Ηλεκτρομαγνητισμός
Διάλεξη 01

Α. Δροσόπουλος

11 Οκτωβρίου 2020

Outline

Topic

Περίγραμμα Μαθήματος ECE-K360 από οδηγό σπουδών

Προπτυχιακό

Εξάμηνο σπουδών Γ (2ο έτος)

Εβδομαδιαίες ώρες διδασκαλίας: 3Θ+1Φ = 4

Περιγραφή

Το μάθημα Ηλεκτρομαγνητισμός διαπραγματεύεται τις θεμελιώδεις γνώσεις Ηλεκτρισμού και Μαγνητισμού πάνω στις οποίες στηρίζεται η ειδικότητα του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού. Χρησιμοποιούνται μαθηματικά καταλλήλου επιπέδου για την υποστήριξη σύνθετων μοντέλων στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων της ειδικότητας.

Με την επιτυχή ολοκλήρωση του μαθήματος ο φοιτητής / τρια είναι σε θέση να:

- Έχει κατανοήσει σε βάθος τις έννοιες του ηλεκτρικού φορτίου και των πεδίων που δημιουργεί.
- Τη σχέση ηλεκτρομαγνητισμού και κυκλωματικής θεωρίας.
- Έχει γνώση της μεθοδολογίας, των εργαλείων και των τεχνικών που χρησιμοποιούνται στην επίλυση απλών και συνθέτων προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού και εφαρμογών του.

Περιεχόμενο (wip)

Ενότητα 1 Διαλέξεις 1-2. Μαθηματικό υπόβαθρο. Φορτίο και βαθμωτά / διανυσματικά πεδία που δημιουργεί. Στοιχεία διανυσματικής ανάλυσης, συστήματα συντεταγμένων, βάθμωση, απόκλιση, στροβιλισμός, Θεωρήματα Gauss, Stokes, Helmholtz.

Ενότητα 2 Διαλέξεις 3-4. Ηλεκτροστατικά πεδία. Νόμος Coulomb, Gauss, πεδίο δυναμικού και ηλεκτροστατικό πεδίο. Μέθοδοι υπολογισμού.

Ενότητα 3 Διάλεξη 5. Ηλεκτρικά πεδία στη ύλη. Χωρητικότητα και διηλεκτρικά. Πόλωση, εξισώσεις Poisson - Laplace στα διηλεκτρικά.

Ενότητα 4 Διάλεξη 6. Μαγνητικό πεδίο. Νόμος επαγωγής Faraday,

Ενότητα 5 Διαλέξεις 7-8. Εξισώσεις Maxwell και ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Σκέδαση, διάθλαση (scattering, diffraction). Εφαρμογές.

Ενότητα 6 Διαλέξεις 9-10. Χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία. Ενέργεια και ροή ισχύος - Θεώρημα Poynting.

Ενότητα 7 Διαλέξεις 11-12. Αρμονική χρονική εξάρτηση. Στιγμιαία τιμή και μιγαδική παράσταση. Εξισώσεις Helmholtz.

Ενότητα 8 Διάλεξη 13. Μετάδοση, ανάκλαση και διάθλαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Τρόπος διδασκαλίας και αξιολόγηση

Σύγχρονος και ασύγχρονος. Θα αναρτώνται video διαλέξεων και θα δίδεται το link στο eclass. Θα υπάρχει διαθέσιμη ώρα για σύγχρονη επαφή όπου θα μπορείτε να εκφράσετε τις απορίες σας.

Ανάλογα με τις δυνατότητες του νέου eclass, σκέπτομαι για εβδομαδιαίες ασκήσεις με απαντήσεις πολ/πλής επιλογής και αυτόματη βαθμολογία. Θα αποτελεί το 30% του τελικού βαθμού σας.

Τελική γραπτή εξέταση με συντελεστή βαρύτητας 70%.

Συνολικός βαθμός = (βαθμός γραπτής εξέτασης) x 0.7 + (βαθμός ασκήσεων) x 0.3

Συγγράμματα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ (ΣΕ ΕΝΑΝ ΤΟΜΟ)
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 22691598
Έκδοση: 1η/2012
Συγγραφείς: GRIFFITHS J. DAVID
Διαθέτης (Εκδότης):
ΙΔΡΥΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΕΡΕΥΝΑΣ-ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Ηλεκτρομαγνητισμός
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 18549028
Έκδοση: 5η Έκδοση/2011
Συγγραφείς: Kraus John D.
Διαθέτης (Εκδότης): ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.

Εφαρμοσμένος Ηλεκτρομαγνητισμός
Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 14826
Έκδοση: 3η έκδ./2007
Συγγραφείς: Shen Liang Chi, Kong Jin Au
Διαθέτης (Εκδότης): ΣΤΕΛΛΑ ΠΑΡΙΚΟΥ & ΣΙΑ ΟΕ

Topic

Εισαγωγικά 1

Κλασσικός Ηλεκτρομαγνητισμός συμπεριλαμβάνει στατικό ηλεκτρομαγνητισμό, χρονικώς σταθερά και μη ρεύματα, χρονικώς μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, παραγωγή και διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κυματοδηγούς, μαγνητοϋδροδυναμική, κ.α. Κβάντωση και σταθερά Planck άγνωστα.

Βασίζεται στις εξισώσεις Maxwell που συνδέουν ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο με πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου και ηλεκτρικού ρεύματος στα οποία οφείλονται. Εμπεριέχεται η αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου καθώς και η ανυπαρξία μεμονομένων μαγνητικών πόλων. Μαζί με την εξίσωση Lorentz η οποία παρέχει τη δύναμη σε φορτίο συναρτήσει των εντάσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο που βρίσκεται το φορτίο και της ταχύτητάς του, αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων βάσει των οποίων μπορούμε κατ' αρχήν να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα Κλασσικού Ηλεκτρομαγνητισμού.

Εάν προσθέσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση Μηχανικής (μεταβολή ορμής συναρτήσει δύναμης) και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, έχουμε το σύνολο των νόμων στους οποίους θεμελιώνεται η κλασσική φυσική. Μαζί με τα τρία θερμοδυναμικά αξιώματα αποτελούσαν το φάσμα των γνώσεων της φυσικής μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα.

Εισαγωγικά 2

Το 1905 ο Einstein με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας διεύρυνε την Νευτώνεια Μηχανική προκειμένου να περιγράψει σωματίδια κινούμενα με μεγάλες ταχύτητες. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell χρησιμοποιήθηκε από τον Einstein στην ανάπτυξη της θεωρίας της Σχετικότητας και δεν τροποποιήθηκε από αυτήν.

Το 1901 αρχίζει η εποχή της κβαντικής φυσικής με τον Planck (ακτινοβολία μέλανος σώματος, κβάντωση ενέργειας, εισαγωγή έννοιας του φωτονίου). Οι τροποποιήσεις που επιφέρει η κβαντική θεωρία στον ηλεκτρομαγνητισμό είναι επουσιώδεις ακόμα και για αποστάσεις της τάξεως 10^{-12} m (100 φορές μικρότερες των διαστάσεων των ατόμων). Μπορούμε να περιγράψουμε τις δυνάμεις ηλεκτρονίου - πυρήνα στο άτομο με τους ίδιους νόμους που χρησιμοποιούμε στο μακρόκοσμο για φορτισμένα σώματα.

Ακολουθεί το 1924 το αξίωμα de Broglie περί δυϊσμού σωματιδίου-κύματος που οδηγεί το 1927 στην αρχή αβεβαιότητας Heisenberg και θεμελιώνεται η Κβαντομηχανική. Κλασσικά μεγέθη όπως μήκος, ορμή, ενέργεια αντικαθίστανται από τελεστές με ιδιότητες που είναι μετρήσιμες ποσότητες (πρώτη κβάντωση). Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell παραμένει ως έχει.

Εισαγωγικά 3

Αναθεώρηση και επέκταση της Κλασσικής Ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας έχουμε με τη δεύτερη κβάντωση (κβάντωση πεδίου) που αποτελεί αντικείμενο της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής. Φαινόμενα όπως σκέδαση φωτονίων, κβαντική διεμπλοκή (quantum entanglement) και αλληλεπιδράσεις φωτονίων με κβαντική ύλη χρειάζονται Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (Quantum Electrodynamics, QED). Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell καθίσταται πια το κλασσικό όριο της QED.

Συμπέρασμα: Διαφορές από τον κλασσικό ηλεκτρομαγνητισμό έχουμε μόνο σε πολύ ισχυρά πεδία ή σε πολύ μικρές αποστάσεις. Η θεωρία «κρατάει» πολύ καλά στο να μπορούμε να περιγράψουμε μακροσκοπικά οτιδήποτε ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα αντιμετωπίζουμε στην καθημερινή μας ζωή και να κατασκευάσουμε ηλεκτρικές συσκευές/στοιχεία/συστήματα με επιθυμητές ιδιότητες.

Τι είναι Ηλεκτρομαγνητισμός

Ηλεκτρομαγνητισμός είναι ο κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων και των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται από αυτά. Συνδέει όλα τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται ένας Ηλεκτρολόγος Μηχανικός.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ ΕΙΝΑΙ:

- Φορτία, μαγνήτες, ηλεκτρικές μηχανές, ηλεκτρική ενέργεια, μετασχηματιστές
- Ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ραδιοφωνία, τηλεόραση, επικοινωνίες, κινητή τηλεφωνία, φως
- Βιολογικά ηλεκτρικά σήματα, ηλεκτρικά διαγνωστικά συστήματα

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ: Ηχητικά κύματα, Ταλαντώσεις, Βαρύτητα

ΕΙΝΑΙ μια από τις 4 θεμελιώδεις δυνάμεις στο σύμπαν:

- Ηλεκτρομαγνητισμός
- Βαρύτητα
- Ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις
- Ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις

Τι θα καλύψουμε

Επισκόπηση διανυσματικού λογισμού. Η διανυσματική ανάλυση είναι το μαθηματικό εργαλείο που εκφράζουμε με τον καλύτερο τρόπο τις έννοιες του ηλεκτρομαγνητισμού. Αποφυγή παρενθέσεων στο μάθημα για γνώσεις υποβάθρου. Πλήρη κατανόηση (όχι αποστήθιση) για αποφυγή προβλημάτων κατόπιν. Λύση ασκήσεων. Διαγράμματα. Λογισμικό για πράξεις και γραφήματα.

Κλασσικός Ηλεκτρομαγνητισμός, ηλεκτροστατική, μαγνητοστατική, ηλεκτροδυναμική, εφαρμογές

Εξισώσεις Maxwell

	Integral Form	Differential Form	Name
Time-Domain	$Q_e(t)=\oiint_S \vec{D}(t)\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v(t)\,dv$	$\nabla\bullet\vec{D}(t)=\rho_v(t)$	Gauss' Law
	$\oiint_S \vec{B}(t)\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}(t)=0$	No Magnetic Charge
	$V_{emf}(t)=\oint_L \vec{E}(t)\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}(t)=-\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}$	Faraday's Law
	$I(t)=\oint_L \vec{H}(t)\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}(t)=\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}$	Ampere's Circuit Law
	$\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-\frac{\partial Q_e}{\partial t}$	$\nabla\bullet\vec{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$	Continuity of Current
	$\vec{D}(t)=\left[\varepsilon(t)\right]*\vec{E}(t)$ Electric Response $\vec{B}(t)=\left[\mu(t)\right]*\vec{H}(t)$ Magnetic Response		Constitutive Relations
Frequency-Domain	$Q_e=\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{s}=\iiint_V \rho_v\,dv$	$\nabla\bullet\vec{D}=\rho_v$	Gauss' Law
	$\oiint_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=0$	$\nabla\bullet\vec{B}=0$	No Magnetic Charge
	$V_{emf}=\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{\ell}=-\iint_S\left[j\omega\vec{B}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$	Faraday's Law
	$I=\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{\ell}=\iint_S\left[\vec{J}+j\omega\vec{D}\right]\bullet d\vec{s}$	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$	Ampere's Circuit Law
	$\oiint_S \vec{J}\bullet d\vec{s}=-j\omega Q_e$	$\nabla\bullet\vec{J}=-j\omega\rho_v$	Continuity of Current
	$\vec{D}=\left[\varepsilon\right]\vec{E}$ Electric Response $\vec{B}=\left[\mu\right]\vec{H}$ Magnetic Response		Constitutive Relations

Parameter Definitions

Electric Field Intensity, E (V/m)
Electric Flux Density, D (C/m^2)
Magnetic Field Intensity, H (A/m)
Magnetic Flux Density, B (Wb/m^2)
Electric Current Density, J (A/m^2)
Volume Charge Density, ρ_v (C/m^3)
Permittivity, ε (F/m)
Permeability, μ (H/m)
Electrical Conductivity, σ (1/$\Omega\cdot$m)

Constants

Permittivity: $[\varepsilon]=\varepsilon_0[\varepsilon_r]$

$\varepsilon_0=8.8541878176\times10^{-12}$ (F/m)

Permeability: $[\mu]=\mu_0[\mu_r]$

$\mu_0\approx 4\pi\times10^{-7}$ (H/m)

$\mu_0=1.2566370614\times10^{-6}$ (H/m)

Impedance: $\eta_0\approx120\pi$ (Ω)

$\eta_0=376.73031346177$ (Ω)

Speed of Light: $c_0=299,792,458$ (m/s)

Lorentz Force Law

$\vec{F}=q\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$

Sign Convention

e^{-jkz} For propagation in the +z direction.

Topic

Φάσορες

Μια αρμονική (ημιτονοειδής) συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

Με την ταυτότητα Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

μπορούμε να γράψουμε την αρμονική συνάρτηση σαν

$$y(t) = \mathfrak{Re}\big[Ae^{j(\omega t+\theta)}\big] = \mathfrak{Re}\big[Ae^{j\omega t}e^{j\theta}\big]$$

Σε γραμμικά προβλήματα η συχνότητα ω είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει σταθερό όρο $e^{j\omega t}$ που παραλείπεται όταν έχουμε αρμονικές συναρτήσεις. Οπότε:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longleftrightarrow Y = Ae^{j\theta} = A\underline{/\theta}$$

Μια χρήσιμη επισκόπηση έννοιας φάσορα βρίσκεται στο link phasor.

Πολική και καρτεσιανή μορφή

$$Y = a + jb = A\underline{/\theta}$$

όπου

καρτεσιανή σε πολική	πολική σε καρτεσιανή
$A = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a = A\cos\theta$
$\theta = \tan^{-1}(b/a)$	$b = A\sin\theta$

Άλγεβρα φασόρων

$$F_1 = a_1 + jb_1 = A_1 \underline{/\theta_1}$$

$$F_2 = a_2 + jb_2 = A_2 \underline{/\theta_2}$$

πρόσθεση: $F_1 + F_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

αφαίρεση: $F_1 - F_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

πολλαπλασιασμός: $F_1 \cdot F_2 = (A_1 \cdot A_2) \underline{/\theta_1 + \theta_2}$

διαίρεση: $F_1 / F_2 = (A_1 / A_2) \underline{/\theta_1 - \theta_2}$

παραγώγιση: $\dfrac{dF}{dt} = j\omega F$

ολοκλήρωση: $\displaystyle\int F dt = \frac{1}{j\omega} F = -(j/\omega) F$

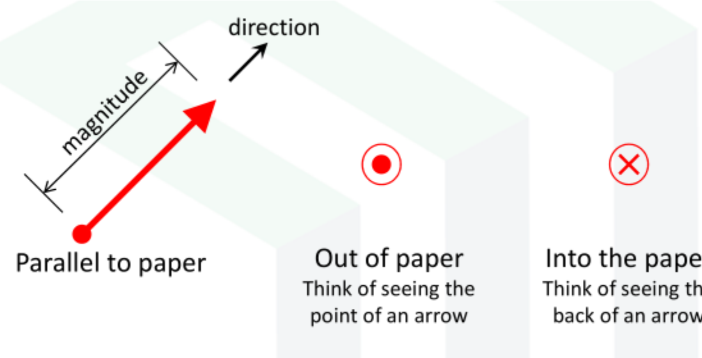
Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Ένα βαθμωτό (μονόμετρο) μέγεθος χαρακτηρίζεται πλήρως μόνο από το μέτρο του, κάποια τιμή που μπορεί να είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Οι φάσορες είναι βαθμωτά μεγέθη. Παραδείγματα: 7, π, -1.345, $98.2 + j4.6$. Μάζα, απόσταση, θερμοκρασία, τάση, κ.α.

Ένα διανυσματικό μέγεθος εκτός από το μέτρο του διαθέτει και κατεύθυνση. Παραδείγματα: ταχύτητα, δύναμη, ηλεκτρομαγνητικά πεδία, ορμή, μετατόπιση.

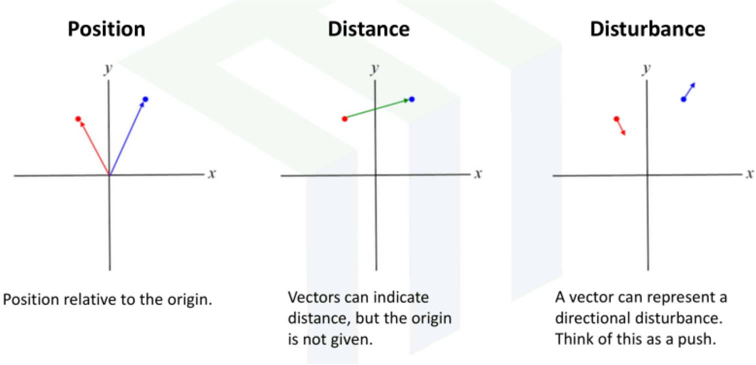
Υπάρχουν και άλλα φυσικά μεγέθη, οι τανυστές (tensors). Τα βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη είναι υποπερίπτωσή τους.

Σκίτσο διανύσματος



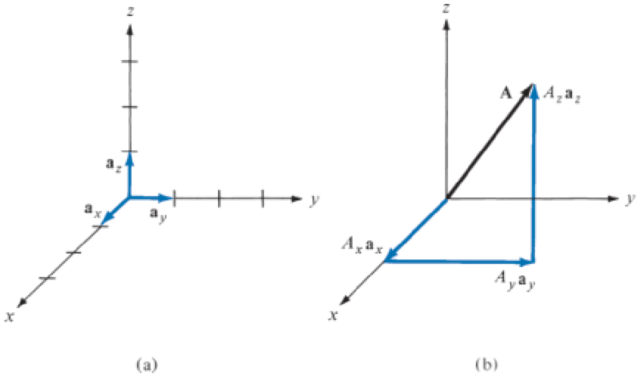
Σχήμα: Σκίτσο διανύσματος. Προσοχή. Παρόλο που φαίνεται ότι το διάνυσμα δείχνει κάτι μακριά από το αρχικό σημείο, αυτό που περιγράφει αναφέρεται στο συγκεκριμένο αρχικό σημείο και μόνο σε αυτό.

Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα



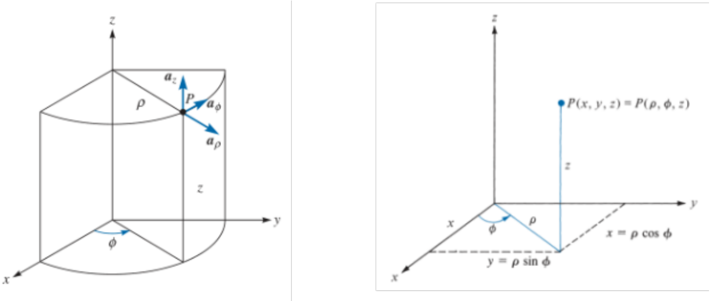
Σχήμα: Πληροφορία που παρέχει ένα διάνυσμα. Θέση, σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς. Απόσταση, ανεξάρτητα από σημείο αναφοράς. Κατευθυνόμενη διαταραχή.

Σύστημα αξόνων: καρτεσιανό



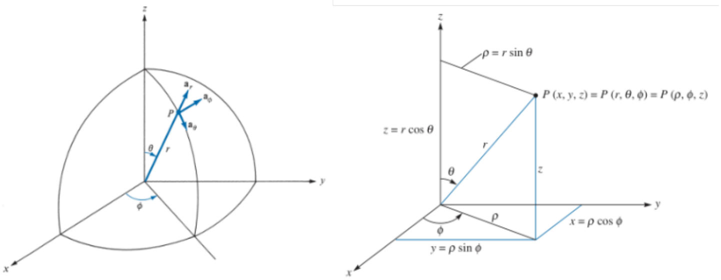
Σχήμα: Καρτεσιανό σύστημα αξόνων στον 3D χώρο.

Σύστημα αξόνων: κυλινδρικό



Σχήμα: Κυλινδρικό σύστημα αξόνων

Σύστημα αξόνων: σφαιρικό



Σχήμα: Σφαιρικό σύστημα αξόνων

Συστήματα αξόνων: σχέσεις

Rectangular to Cylindrical

Variable change
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi \\ A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \\ A_z = A_z \end{cases}$$

Cylindrical to Rectangular

Variable change
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \begin{cases} \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_x = A_\rho\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - A_\phi\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y = A_\rho\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + A_\phi\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z = A_z \end{cases}$$

Rectangular to Spherical

Variable change
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_r = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi \\ \qquad + A_z\cos\theta \\ A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi \\ \qquad - A_z\sin\theta \\ A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \end{cases}$$

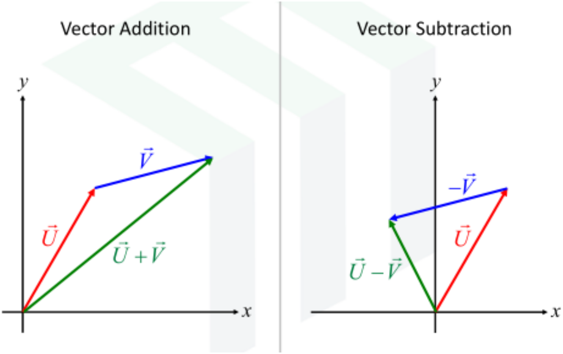
Spherical to Rectangular

Variable change
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \end{cases}$$

Component change
$$\begin{cases} A_x = \dfrac{A_r x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta xz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} - \dfrac{A_\phi y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_y = \dfrac{A_r y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \dfrac{A_\theta yz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} + \dfrac{A_\phi x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ A_z = \dfrac{A_r z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \dfrac{A_\theta\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

Πράξεις με διανύσματα 1

Πρόσθεση και αφαίρεση



Σχήμα: Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Vector Addition & Subtraction

Cartesian

Starting Vectors

$$\vec{U} = U_x\hat{a}_x + U_y\hat{a}_y + U_z\hat{a}_z$$
$$\vec{V} = V_x\hat{a}_x + V_y\hat{a}_y + V_z\hat{a}_z$$

Addition

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x)\hat{a}_x + (U_y + V_y)\hat{a}_y + (U_z + V_z)\hat{a}_z$$

Subtraction

$$\vec{U} - \vec{V} = (U_x - V_x)\hat{a}_x + (U_y - V_y)\hat{a}_y + (U_z - V_z)\hat{a}_z$$

Cylindrical

Starting Vectors

$$\vec{U} = U_\rho\hat{a}_\rho + U_\phi\hat{a}_\phi + U_z\hat{a}_z$$
$$\vec{V} = V_\rho\hat{a}_\rho + V_\phi\hat{a}_\phi + V_z\hat{a}_z$$

Addition

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_\rho + V_\rho)\hat{a}_\rho + (U_\phi + V_\phi)\hat{a}_\phi + (U_z + V_z)\hat{a}_z$$

Subtraction

$$\vec{U} - \vec{V} = (U_\rho - V_\rho)\hat{a}_\rho + (U_\phi - V_\phi)\hat{a}_\phi + (U_z - V_z)\hat{a}_z$$

Spherical

Starting Vectors

$$\vec{U} = U_r\hat{a}_r + U_\theta\hat{a}_\theta + U_\phi\hat{a}_\phi$$
$$\vec{V} = V_r\hat{a}_r + V_\theta\hat{a}_\theta + V_\phi\hat{a}_\phi$$

Addition

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_r + V_r)\hat{a}_r + (U_\theta + V_\theta)\hat{a}_\theta + (U_\phi + V_\phi)\hat{a}_\phi$$

Subtraction

$$\vec{U} - \vec{V} = (U_r - V_r)\hat{a}_r + (U_\theta - V_\theta)\hat{a}_\theta + (U_\phi - V_\phi)\hat{a}_\phi$$

Σχήμα: Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Πράξεις με διανύσματα 3

Πρόσθεση και αφαίρεση

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων στον τριδιάστατο χώρο:

$$\overrightarrow{A} = \mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

Παράδειγμα

Εάν $\mathbf{A} = (10, -4, 6)$ και $\mathbf{B} = (2, 1, 0)$ υπολογίστε:

- την συνιστώσα του $\mathbf{A}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{y}}$
- το μέτρο του διανύσματος $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$

Προφανώς, $A_y = -4$.

$3\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3(10, -4, 6) - (2, 1, 0) = (30, -12, 18) - (2, 1, 0) = (28, -13, 18)$ και
$|3\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{28^2 + (-13)^2 + 18^2} = \sqrt{1277} = 35.74$

Εάν $\mathbf{C} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ τότε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{C}$ είναι:

$$\hat{\mathbf{a}}_C = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{(14, -2, 6)}{\sqrt{14^2 + (-2)^2 + 6^2}} = (0.91132, -0.13019, 0.39057)$$

Παρατηρείστε ότι $|\hat{\mathbf{a}}_C| = 1$ όπως θα περιμέναμε.

Παράδειγμα

Έστω σημεία P, Q τοποθετημένα στα $(0, 2, 4)$ και $(-3, 1, 5)$ αντίστοιχα. Υπολογίστε:

- την θέση του διανύσματος $\mathbf{r}_P$
- το διάνυσμα μετατόπισης από το P στο Q
- την απόσταση μεταξύ P και Q
- διάνυσμα παράλληλο στο PQ με μέτρο 10

$\mathbf{r}_P = (0, 2, 4) = 2\hat{\mathbf{a}}_y + 4\hat{\mathbf{a}}_z$

$\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (-3, 1, 5) - (0, 2, 4) = (-3, -1, 1)$ ή $\mathbf{r}_{PQ} = -3\hat{\mathbf{a}}_x - \hat{\mathbf{a}}_y + \hat{\mathbf{a}}_z$

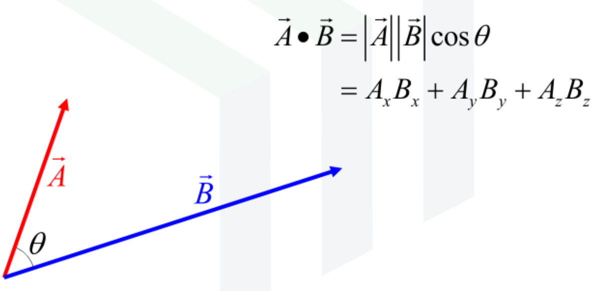
Η απόσταση μεταξύ P και Q είναι: $d = |\mathbf{r}_{PQ}| = \sqrt{9 + 1 + 1} = 3.3166$

Διάνυσμα παράλληλο στο PQ με μέτρο 10 είναι:

$$\pm 10 \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{|\mathbf{r}_{PQ}|} = \pm 10 \frac{(-3, -1, 1)}{3.3166} = \pm(-9.0453, -3.0151, 3.0151)$$

Εσωτερικό γινόμενο 1

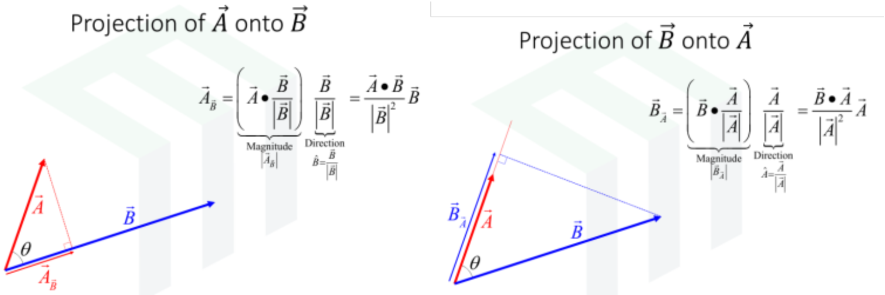
Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ και $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Τότε το εσωτερικό γινόμενο γίνεται $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.



Σχήμα: Εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Εσωτερικό γινόμενο 2

Αν θέλουμε την προβολή ενός διανύσματος σε ένα άλλο:



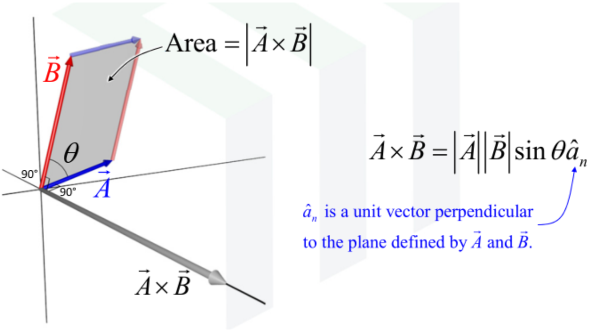
Σχήμα: Προβολή **A** στο **B** και **B** στο **A**.

Τεστ εσωτερικού γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους. Αν ναι, η προβολή του ενός στο άλλο είναι μηδενική, άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

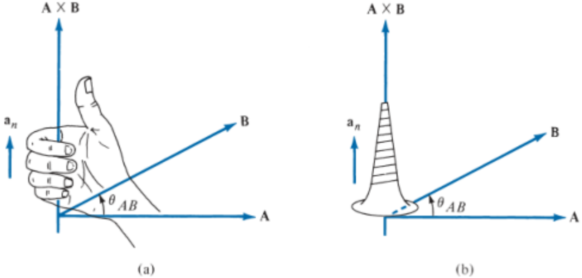
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$$

Εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta\,\widehat{\mathbf{a_n}}$ όπου $\widehat{\mathbf{a_n}}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ και με φορά δεξιόστροφου χεριού ή δεξιόστροφου κοχλία.



Σχήμα: Εξωτερικό γινόμενο. Διάνυσμα με μέτρο το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δυο διανύσματα και κατεύθυνση κάθετη σε αυτό.

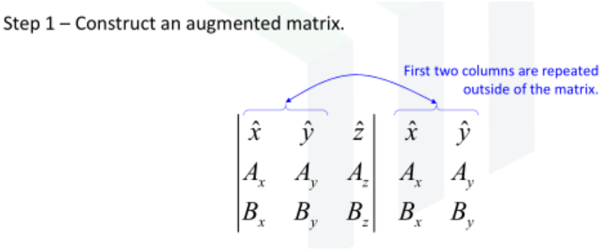
Εξωτερικό γινόμενο 2



Σχήμα: Εξωτερικό γινόμενο. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

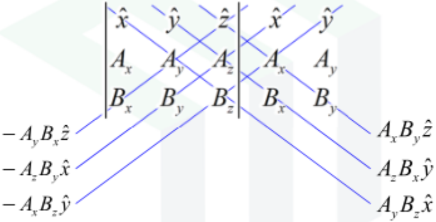
Εξωτερικό γινόμενο 3

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ και $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ υπολογίζεται:



Εξωτερικό γινόμενο 4

Step 2 – Multiply elements along the diagonals.



Step 3 – Make left-hand side products negative.

Step 4 – Add up all of the products.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\hat{x}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\hat{y}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{z}$$

Τεστ εξωτερικού γινομένου

Το εξωτερικό γινόμενο μπορεί να δείξει αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Αν ναι, η γωνία μεταξύ τους είναι μηδέν άρα και το εξωτερικό γινόμενο είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$$

Αλγεβρικοί κανόνες πράξεων για εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο

Ισχύουν, για εσωτερικό γινόμενο

αντιμεταθετική ιδιότητα (commutative):	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
προσεταιριστική ιδιότητα (associative):	
επιμεριστική ιδιότητα (distributive):	$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
ιδιογινόμενο (self-product):	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$

Ισχύουν, για εξωτερικό γινόμενο

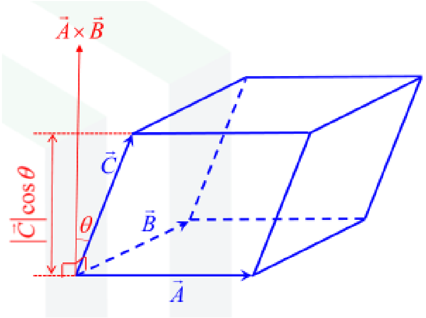
αντιμεταθετική ιδιότητα (commutative):	$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
προσεταιριστική ιδιότητα (associative):	$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$
επιμεριστική ιδιότητα (distributive):	$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$
ιδιογινόμενο (self-product):	$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$

Θέλουμε δεξιόστροφα συστήματα αξόνων.

Τριπλό γινόμενο 1

Βαθμωτό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



Σχήμα: Βαθμωτό τριπλό γινόμενο ο όγκος του σχηματιζόμενου παραλληλεπιπέδου.

Τριπλό γινόμενο 2

Διανυσματικό τριπλό γινόμενο:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Παράδειγμα

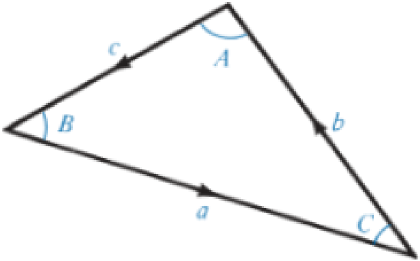
Δοθέντων δυο διανυσμάτων $\mathbf{A} = (3, 4, 1)$ και $\mathbf{B} = (0, 2, -5)$ ποια η γωνία μεταξύ τους;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \qquad |\mathbf{A}| = \sqrt{26} \qquad |\mathbf{B}| = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = 0.10925 \qquad \theta = 83.728^\circ$$

Παράδειγμα 1

Δοθέντος τριγώνου με πλευρές a, b, c υπολογίστε τους κανόνες συνημιτόνου και ημιτόνου.



Παράδειγμα 2

Κανόνας συνημιτόνου

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} + \mathbf{c} = -\mathbf{a}$$

$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

όπου $(\pi - A)$ η γωνία μεταξύ $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$.

Κανόνας ημιτόνου

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|\mathbf{c}\times\mathbf{a}| \Rightarrow$$

$$ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Παράδειγμα

Δοθέντος σημείου $P(-2, 6, 3)$ και διανύσματος $\mathbf{A} = y\hat{\mathbf{x}} + (x + z)\hat{\mathbf{y}}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες, εκφράστε τα σε κυλινδρικές και σφαιρικές. Υπολογίστε την τιμή του $\mathbf{A}$ στο P για καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Στο P: $x = -2$, $y = 6$, $z = 3$.

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 6.3246$, $\phi = \tan^{-1}(y/x) + 180^\circ = 108.43^\circ$, $z = 3$

```
octave:1> p=[-2 6 3]
p =
  -2   6   3
octave:2> p1=[-2 6]
p1 =
  -2   6
octave:3> abs(p1)
ans =
   2   6
octave:4> norm(p1)
ans =  6.3246
octave:7> z=p(1)+j*p(2)
z = -2 + 6i
octave:8> angle(z)*180/pi
ans =  108.43
```

Παράδειγμα 2

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 7$, $\theta = \cos^{-1}(z/r) = 64.623^\circ$, $\phi = \tan^{-1}(y/x) + 180^\circ = 108.43^\circ$

Οπότε: $P(-2,6,3) = P(6.32, 108.43^\circ, 3) = P(7, 64.62^\circ, 108.43^\circ)$

Σε καρτεσιανές: $\mathbf{A} = y\hat{\mathbf{x}} + (x+z)\hat{\mathbf{y}}$

Σε κυλινδρικές: $\mathbf{A} = [y\cos\phi + (x+z)\sin\phi]\hat{\boldsymbol{\rho}} + [-y\sin\phi + (x+z)\cos\phi]\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Σε σφαιρικές: $\mathbf{A} = [y\sin\theta\cos\phi + (x+z)\sin\theta\sin\phi]\hat{\mathbf{r}}$

$$+[y\cos\theta\cos\phi + (x+z)\cos\theta\sin\phi]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$+[-y\sin\phi + (x+z)\cos\phi]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Στο σημείο P το $\mathbf{A}$ είναι:

Σε καρτεσιανές: $\mathbf{A} = 6\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$

Σε κυλινδρικές: $\mathbf{A} = -0.94868\hat{\boldsymbol{\rho}} - 6.0083\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Σε σφαιρικές: $\mathbf{A} = -0.85714\hat{\mathbf{r}} - 0.40658\hat{\boldsymbol{\theta}} - 6.0083\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Και για τα τρία συστήματα $|\mathbf{A}| = 6.083$.

Αποστάσεις μεταξύ δυο σημείων

Επαναλαμβάνεται ότι η απόσταση d μεταξύ δυο σημείων με διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ δίδεται από

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

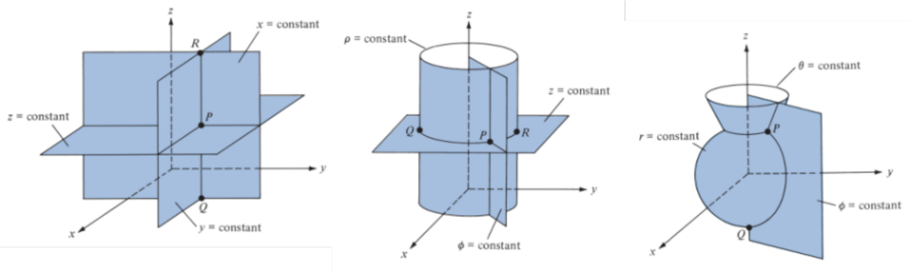
και στα τρία συστήματα συντεταγμένων είναι:

καρτεσιανό: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

κυλινδρικό: $d = \sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2}$

σφαιρικό: $d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos\theta_2\cos\theta_1 - 2r_1r_2\sin\theta_2\sin\theta_1\cos(\phi_2 - \phi_1)}$

Επιφάνειες σταθερής τιμής



Σχήμα: Επιφάνειες σταθερής τιμής