:

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

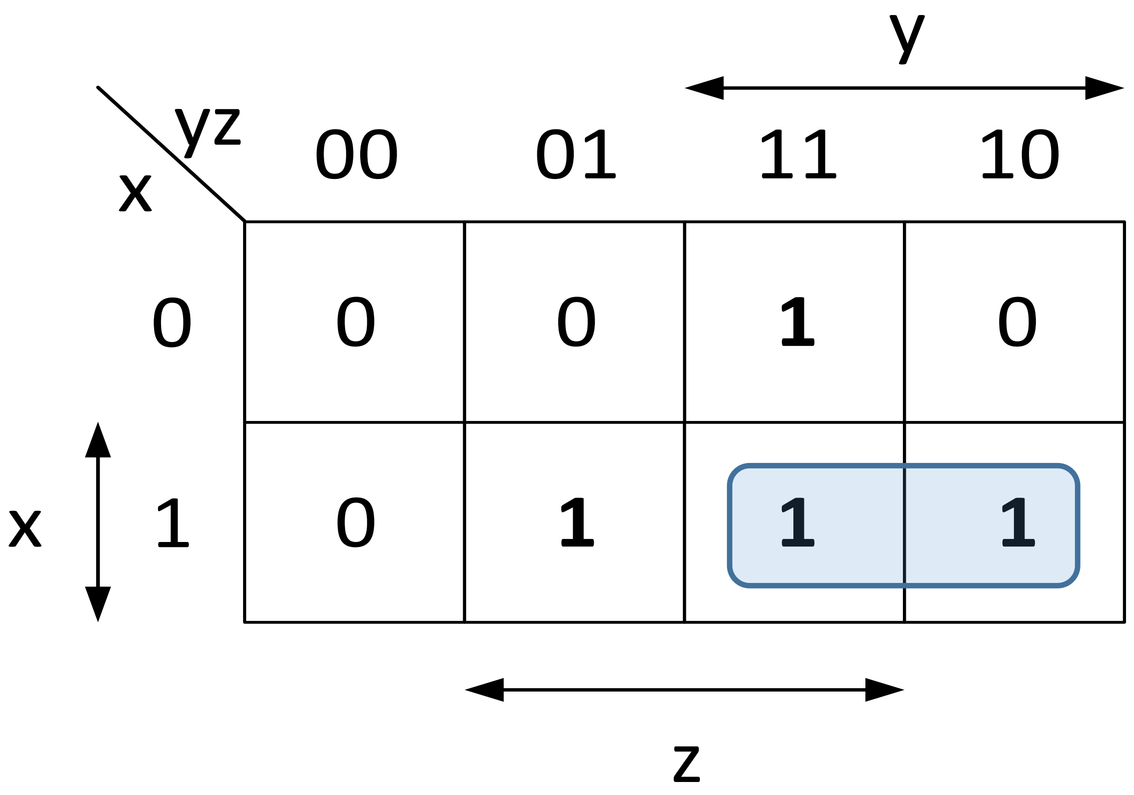
x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	**1**	0
1	0	**1**	**1**	**1**

Παράδειγμα 4.2: Να απλοποιηθεί με πίνακα Karnaugh η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων που εξετάσαμεγ στο Παράδειγμα 3.7.

Η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων εκφράζεται ως: F(x, y, z) = Σ(3, 5, 6, 7)

και ο πίνακας αλήθειας είναι:

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

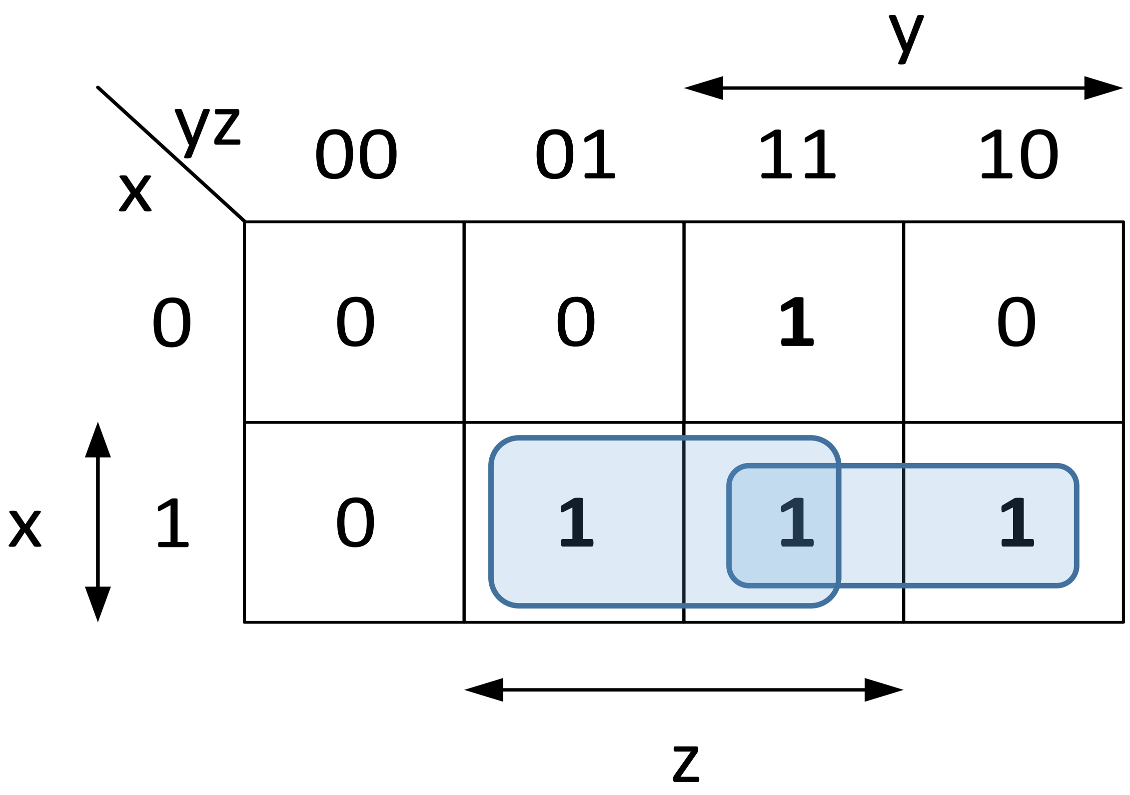


F = xy

Παράδειγμα 4.2: Να απλοποιηθεί με πίνακα Karnaugh η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 3.7.

Η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων εκφράζεται ως: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7)$ και ο πίνακας αλήθειας είναι:

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

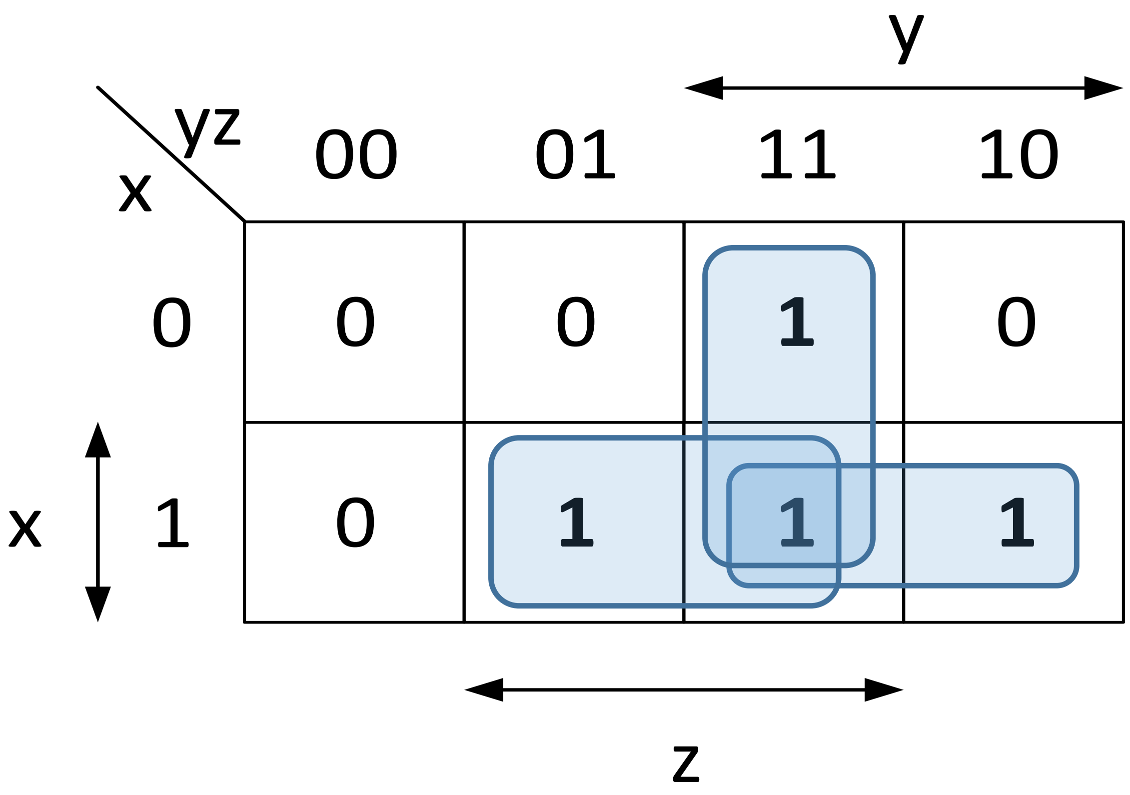


F = xy + xz

Παράδειγμα 4.2: Να απλοποιηθεί με πίνακα Karnaugh η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων που εξετάσαμε στο Παράδειγμα 3.7.

Η συνάρτηση πλειοψηφίας τριών εισόδων εκφράζεται ως: $F(x, y, z) = \Sigma(3, 5, 6, 7)$ και ο πίνακας αλήθειας είναι:

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

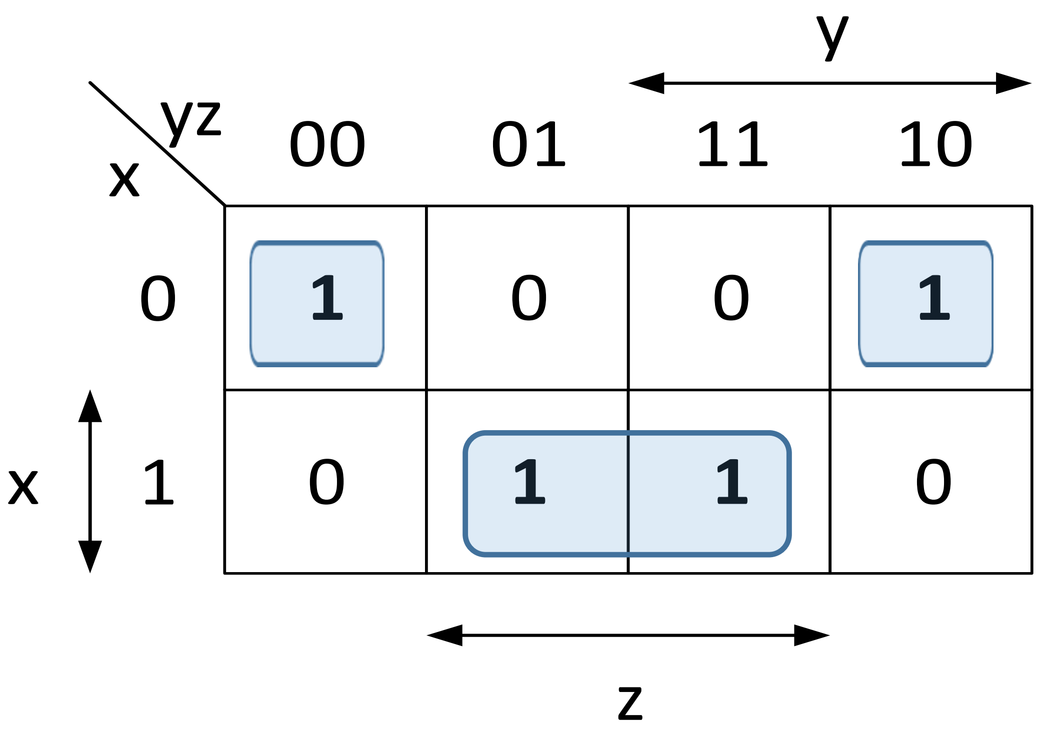


F = xy + xz + yz

Παράδειγμα 4.3: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$

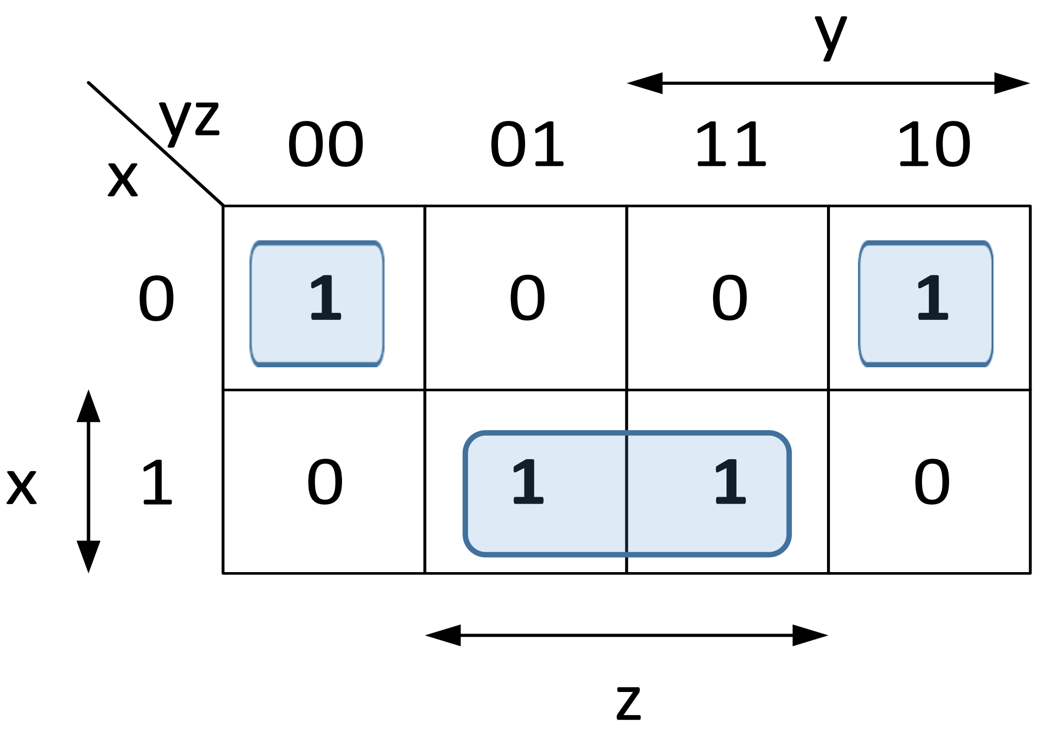
x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	0	0	**1**
1	0	**1**	**1**	0

Παράδειγμα 4.3: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$



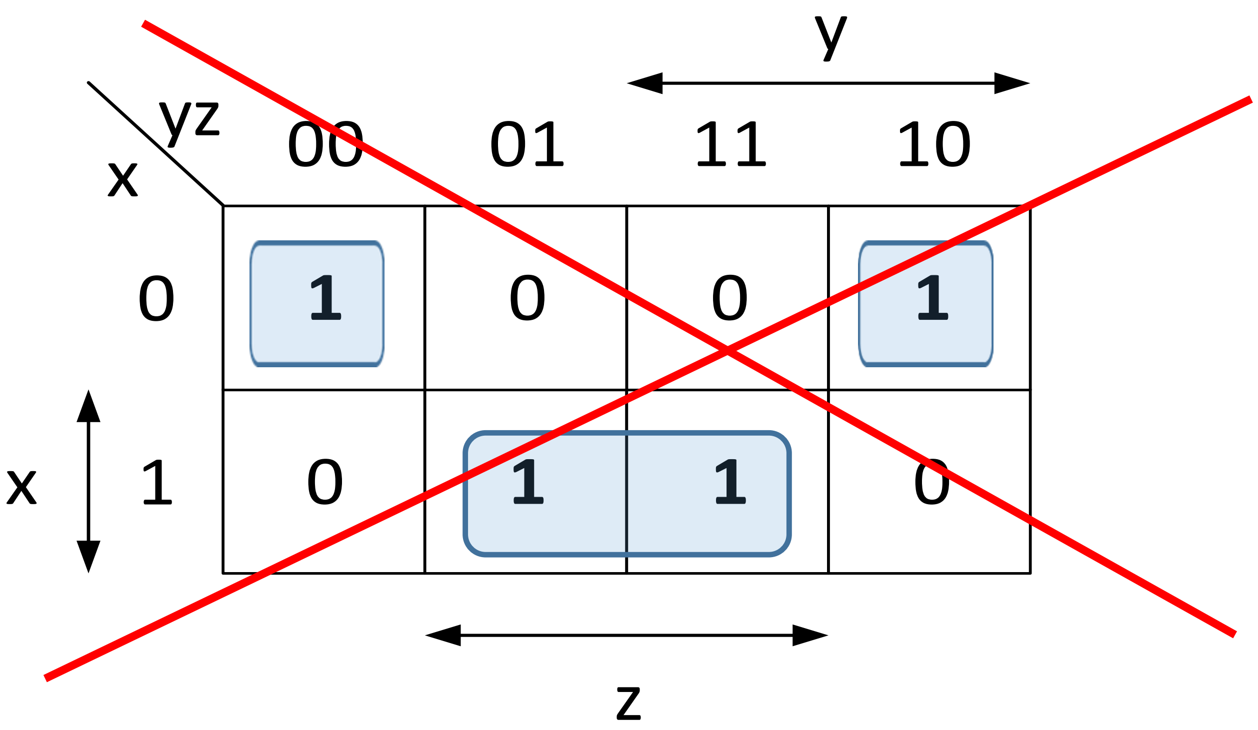
$F = xz +$ **$x'y'z'$** $+$ **$x'yz'$**

Παράδειγμα 4.3: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$



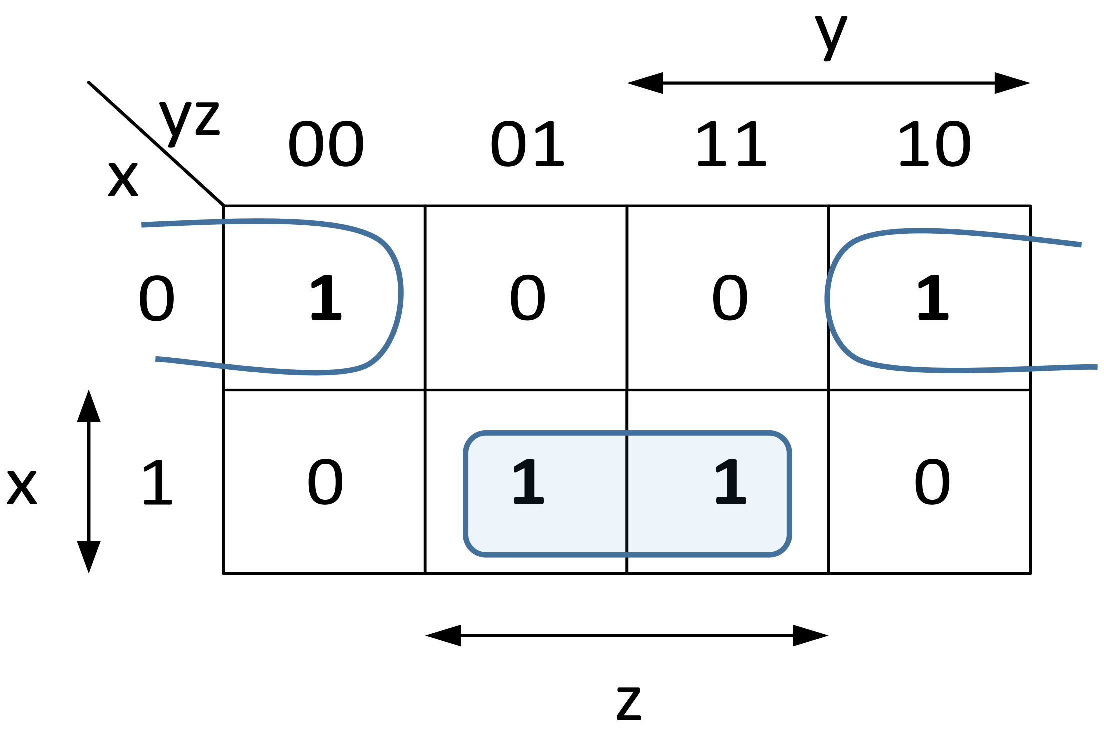
$F = xz + x'y'z' + x'yz' = xz + x'z'(y' + y) = xz + x'z'$

Παράδειγμα 4.3: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$



$F = xz + x'y'z' + x'yz' = xz + x'z'(y' + y) = xz + x'z'$

Παράδειγμα 4.3: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7)$



$F = xz +$ **$x'z'$**

Το πλήθος των των 1 που μπορούμε να ομαδοποιήσουμε πρέπει να μπορεί να εκφραστεί ως δύναμη του 2, δηλαδή:

- $2^0 = 1$, οπότε δεν έχουμε καμία ομαδοποίηση και καμία απλοποίηση μεταβλητής και ο ελαχιστόρος παραμένει ως είχε.
- $2^1 = 2$, οπότε έχουμε ένα ζευγάρι και απλοποιείται μία μεταβλητή.
- $2^2 = 4$, οπότε έχουμε μια τετράδα και απλοποιούνται δύο μεταβλητές.
- $2^3 = 8$, οπότε έχουμε οκτάδα και απλοποιούνται τρεις μεταβλητές, κ.ο.κ.

Ο εκθέτης του 2 μας δίνει το πλήθος των μεταβλητών που απλοποιούνται.

Παράδειγμα 4.4: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$

x \ yz	00	01	11	10
0	0	**1**	**1**	0
1	0	**1**	**1**	0

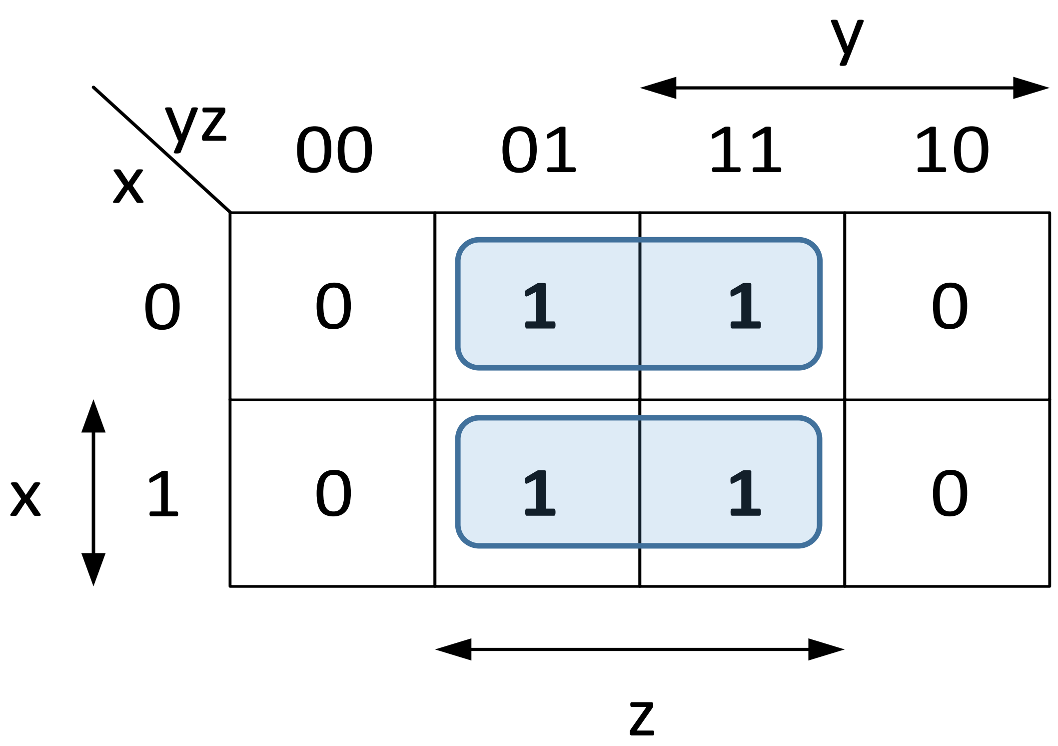
F =

Παράδειγμα 4.4: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(1, 3, 5, 7)

x \ yz	00	01	11	10
0	0	**1**	**1**	0
1	0	**1**	**1**	0

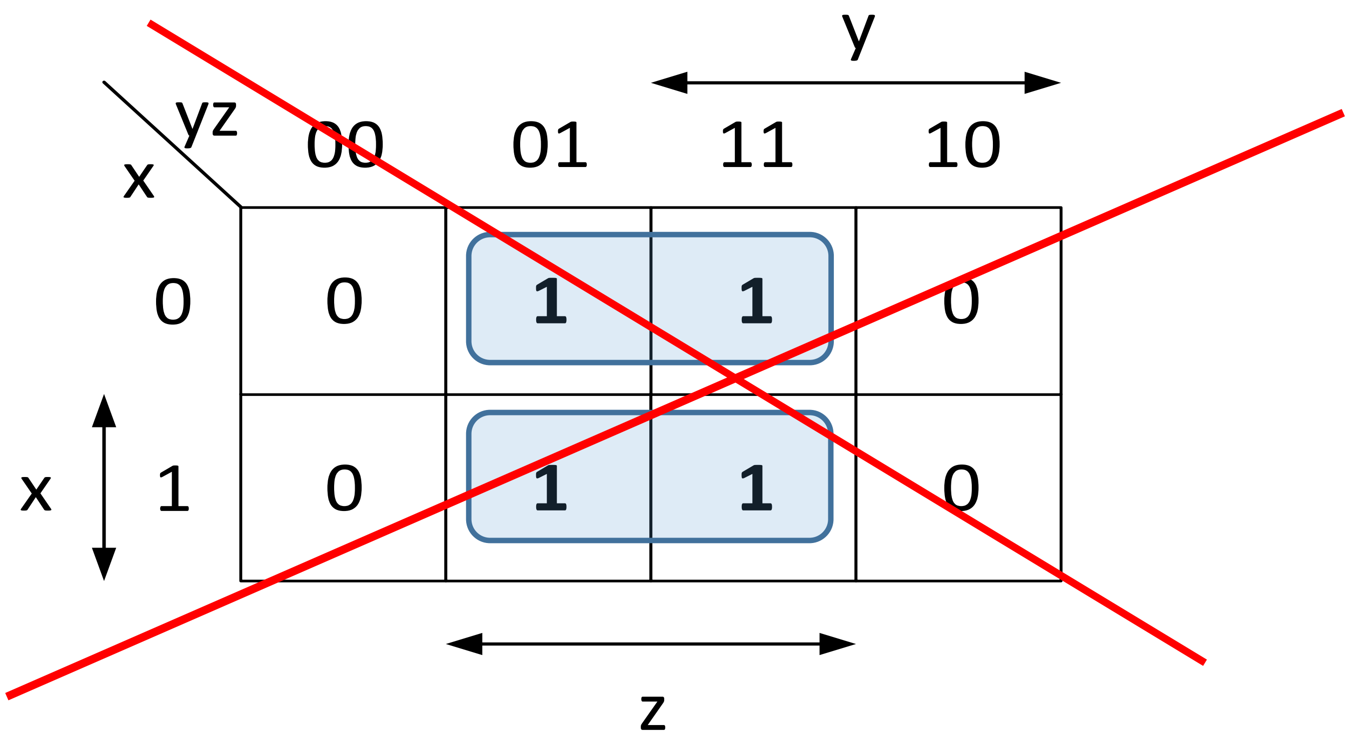
F = x’z + xz

Παράδειγμα 4.4: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$



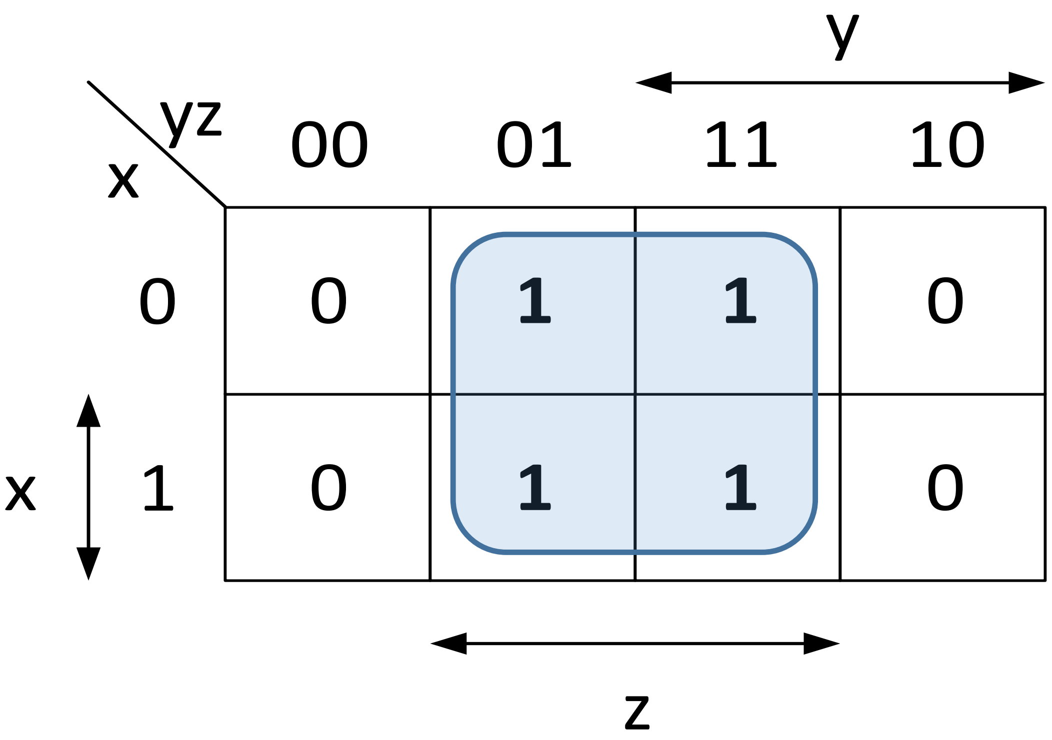
$$\mathbf{F = x'z + xz = (x' + x)z = z}$$

Παράδειγμα 4.4: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$



$F = x'z + xz = (x' + x)z = z$

Παράδειγμα 4.4: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 5, 7)$



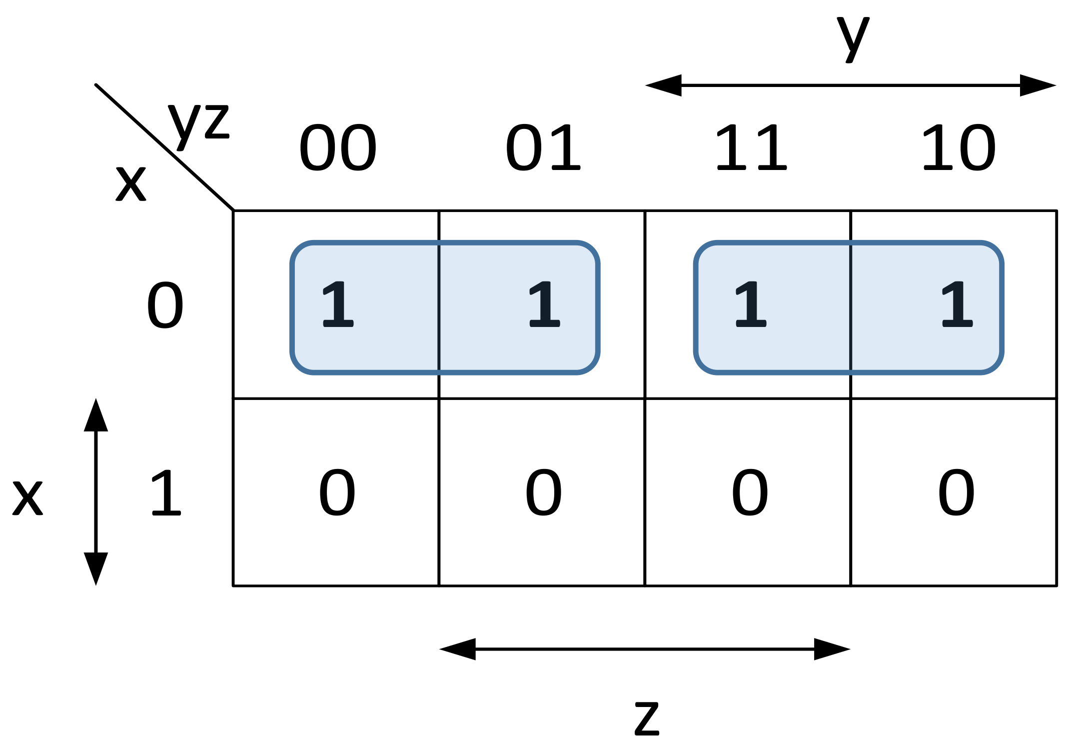
F = z

Παράδειγμα 4.5: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(0, 1, 2, 3)

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	0

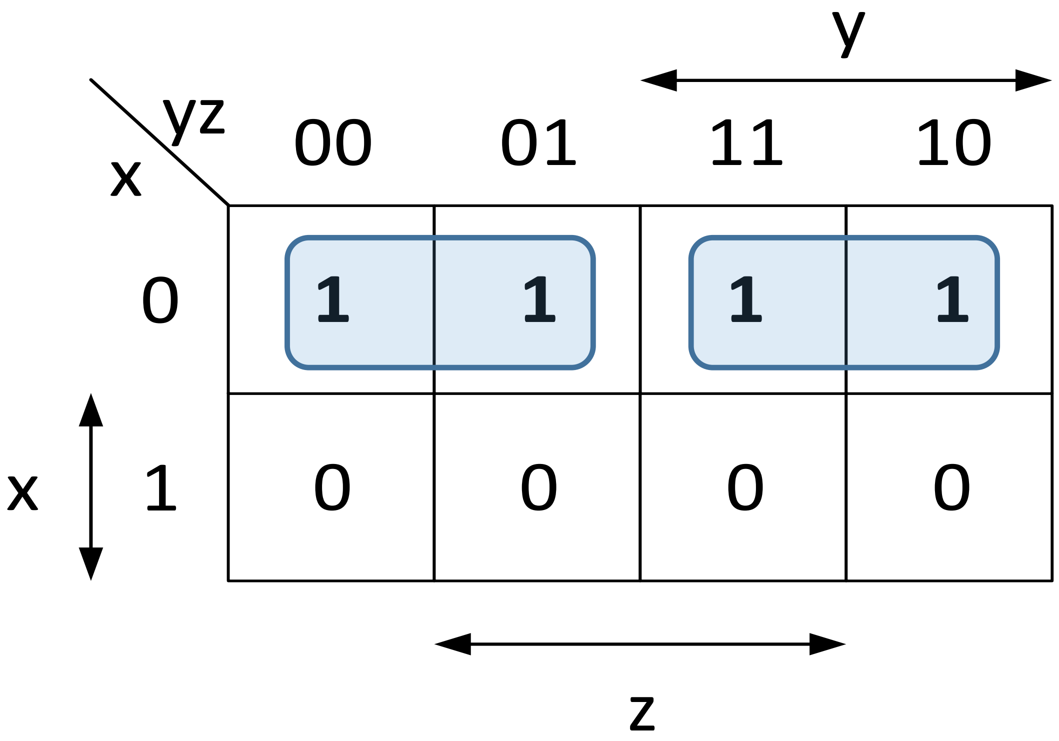
F =

Παράδειγμα 4.5: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 3)$



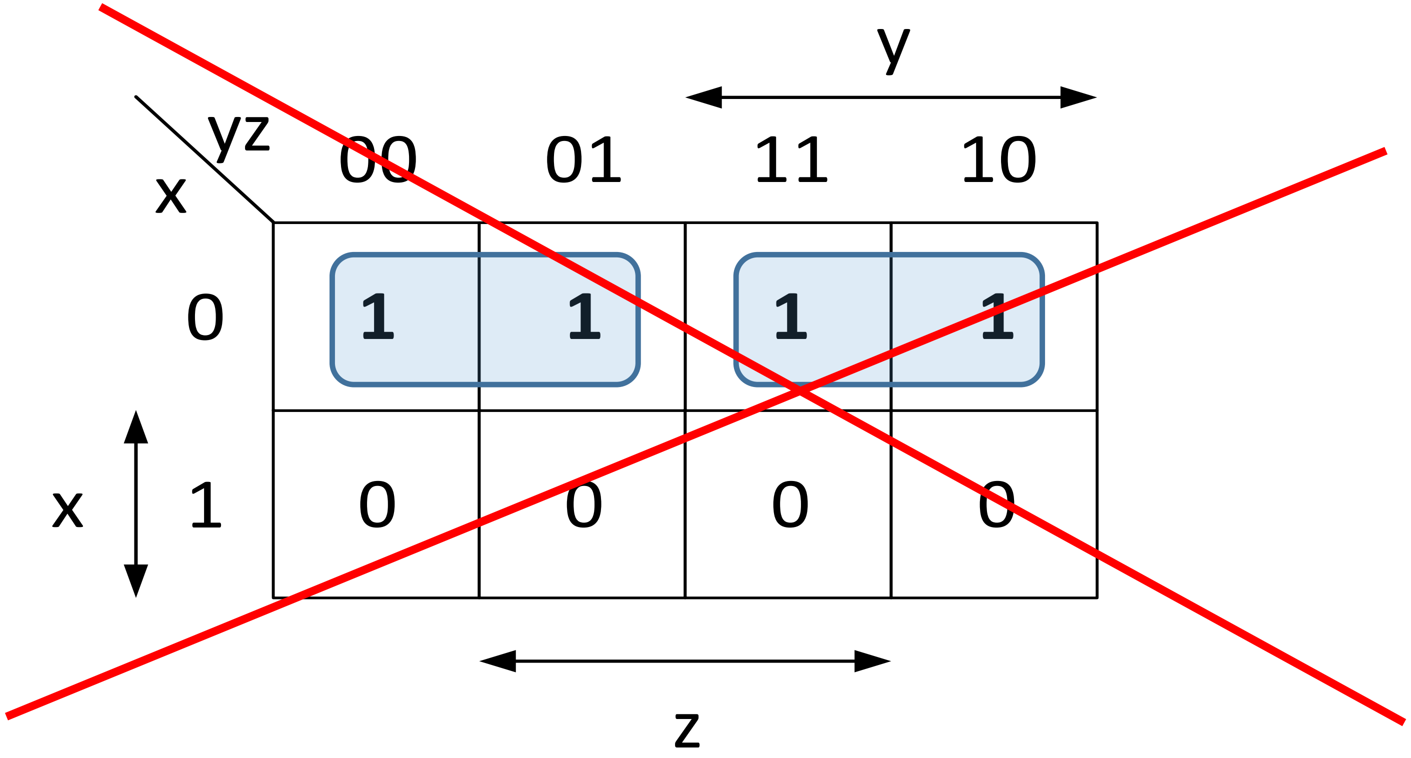
$F = x'y' + x'y$

Παράδειγμα 4.5: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(0, 1, 2, 3)



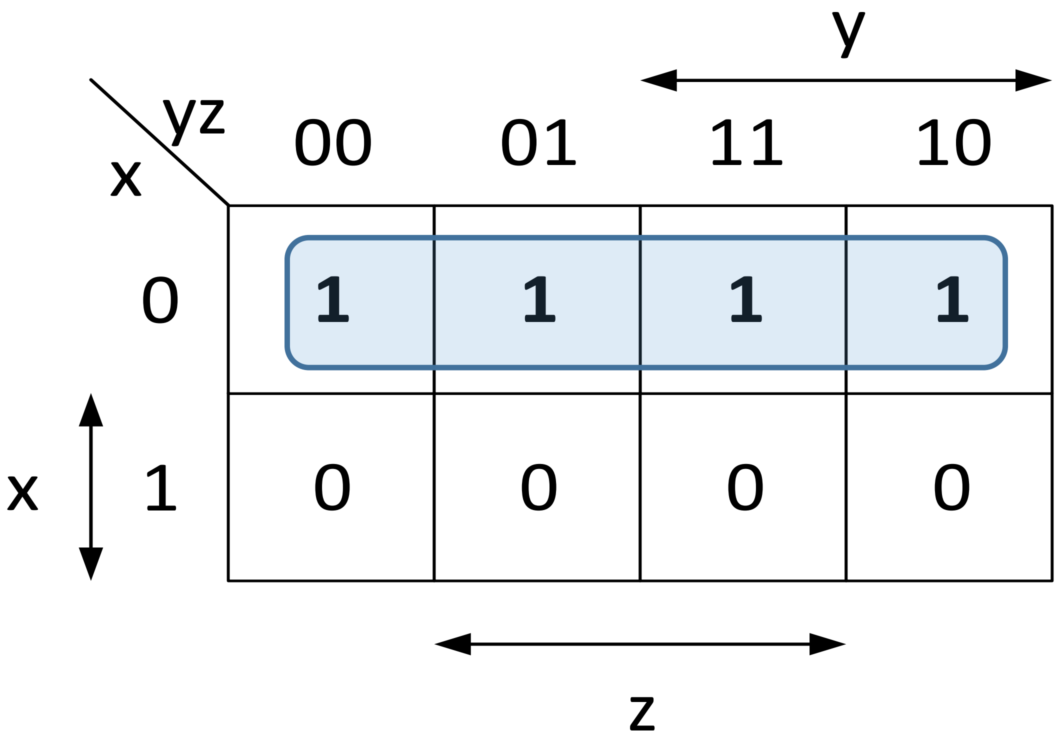
F = x’y’ + x’y = x’(y’ + y) = x’

Παράδειγμα 4.5: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 3)$



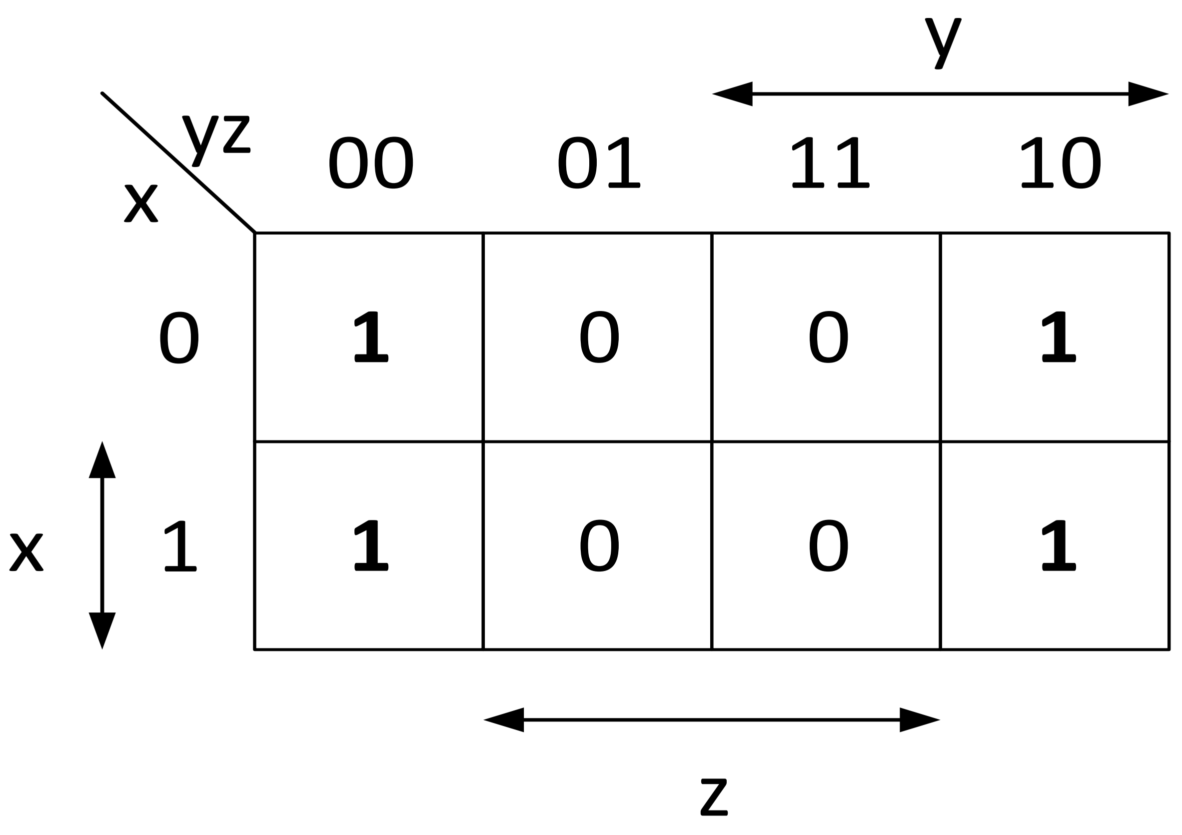
$F = x'y' + x'y = x'(y' + y) = x'$

Παράδειγμα 4.5: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 3)$



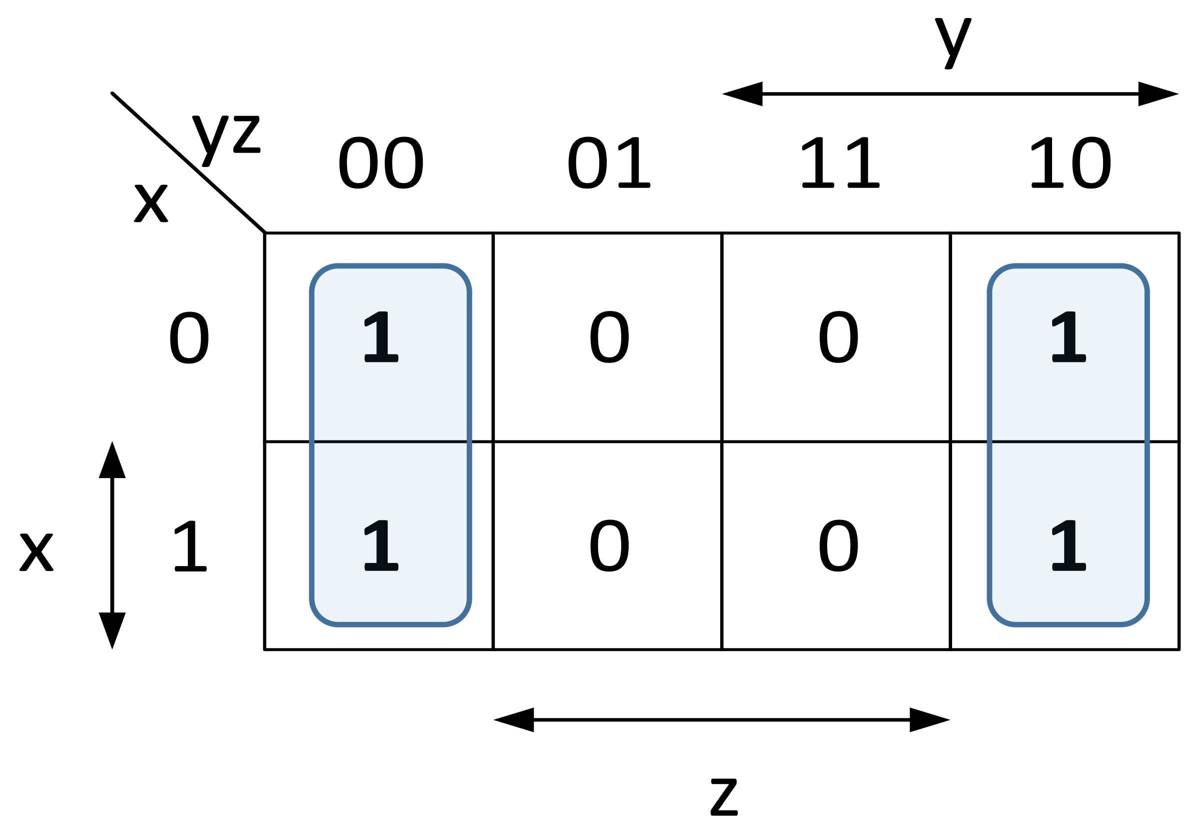
$F = x'$

Παράδειγμα 4.6: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(0, 2, 4, 6)



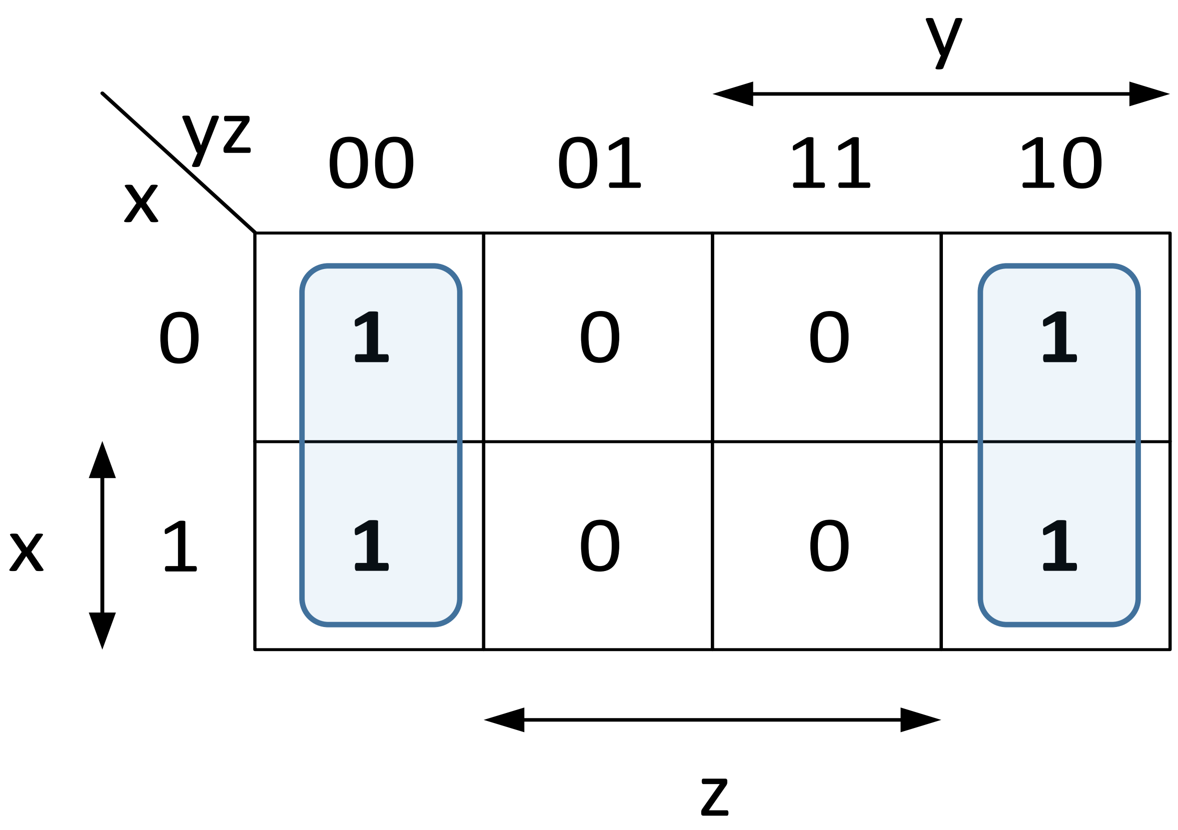
F =

Παράδειγμα 4.6: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 6)$



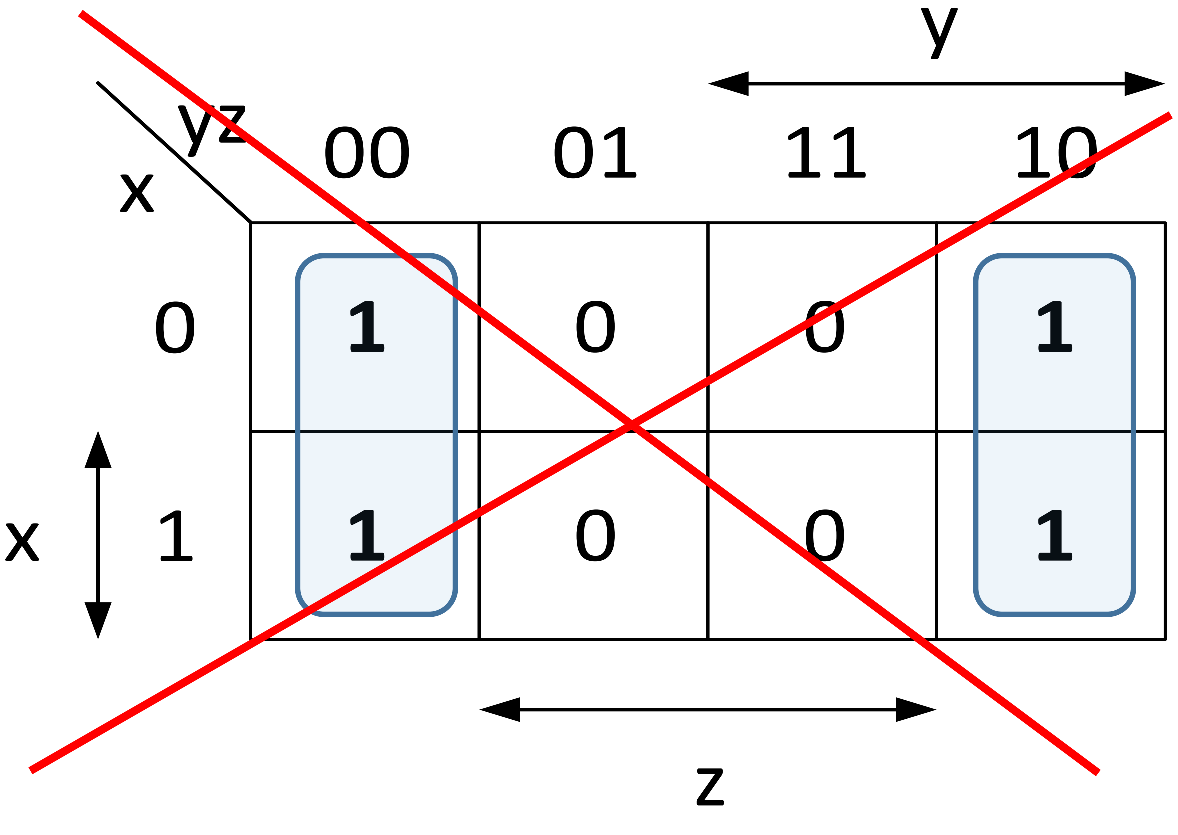
$F = y'z' + yz'$

Παράδειγμα 4.6: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 6)$



$F = y'z' + yz' = (y' + y)z = z$

Παράδειγμα 4.6: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 6)$



$F = y'z' + yz' = (y' + y)z = z$

Παράδειγμα 4.6: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 6)$

y

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	0	0	**1**
1	**1**	0	0	**1**

z

$F = z'$

Παράδειγμα 4.7: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(0, 1, 2, 4, 6, 7)

x	00	01	11	10
0	**1**	**1**	0	**1**
1	**1**	0	**1**	**1**

F =

Παράδειγμα 4.7: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση F(x, y, z) = Σ(0, 1, 2, 4, 6, 7)

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	0	**1**
1	**1**	0	**1**	**1**

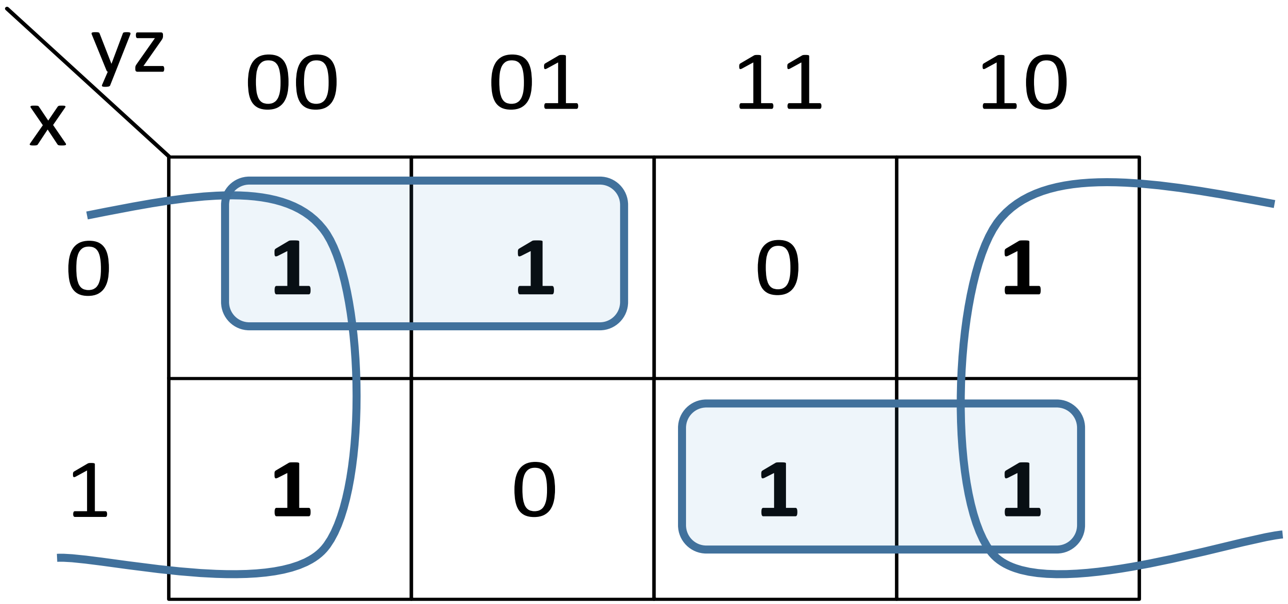
F = z’

Παράδειγμα 4.7: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 6, 7)$

x \ yz	00	01	11	10
0	**1**	**1**	0	**1**
1	**1**	0	**1**	**1**

$F = z' + x'y' + xy$

Παράδειγμα 4.7: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση $F(x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 6, 7)$



$F = z' + x'y' + xy = z' + (x \oplus y)'$

Παράδειγμα 4.8: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F(x, y, z, w) = Σ(0, 2, 8, 10)**.

z

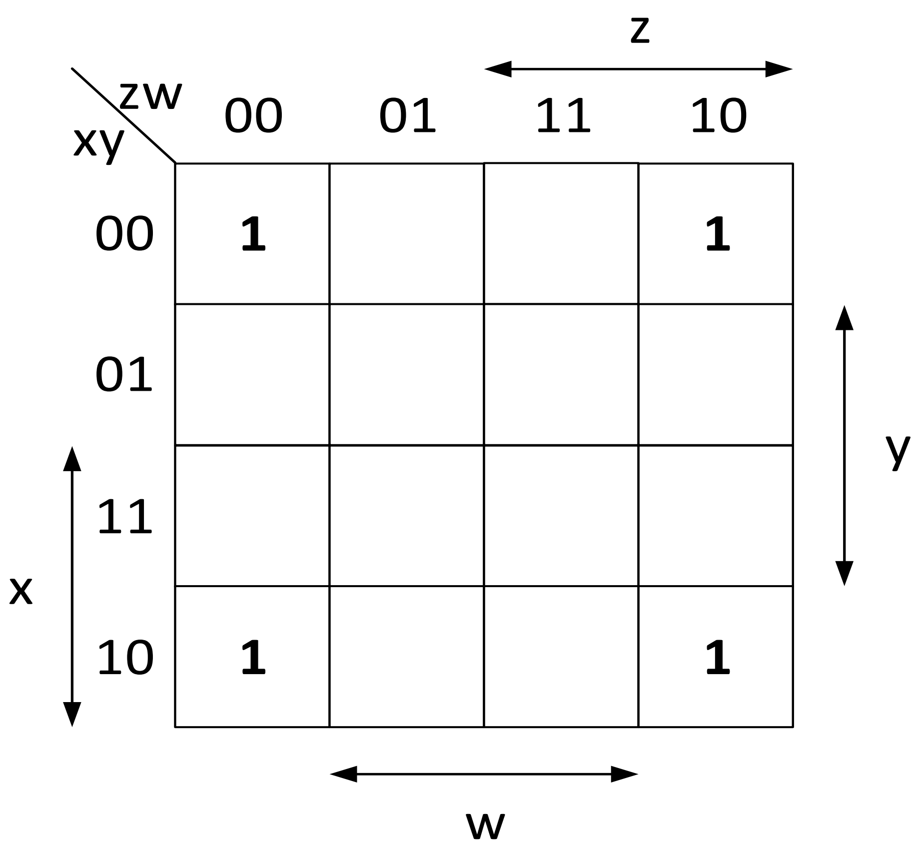
xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**			**1**
01				
11				
10	**1**			**1**

w

y

x

Παράδειγμα 4.8: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F(x, y, z, w) = Σ(0, 2, 8, 10)**.

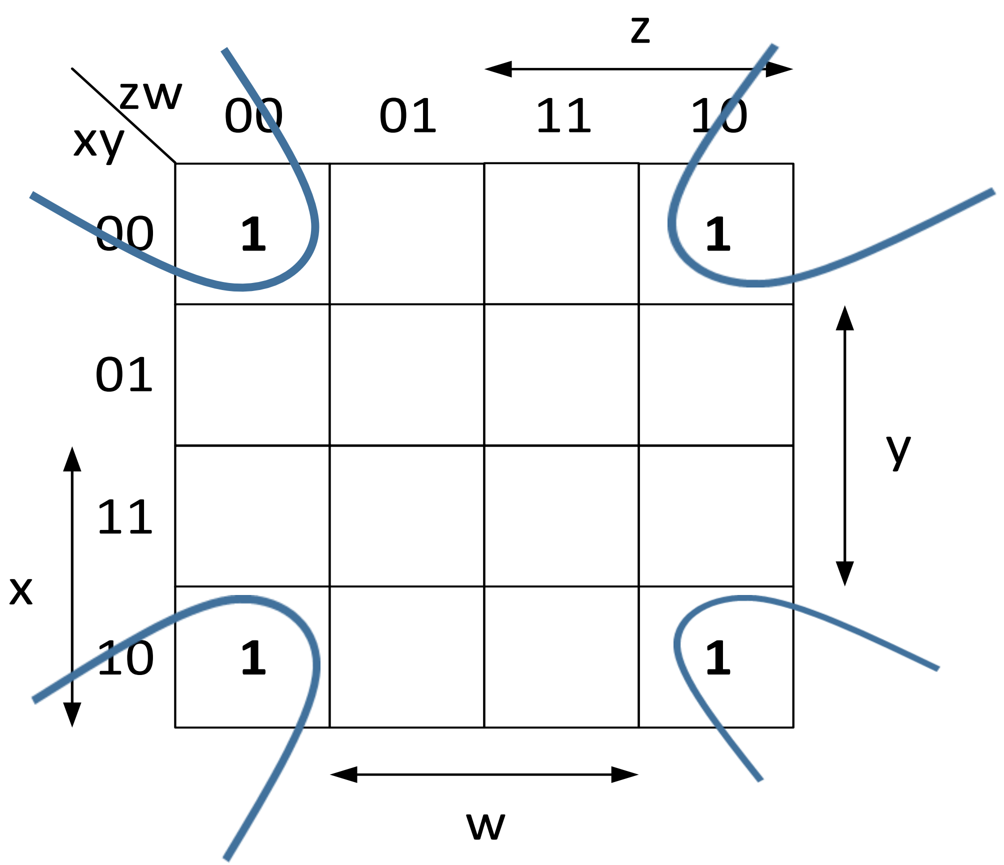


F(x, y, z, w) = x’y’z’w’ + x’y’zw’ + xy’z’w’ + xy’zw’

= x’y’w’(z’ + z) + xy’w’(z’ + z)

= x’y’w’ + xy’w’ = (x’ + x)y’w’ = y’w’

Παράδειγμα 4.8: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F(x, y, z, w) = Σ(0, 2, 8, 10)**.



F(x, y, z, w) = y’w’

Παράδειγμα 4.9: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)**.

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**		**1**
01				**1**
11		**1**		**1**
10	**1**			**1**

Παράδειγμα 4.9: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)**.

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**		**1**
01				**1**
11		**1**		**1**
10	**1**			**1**

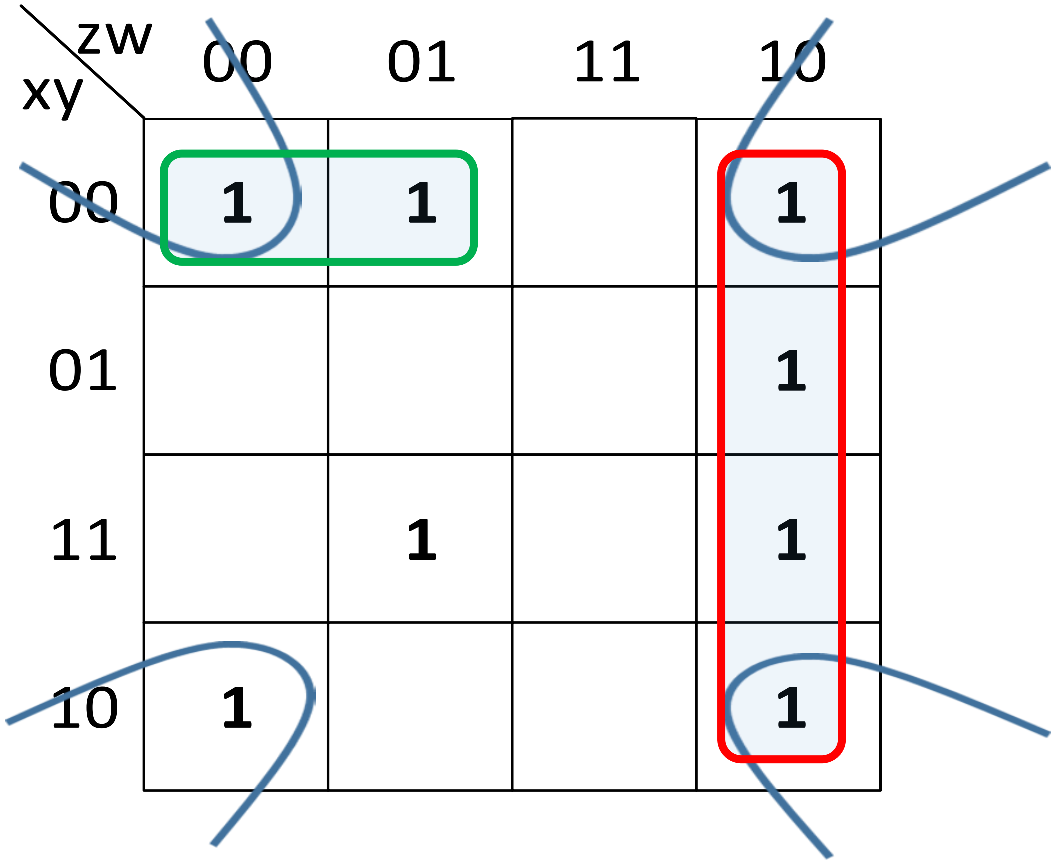
F = **y’w’** +

Παράδειγμα 4.9: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)**.

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**		**1**
01				**1**
11		**1**		**1**
10	**1**			**1**

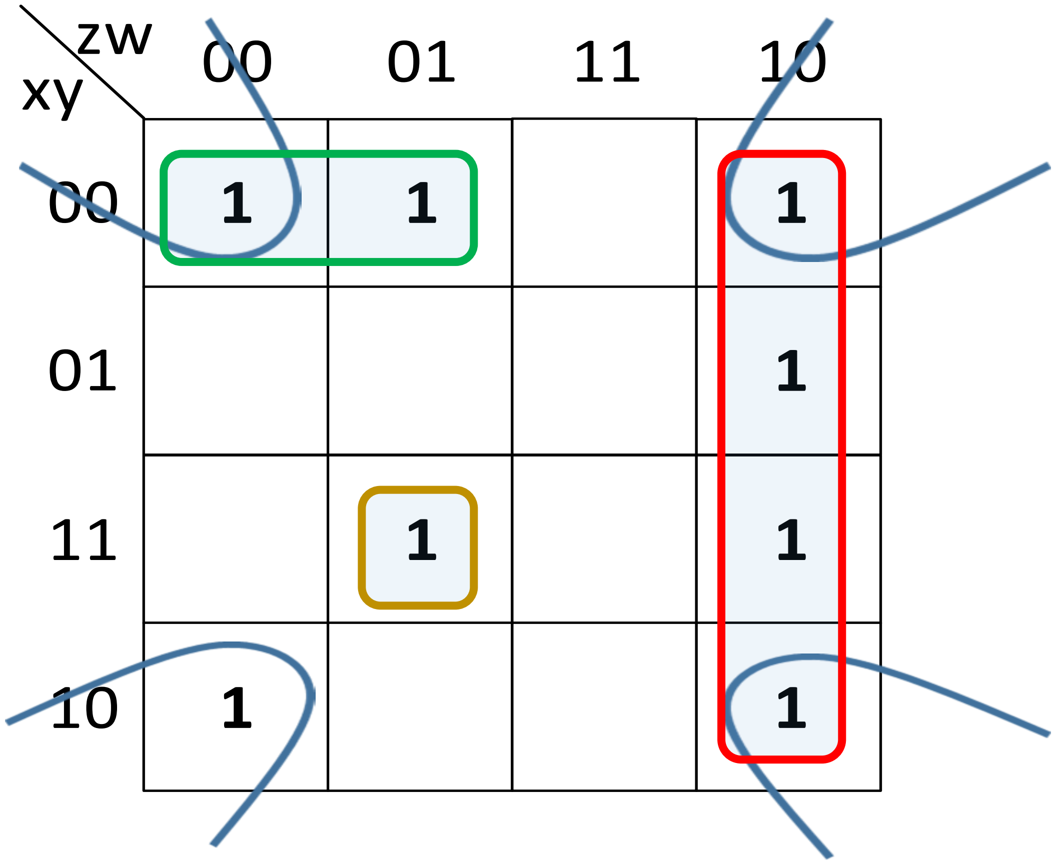
F = **y'w'** + **zw'** +

Παράδειγμα 4.9: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)**.



F = y'w' + zw' + x'y'z'

Παράδειγμα 4.9: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση **F = Σ(0, 1, 2, 6, 8, 10, 13, 14)**.



F = **y’w’** + **zw’** + **x’y’z’** + **xyz’w**

Παράδειγμα 4.10: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:

$$F = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).$$

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

Παράδειγμα 4.10: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:

F = Σ(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

F = **z** +

Παράδειγμα 4.10: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:

F = Σ(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

F = **z** + **w’** +

Παράδειγμα 4.10: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:

F = Σ(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).

xy \ zw	00	01	11	10
00	**1**	**1**	**1**	**1**
01	**1**		**1**	**1**
11	**1**		**1**	**1**
10	**1**		**1**	**1**

F = **z** + **w’** + **x’y’**

Μερικώς καθορισμένες συναρτήσεις

Υπάρχουν περιπτώσεις λογικών συναρτήσεων των οποίων η τιμή δεν ορίζεται για όλους τους συνδυασμούς τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **μερικώς** ή ατελώς **ορισμένες** και οι ελαχιστόροι που αντιστοιχούν στους συνδυασμούς τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών για τους οποίους η συνάρτηση δεν έχει καθορισμένη τιμή, ονομάζονται **αδιάφοροι όροι**.
Στον πίνακα αλήθειας και στον πίνακα karnaugh στη θέση τιμής για τους αδιάφορους όρους τοποθετούμε το σύμβολο **X**.
Κατά την ομαδοποίηση γειτονικών κυψελών του πίνακα Karnaugh για την ελαχιστοποίηση μιας λογικής συνάρτησης, μπορούμε να λάβουμε **για κάθε αδιάφορο όρο X λογική τιμή είτε 0, είτε 1,** ανάλογα με το <u>ποια από τις δύο τιμές του μπορεί να μας οδηγήσει στην απλούστερη δυνατή έκφραση της συνάρτησης</u>. Στην συμβολική έκφραση της συνάρτησης ως άθροισμα ελαχιστόρων οι αδιάφοροι όροι συμβολίζονται με το γράμμα **d** και μέσα σε παρενθέσεις οι ελαχιστόροι που δεν έχουν καθορισμένη τιμή.

Για παράδειγμα, η έκφραση **F = Σ(4, 5) + d(0, 1, 2)** δείχνει ότι η συνάρτηση **F** έχει τιμή 1 στους ελαχιστόρους $\mathbf{m_4}$ και $\mathbf{m_5}$, τιμή 0 στους ελαχιστόρους $\mathbf{m_3}$, $\mathbf{m_6}$ και $\mathbf{m_7}$, ενώ για τους ελαχιστόρους $\mathbf{m_0}$, $\mathbf{m_1}$ και $\mathbf{m_2}$ η τιμή της συνάρτησης είναι αδιάφορη (X).

Παράδειγμα 11: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση: **F = Σ(4, 5) + d(0, 1, 2).**

Παράδειγμα 11: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση: **F = Σ(4, 5) + d(0, 1, 2).**

Ο πίνακας αλήθειας και ο πίνακας Karnaugh της συνάρτησης είναι:

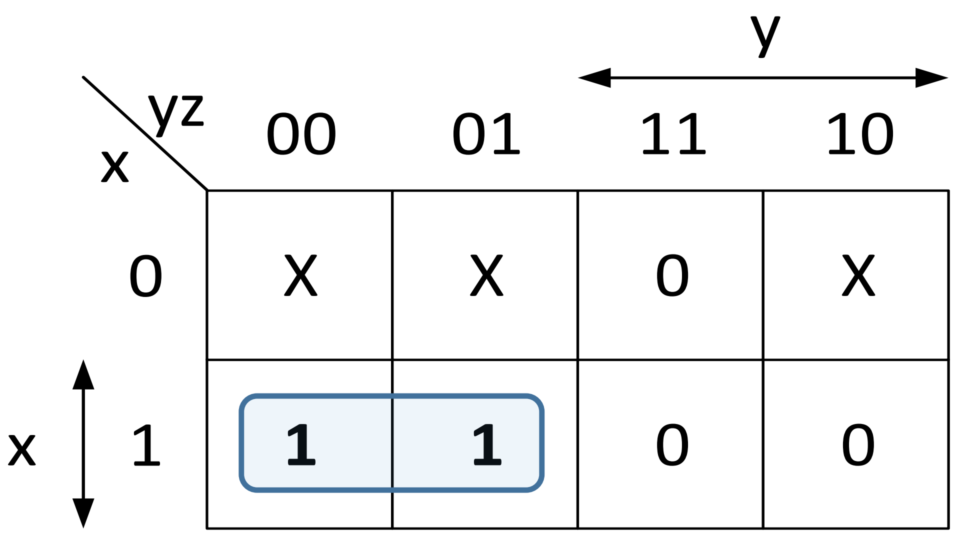
x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	X
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	0
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	0
1	1	1	0

x \ yz	00	01	11	10
0	X	X	0	X
1	**1**	**1**	0	0

Παράδειγμα 11: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση: **F = Σ(4, 5) + d(0, 1, 2).**

Ο πίνακας αλήθειας και ο πίνακας Karnaugh της συνάρτησης είναι:

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**
0	0	0	X
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	0
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	0
1	1	1	0

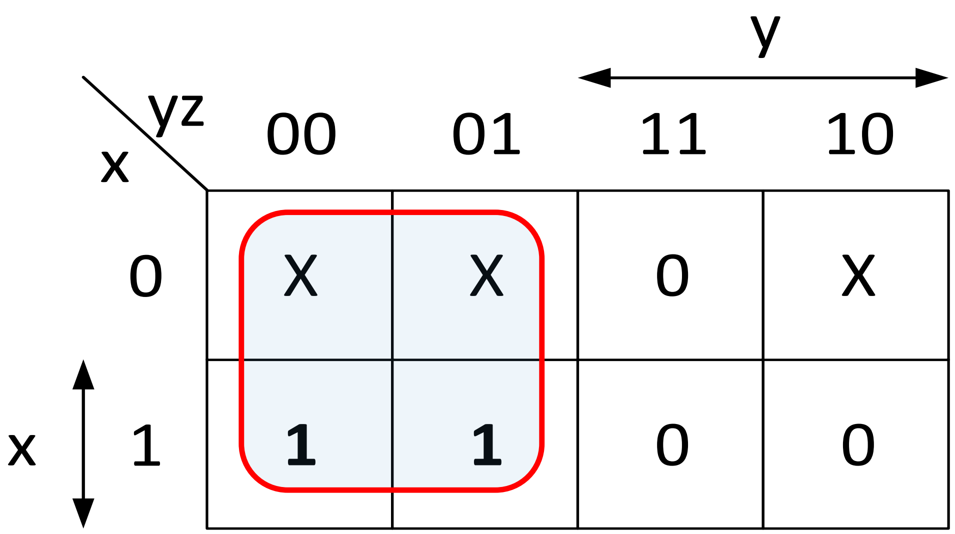


F = xy’

Παράδειγμα 11: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση: **F = Σ(4, 5) + d(0, 1, 2).**

Ο πίνακας αλήθειας και ο πίνακας Karnaugh της συνάρτησης είναι:

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	X
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	0
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	0
1	1	1	0



F = y’

Παράδειγμα 11: Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση: **F = Σ(4, 5) + d(0, 1, 2).**

Ο πίνακας αλήθειας και ο πίνακας Karnaugh της συνάρτησης είναι:

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	X
0	0	1	X
0	1	0	X
0	1	1	0
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	0
1	1	1	0

x \ yz	00	01	11	10
0	X	X	0	X
1	**1**	**1**	0	0

F = y'

<u>ΔΕΝ</u> σχηματίζουμε ομάδα μόνο με αδιάφορους όρους (X) !!!!