03_Δυαδική Λογική, Λογικές Πύλες και Άλγεβρα Boole

Δυαδική Λογική

Στη Μαθηματική Λογική χρησιμοποιούμε τον όρο **λογική πρόταση**, δηλαδή μια έκφραση με αυτοτελές νόημα, που επιδέχεται έναν μόνο χαρακτηρισμό, **αληθής** (true) ή **ψευδής** (false), αποκλείοντας κάθε άλλη περίπτωση.

Οι χαρακτηρισμοί αληθής και ψευδής ονομάζονται **τιμές αλήθειας** της λογικής πρότασης.

Για παράδειγμα, η πρόταση “ο αριθμός 3 είναι περιττός” θα έχει τιμή “αληθής”, ενώ η πρόταση “ο αριθμός 6 είναι περιττός” θα έχει τιμή “ψευδής”.

Επειδή οι απλές λογικές προτάσεις δεν αρκούν πάντα για να εκφράσουμε αυτό που θέλουμε, μπορούμε να συνδέσουμε μεταξύ τους δύο ή περισσότερες προτάσεις, χρησιμοποιώντας **λογικούς συνδέσμους.**

Ετσι, μπορούμε να δημιουργήσουμε καινούργιες, πιο πολύπλοκες προτάσεις, που θα τις αποκαλούμε **σύνθετες προτάσεις.**

Λογικοί σύνδεσμοι θεωρούνται οι εξής εκφράσεις: “**και**”, “**είτε**”, “**ή**”, “αν ..., τότε”, “τότε και μόνο τότε, αν”, “**όχι**” (“δεν”).

Οι διάφοροι τρόποι (συνδυασμοί) με τους οποίους μπορούμε να συνδέσουμε τις απλές λογικές προτάσεις για να δημιουργήσουμε μια σύνθετη πρόταση, αποτελούν τις **λογικές πράξεις** μεταξύ των λογικών προτάσεων.

Η τιμή αληθείας της σύνθετης πρότασης καθορίζεται από τις τιμές αληθείας των απλών προτάσεων που την αποτελούν και, φυσικά, και από τον τρόπο που συνδυάζονται αυτές για να σχηματίσουν τη σύνθετη πρόταση.

Στη Μαθηματική Λογική η μέθοδος που χρησιμοποιούμε περισσότερο για να βρούμε τις λογικές τιμές των σύνθετων προτάσεων είναι η χρήση του πίνακα λογικών τιμών ή **πίνακα αλήθειας**, στον οποίο αναγράφουμε όλες τους δυνατούς συνδυασμούς των λογικών τιμών των προτάσεων που συμμετέχουν στη δημιουργία μιας σύνθετης πρότασης, καθώς και τις λογικές τιμές που λαμβάνει για τον κάθε ένα τέτοιο συνδυασμό η σύνθετη πρόταση.

Σύζευξη (“και”)

Σύζευξη δύο λογικών προτάσεων, έστω **p** και **q**, αποκαλούμε τη λογική πρόταση **“p και q”**, συμβολικά “**p** Λ **q**”, η οποία είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς και ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι ψευδής η σύζευξη δύο, ή και περισσοτέρων, προτάσεων αρκεί να είναι ψευδής μία μόνο από τις λογικές προτάσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει τι γίνεται με τις υπόλοιπες λογικές προτάσεις.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης της σύζευξης (“και”)		
p	**q**	**p** Λ **q**
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

Διάζευξη (“είτε”)
Διάζευξη δύο λογικών προτάσεων, έστω **p** και **q**, αποκαλούμε τη λογική πρόταση **“p είτε q”**, συμβολικά “**p V q**”, η οποία είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι αληθής η διάζευξη δύο, ή και περισσοτέρων, προτάσεων αρκεί να είναι αληθής μία μόνο από τις λογικές προτάσεις, χωρίς να μας ενδιαφέρει τι γίνεται με τις υπόλοιπες λογικές προτάσεις.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης της διάζευξης (“είτε”)		
p	**q**	**p V q**
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

Αποκλειστική Διάζευξη (“ή”)

Αποκλειστική διάζευξη δύο λογικών προτάσεων, έστω **p** και **q**, αποκαλούμε τη λογική πρόταση **“p ή q”**, συμβολικά “**p $\underline{\mathbf{V}}$ q**”, η οποία είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις έχουν την ίδια τιμή αληθείας και αληθής στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις έχουν διαφορετικές τιμές αληθείας. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι αληθής η αποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων πρέπει να είναι αληθής μόνο μία από τις λογικές προτάσεις.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης της αποκλειστικής διάζευξης (“ή”)		
p	**q**	**p $\underline{\mathbf{V}}$ q**
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	False

Άρνηση (“όχι”)

Άρνηση μιας λογικής πρότασης **p** αποκαλούμε την πρόταση **“όχι p”,** συμβολικά “**p’**”, η οποία είναι αληθής στην περίπτωση που η p είναι ψευδής και ψευδής στην περίπτωση που η p είναι αληθής. Οι τιμές αληθείας των λογικών προτάσεων p και p’ είναι πάντα αντίθετες. Η άρνηση διαφέρει από τις άλλες λογικές πράξεις στο ότι είναι μια μονομελής πράξη.

Πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης της άρνησης (“όχι”)	
p	**p’**
False	True
True	False

Η **δυαδική λογική** διέπεται από τη μαθηματική λογική και, πιο σωστά, αποτελεί μια περίπτωση εφαρμογής αυτής.

Στη δυαδική λογική έχουμε **δυαδικές μεταβλητές**, δηλαδή μεταβλητές που μπορούν να πάρουν δύο και μόνο δύο διακριτές τιμές, καθώς και **λογικές πράξεις**.

Οι δύο δυνατές τιμές των δυαδικών μεταβλητών μπορούν να έχουν διάφορα ονόματα, όπως "σωστό" και "λάθος", "αληθής" και "ψευδής", "ναι" και "όχι", "λογικό 1" και "λογικό 0".

Στα ψηφιακά συστήματα χρησιμοποιούμε τον όρο δυαδικό ψηφίο ή bit και ως δυνατές τιμές τα 1 και 0.

Οι λογικές πράξεις που χρησιμοποιούμε στη δυαδική λογική είναι ένα υποσύνολο των λογικών συνδέσμων και, συγκεκριμένα περιλαμβάνουν τη σύζευξη ("και", **AND**), τη διάζευξη ("είτε", **OR**), την αποκλειστική διάζευξη ("ή", Exclusive OR – **XOR**) και την άρνηση ("όχι", **NOT**).

Προς αποφυγή σύγχυσης, να σημειωθεί ότι, επειδή στην αγγλική γλώσσα δεν υπάρχει η λέξη "είτε", χρησιμοποιείται για αυτή τη λογική πράξη ο όρος OR (η οποία όμως μεταφράζεται ως "ή" στην ελληνική γλώσσα). Για τη λογική πράξη της αποκλειστικής διάζευξης δεν χρησιμοποιείται το ελληνικό "ή", αλλά ο περιφραστικός όρος "Exclusive OR" (XOR), ο οποίος αποτελεί ακριβή μετάφραση της ελληνικής ονομασίας της πράξης.

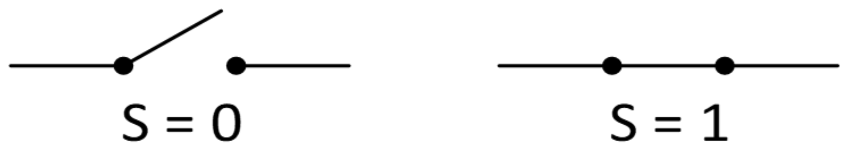
Η δίτιμη άλγεβρα Boole πραγματεύεται **δυαδικές μεταβλητές** και **λογικές πράξεις**, οι οποίες **υλοποιούνται με ηλεκτρονικά κυκλώματα** που ονομάζονται λογικές πύλες, τα κύρια στοιχεία των οποίων είναι τα **τρανζίστορ**.

Κάθε δυαδική μεταβλητή μπορεί να πάρει μία από δύο και μόνο διαφορετικές τιμές, **0** ή **1**.

Υπάρχουν τρεις **βασικές** λογικές πράξεις, **AND**, **OR** και **NOT**, οι οποίες αντιστοιχούν κατά σειρά στις λογικές πράξεις της μαθηματικής λογικής “Σύζευση”, “Διάζευξη” και “Άρνηση”, η σημασία των οποίων θα παρουσιαστεί μέσω απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων διακοπτών.

Το απλούστερο δυαδικό στοιχείο είναι ένας διακόπτης s, που έχει δύο καταστάσεις, ανοιχτός (OFF) και κλειστός (ON).

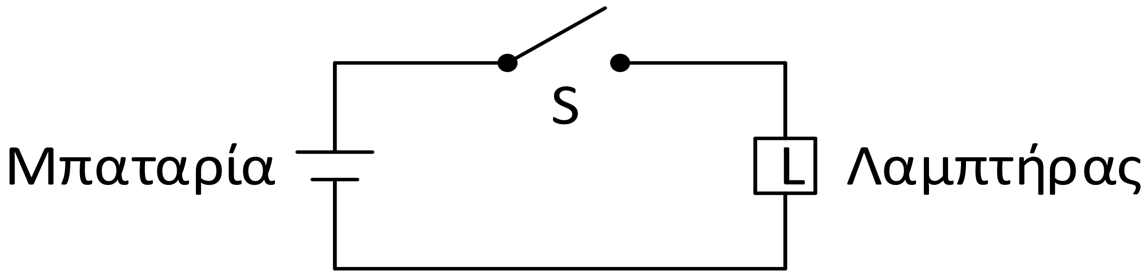
Μπορούμε να θέσουμε S = 0 για την κατάσταση OFF και S = 1 για την κατάσταση ON, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1 Οι δύο καταστάσεις του διακόπτη

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του Σχήματος 3.2 που περιλαμβάνει μια πηγή τροφοδοσίας (π.χ. μια μπαταρία), ένα διακόπτη s και ένα λαμπτήρα L.

Για να να φωτοβολεί ο λαμπτήρας (L = 1), θα πρέπει έχουμε διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει ο διακόπτης να είναι κλειστός (s = 1). Εάν ο διακόπτης είναι ανοικτός (s = 0), ο λαμπτήρας δεν θα φωτοβολεί (L = 0).



Σχήμα 3.2 Έλεγχος φωτοβολίας λαμπτήρα μέσω διακόπτη

Αυτή την εξάρτηση της λειτουργίας του λαμπτήρα L από την κατάσταση του διακόπτη s μπορούμε να την περιγράψουμε μέσω μιας μαθηματικής λογικής έκφρασης:

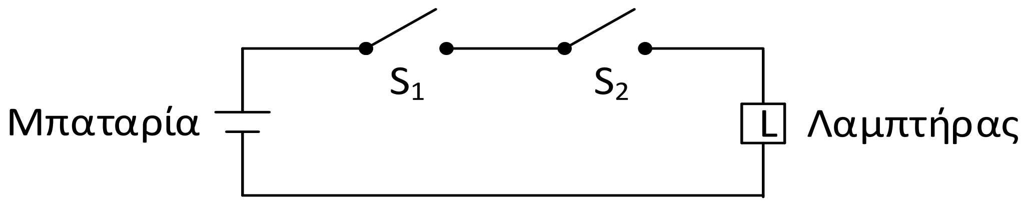
L(s) = s.

Αυτή η λογική έκφραση ονομάζεται **λογική συνάρτηση** και περιγράφει την κατάσταση φωτοβολίας του λαμπτήρα **L (έξοδος ή μεταβλητή εξόδου – εξαρτημένη μεταβλητή)** ως συνάρτηση της κατάστασης του διακόπτη **s (είσοδος ή μεταβλητή εισόδου – ανεξάρτητη μεταβλητή)**.

Ο **πίνακας αλήθειας** αυτής της λογικής συνάρτησης θα είναι ο ακόλουθος.

s	L(s)
0	0
1	1

Εάν οι δύο διακόπτες συνδεθούν σε σειρά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3, τότε θα φωτοβολεί ο λαμπτήρας, μόνο όταν **ΚΑΙ** οι δύο διακόπτες είναι κλειστοί (s_1 = 1 και s_2 = 1). Εάν οποιοσδήποτε διακόπτης είναι ανοικτός (si = 0), ο λαμπτήρας δεν θα φωτοβολεί (L = 0).



Σχήμα 3.3 Λογική πράξη AND (σύνδεση διακοπτών σε σειρά)

Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται με τη **λογική συνάρτηση**:

$$L(s_1, s_2) = s_1 \textbf{ AND } s_2 = s_1 \cdot s_2$$

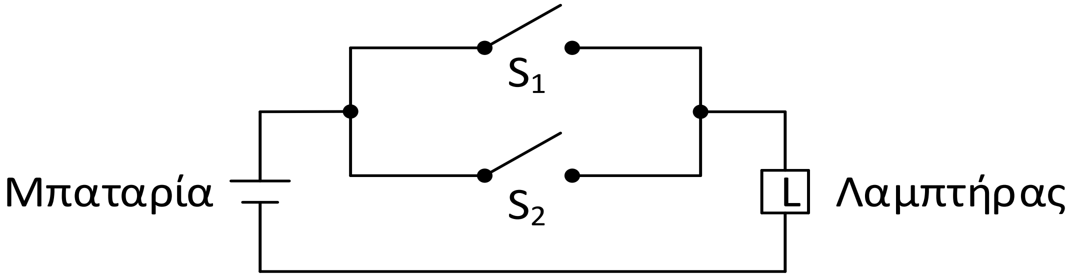
Το σύμβολο (·) ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης AND (ή “λογικού γινόμενου”)

Το κύκλωμα του Σχήματος 3.3 λέγεται ότι υλοποιεί τη λογική πράξη AND.

Ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης AND είναι ο ακόλουθος.

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης AND		
s_1	s_2	$s_1 \cdot s_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Εάν οι δύο διακόπτες συνδεθούν παράλληλα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4, τότε θα φωτοβολεί ο λαμπτήρας (L = 1), εάν είναι κλειστός είτε ο διακόπτης s_1, είτε ο διακόπτης s_2, είτε και οι δύο διακόπτες (s_i = 1).



Σχήμα 3.4 Λογική πράξη OR (παράλληλη σύνδεση διακοπτών)

Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

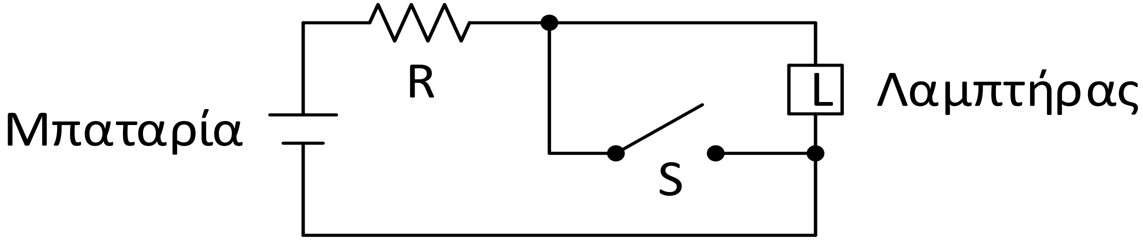
$$L(s_1, s_2) = s_1 \textbf{ OR } s_2 = s_1 + s_2$$

Το σύμβολο (+) ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης OR (ή “λογικής πρόσθεσης”) και το κύκλωμα του Σχήματος 3.4 λέγεται ότι υλοποιεί τη λογική πράξη OR.

Ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης OR είναι ο ακόλουθος.

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης OR		
s_1	s_2	$s_1 + s_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζεται ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που υλοποιεί τη λογική πράξη **NOT**. Στην περίπτωση αυτή ο διακόπτης s συνδέεται παράλληλα με τον λαμπτήρα L.



Σχήμα 3.5 Λογική πράξη NOT

Εάν κλείσει ο διακόπτης (s = 1) θα βραχυκυκλωθεί ο λαμπτήρας και δεν θα διαρρέεται από ρεύμα, οπότε δεν θα φωτοβολεί (L = 0).

Παρατηρούμε ότι στο κύκλωμα έχει προστεθεί μια ηλεκτρική αντίσταση ώστε να διασφαλιστεί ότι το κλείσιμο του διακόπτη δεν θα βραχυκυκλώσει την πηγής τροφοδοσίας. Αντίθετα, εάν ο διακόπτης είναι ανοικτός (s = 0), το ρεύμα θα διοχετευθεί μέσω του λαμπτήρα, ο οποίος θα φωτοβολεί (L = 1).

Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

L(s) = **NOT(**s) = s**’**

Το σύμβολο (**’**) ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης NOT (ή «λογικής άρνησης» ή «αντιστροφής» ή «συμπλήρωμα»).

Ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης NOT είναι ο ακόλουθος.

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης NOT	
s	s**’**
0	1
1	0

Οι λογικές πράξεις AND και OR μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση n ανεξάρτητων μεταβλητών. Ειδικότερα, η πράξη AND στις μεταβλητές x_1, x_2, … x_n δίνει αποτέλεσμα 1 μόνο όταν όλες οι μεταβλητές έχουν τιμή 1. Αντίστοιχα, η πράξη OR στις μεταβλητές x_1, x_2, … x_n δίνει αποτέλεσμα 1, εάν τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές έχει τιμή 1. Στον παρακάτω πίνακα αλήθειας παρουσιάζονται οι πράξεις AND και OR για τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 + x_2 + x_3$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Η λογική πράξη NOT μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε μια μεταβλητή, είτε σε **λογικές συναρτήσεις**.

Για παράδειγμα, εάν είναι:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

τότε το «συμπλήρωμα» της f (δηλαδή NOT(f), f**’**) θα είναι:

$$f'(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)'$$

Τέλος να σημειωθεί ότι, μπορεί να έχουμε λογικές συναρτήσεις που προκύπτουν με σύνθεση άλλων λογικών συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) + (x_2 \cdot x_3) = x_1 + x_2 + x_2 \cdot x_3$$

Μια **λογική συνάρτηση** περιγράφεται από μια αλγεβρική έκφραση που περιλαμβάνει:

- δυαδικές μεταβλητές,
- τις σταθερές 0 και 1,
- τους τελεστές των λογικών πράξεων,
- παρενθέσεις και αγκύλες

και <u>εκφράζει τη λογική σχέση ανάμεσα σε μια εξαρτημένη δυαδική μεταβλητή και έναν αριθμό ανεξάρτητων δυαδικών μεταβλητών</u>.

Οι τιμές που μπορεί να πάρει η λογική συνάρτηση (δηλαδή η εξαρτημένη μεταβλητή) προσδιορίζονται με τον υπολογισμό της τιμής της αλγεβρικής έκφρασης για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών και αποτυπώνονται στον πίνακα αλήθειας της λογικής συνάρτησης, όπως ήδη έχουμε δει.

Λογικές πύλες

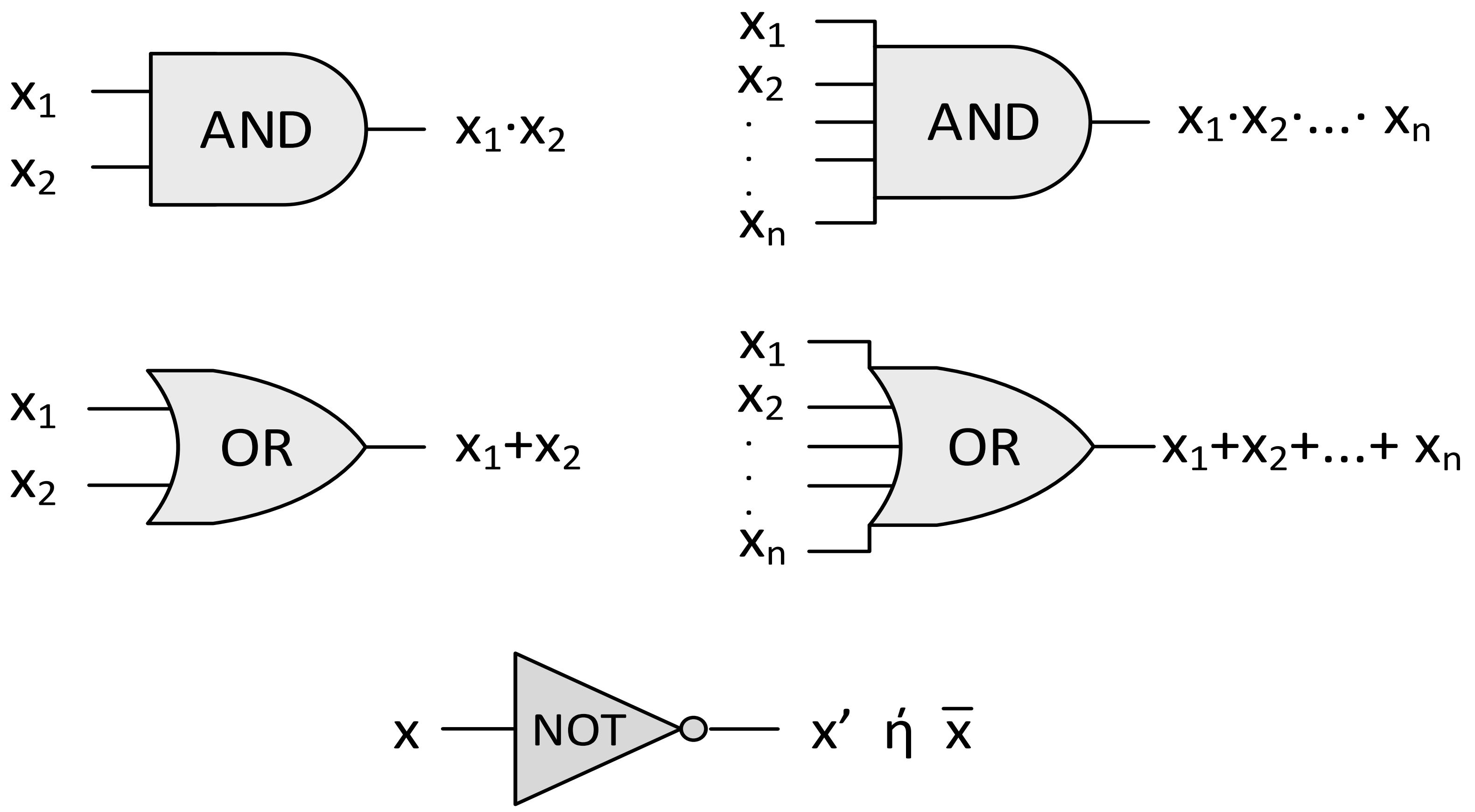
Οι τρεις βασικές λογικές πράξεις που περιγράφτηκαν στην προηγούμενη ενότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη σύνθεση λογικών συναρτήσεων οποιουδήποτε βαθμού πολυπλοκότητας, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να απαιτεί πολλές από αυτές τις λογικές πράξεις για να υλοποιηθεί.

Κάθε λογική πράξη μπορεί να υλοποιηθεί σε επίπεδο ηλεκτρονικού κυκλώματος με τρανζίστορς, οπότε προκύπτει ένα στοιχείο κυκλώματος που ονομάζεται **λογική πύλη** (logic gate).

Μια λογική πύλη μπορεί να έχει μία ή περισσότερες εισόδους και μια έξοδο, που είναι συνάρτηση των εισόδων της. Οι **είσοδοι** αντιστοιχούν στις **ανεξάρτητες μεταβλητές**, ενώ η **έξοδος** είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Η απεικόνιση ενός ηλεκτρονικού κυκλώματος που υλοποιεί μία ή περισσότερες λογικές συναρτήσεις, γίνεται με τη σχεδίαση του λογικού κυκλώματος, το οποίο αποτελείται από κατάλληλα συνδεμένα γραφικά σύμβολα που παριστάνουν τις λογικές πύλες.

Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζονται τα γραφικά σύμβολα των λογικών πυλών **AND** και **OR** με δύο και περισσότερες εισόδους, καθώς και το σύμβολο της λογικής πύλης **NOT** (η οποία έχει πάντα μία είσοδο).



Σχήμα 3.6 Οι βασικές πύλες

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, η λογική πράξη NOT μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε μια μεταβλητή, είτε σε λογικές συναρτήσεις, καθώς και ότι, μπορεί να έχουμε λογικές συναρτήσεις που προκύπτουν με σύνθεση άλλων λογικών συναρτήσεων.

Εκτός από τις τρεις βασικές λογικές πύλες, υπάρχουν και άλλες πύλες, οι οποίες <u>συντίθενται από βασικές πύλες</u> και για το λόγο αυτό ονομάζονται **παράγωγες λογικές πύλες** και είναι οι λογικές πύλες **XOR**, **NAND**, **NOR** και **XNOR**.

Η λογική πύλη **XOR** (Exclusive OR, αποκλειστικό ή) υλοποιεί τη λογική συνάρτηση της αποκλειστικής διάζευξης της μαθηματικής λογικής, σύμφωνα με την οποία, για να είναι αληθής η αποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων πρέπει να είναι αληθής μία και μόνο μία από τις λογικές προτάσεις.

Στη δυαδική λογική αυτό ισοδυναμεί με τη συνθήκη ότι <u>για να έχει τιμή 1</u> η λογική πράξη XOR μεταξύ δύο μεταβλητών, πρέπει <u>**μία και μόνο μία** ανεξάρτητη μεταβλητή να έχει τιμή 1.</u>

Η συμπεριφορά αυτή, για δύο μεταβλητές, εκφράζεται με τη λογική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \textbf{ XOR } x_2 = x_1 \oplus x_2$$

Το σύμβολο ($\oplus$) ονομάζεται τελεστής της λογικής πράξης XOR (ή "λογικού αποκλειστικού ή") και ο πίνακας αλήθειας της λογικής πράξης XOR είναι ο ακόλουθος.

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης XOR δύο μεταβλητών		
$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_1 \oplus x_2}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Για περισσότερες από δύο εισόδους, η έξοδος μιας πύλης XOR λαμβάνει λογική τιμή 1**, όταν περιττός αριθμός εισόδων λαμβάνει τιμή 1**, και λογική τιμή 0, όταν άρτιος αριθμός εισόδων λαμβάνει τιμή 1, όπως παρουσιάζεται στον πίνακα αλήθειας που ακολουθεί.

Πίνακας αλήθειας λογικής πράξης XOR τριών μεταβλητών			
x_1	x_2	x_3	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

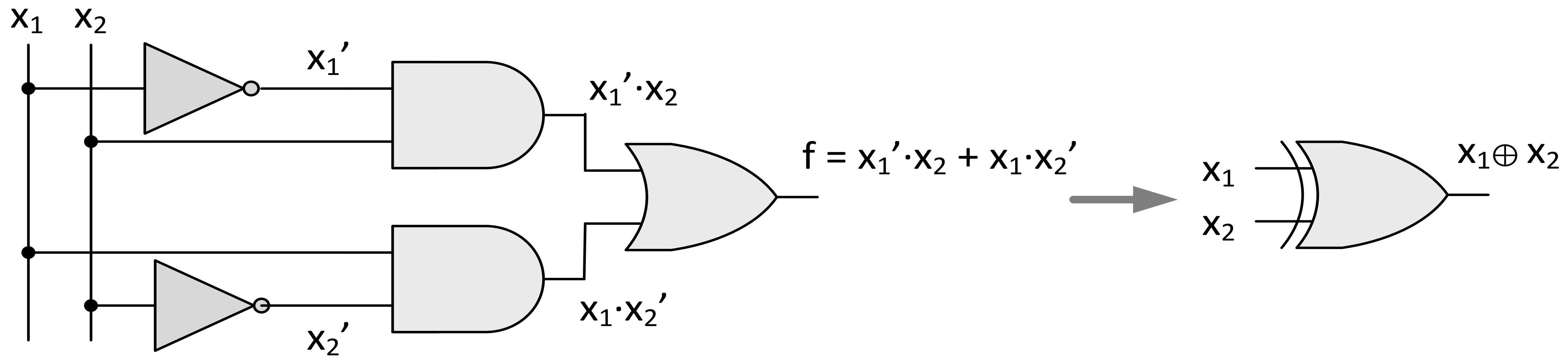
Η λογική πράξη XOR μπορεί να υλοποιηθεί με τη σύνθεση των λογικών πράξεων AND, OR και NOT, σύμφωνα με τη λογική συνάρτηση:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = x_1' \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2'$$

Η απόδειξη της ισχύος αυτής της λογικής συνάρτησης μπορεί να γίνει με τη χρήση πινάκων αλήθειας. Συγκεκριμένα, προσδιορίζουμε τον πίνακα αλήθειας για κάθε λογικό γινόμενο του δεύτερου μέρους της λογικής συνάρτησης και, στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τον πίνακα αλήθειας του λογικού αθροίσματος των δύο επιμέρους λογικών γινομένων:

x_1	x_2	x_1'	x_2'	$x_1' \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_2'$	$x_1' \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2'$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

Το λογικό κύκλωμα με βασικές-μόνο λογικές πύλες, που υλοποιεί τη λογική πράξη XOR, καθώς και το γραφικό σύμβολο της παράγωγης λογικής πύλης XOR παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.7.

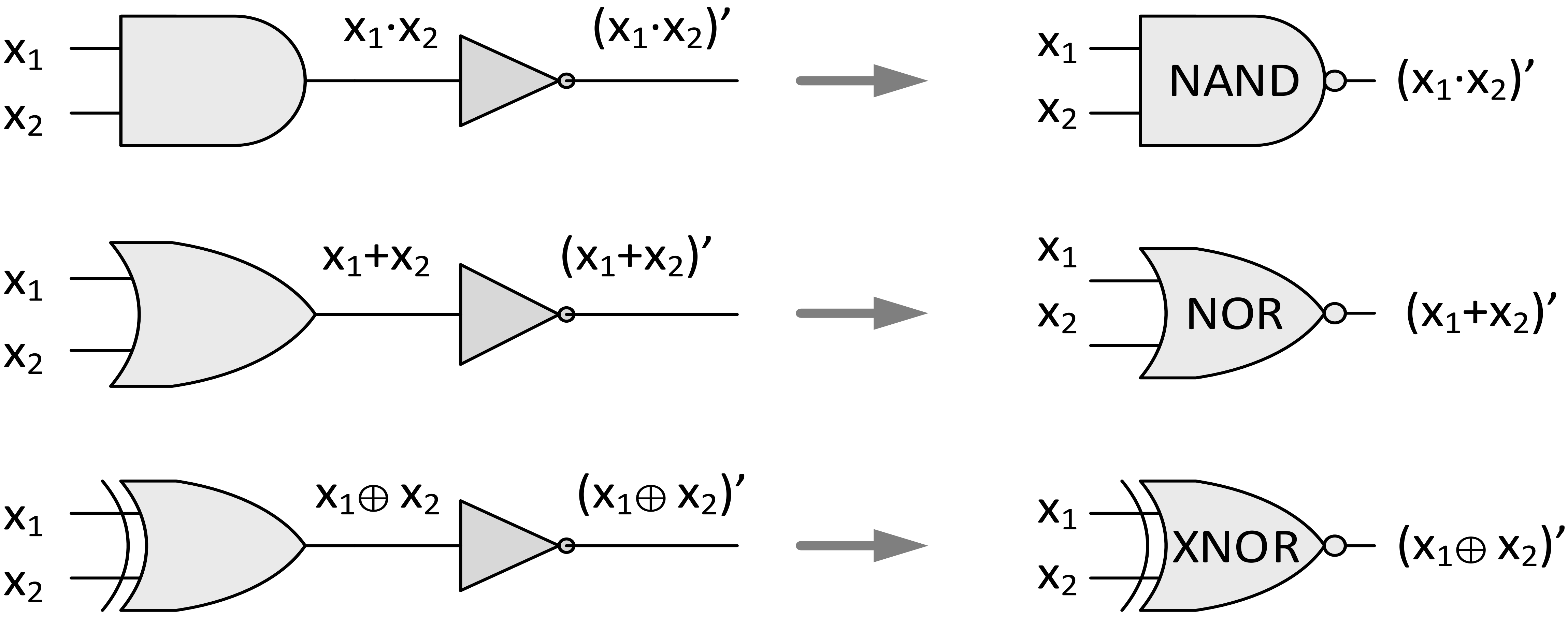


Σχήμα 3.7 Υλοποίηση πύλης XOR με βασικές-μόνο πύλες και το γραφικό σύμβολο της πύλης XOR

Από τον πίνακα αλήθειας της λογικής πύλης XOR μπορούμε να πούμε ότι αυτή η πύλη “**αναγνωρίζει**” (δηλαδή η έξοδος ισούται με 1) **τη διαφορετικότητα** των τιμών των εισόδων, αφού η έξοδός της:

- ισούται με 1 μόνο όταν οι είσοδοί της λαμβάνουν διαφορετικές λογικές τιμές (0 και 1 ή 1 και 0), ενώ,
- ισούται με 0 όταν οι είσοδοί της λαμβάνουν την ίδια τιμή (και οι δύο τιμή 0 ή και οι δύο τιμή 1).

Οι άλλες τρεις παράγωγες λογικές πύλες, NAND, NOR και XNOR, προκύπτουν από τη σύνθεση των λογικών πυλών AND, OR και XOR με τη λογική πύλη NOT και, συγκεκριμένα, με τη σύνδεση μιας λογικής πύλης NOT στην έξοδο κάθε μιας λογικής πύλης AND, OR και XOR αντίστοιχα, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8 Οι παράγωγες πύλες NAND, NOR και XNOR

Ο συγκεντρωτικός πίνακες αλήθειας για όλες τις λογικές πράξεις (βασικές και παράγωγες) μεταξύ δύο μεταβλητών είναι ο ακόλουθος:

Πίνακες αλήθειας δύο μεταβλητών							
x	**y**	**x•y**	**(x•y)’**	**x+y**	**(x+y)’**	**x⊕y**	**(x⊕y)’**
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Η λογική πύλη NAND παράγει ως έξοδο το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης AND, δηλαδή, η έξοδος της πύλης NAND ισούται με 1, όταν τουλάχιστον μία από τις δύο εισόδους της λαμβάνει λογική τιμή 0, διαφορετικά η έξοδός της ισούται με 0.

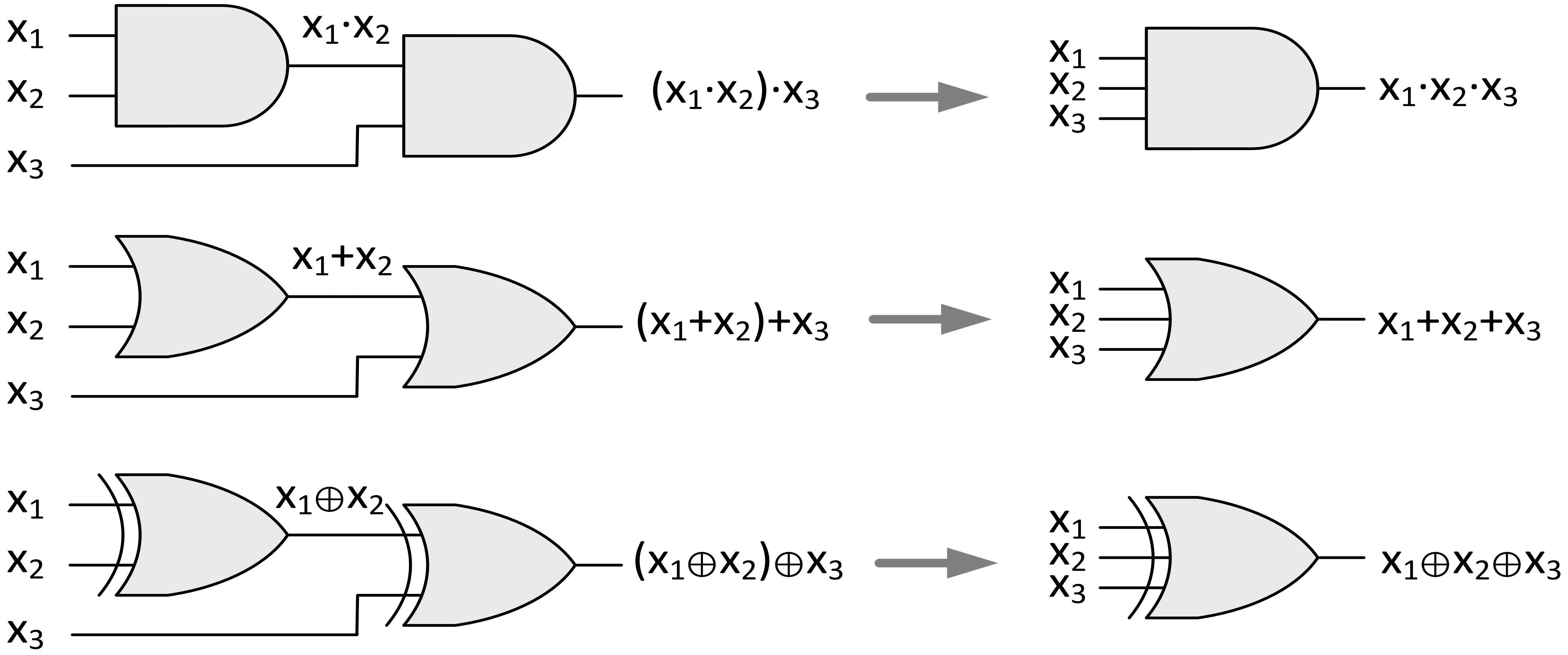
Η λογική πύλη NOR παράγει ως έξοδο το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης OR, δηλαδή, η έξοδος της πύλης NOR ισούται με 0, όταν τουλάχιστον μία από τις δύο εισόδους της λαμβάνει λογική τιμή 1, ενώ όταν και οι δύο είσοδοί της λαμβάνουν τιμή 0, η έξοδος της πύλης λαμβάνει τιμή 1.

Η λογική πύλη XNOR παράγει ως έξοδο το συμπλήρωμα της εξόδου της πύλης XOR, δηλαδή, η έξοδος της πύλης XNOR ισούται με 1, όταν και οι δύο είσοδοί της λαμβάνουν την ίδια τιμή (και οι δύο τιμή 0 ή και οι δύο τιμή 1), ενώ όταν οι δύο είσοδοί της λαμβάνουν διαφορετική τιμή (0 και 1 ή 1 και 0), η έξοδος της πύλης ισούται με 0. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι αυτή η πύλη **“αναγνωρίζει” την ισότητα των τιμών των εισόδων**. Επομένως, η λογική πύλη XNOR υλοποιεί τη λογική συνάρτηση της **ισοδυναμίας**.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο συγκεντρωτικός πίνακες αλήθειας για όλες τις λογικές πράξεις (βασικές και παράγωγες) μεταξύ τριών μεταβλητών.

Πίνακες αλήθειας τριών μεταβλητών								
x	**y**	**z**	**x•y•z**	**(x•y•z)’**	**x+y+z**	**(x+y+z)’**	**x⊕y⊕z**	**(x⊕y⊕z)’**
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0

Οι λογικές πύλες AND, OR και XOR τριών οι περισσότερων εισόδων μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση πυλών AND, OR και XOR δύο εισόδων, με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9   Σύνθεση πυλών 3 εισόδων με πύλες δύο εισόδων

Όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια, που θα εξετάσουμε τη δίτιμη άλγεβρα Boole που διέπει τη δυαδική λογική και τις ιδιότητες αυτής, αυτό είναι εφικτό επειδή, για τις λογικές πράξεις AND, OR και XOR ισχύουν η αντιμεταθετική και προσεταιριστική ιδιότητα.

Αντίθετα, αυτό δεν ισχύει για τις λογικές πύλες NAND, NOR και XNOR με τρεις ή περισσότερες εισόδους, οι οποίες δεν μπορούν να υλοποιηθούν με τη χρήση πυλών NAND, NOR και XNOR δύο εισόδων, επειδή δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή η προσεταιριστική ιδιότητα.

x	y	z	(x·y·z)’	[(x·y)’·z]’
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1