Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης και Ανάπτυξης

Απαντήσεις 1ου Σετ Ασκήσεων - Υπόδειγμα Solow

1. (α΄) Η Συνάρτηση Παραγωγής είναι :

$$Y = K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$$

Τα Οριακά Προιόντα

$$MPK = \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{3} K^{\frac{-2}{3}} L^{\frac{2}{3}} > 0$$
$$MPL = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{2}{3} K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{-1}{3}} > 0$$
$$\frac{\partial MPK}{\partial K} = \frac{-2}{9} K^{\frac{-5}{3}} L^{\frac{2}{3}} < 0$$
$$\frac{\partial MPL}{\partial L} = \frac{-2}{9} K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{-4}{3}} < 0$$

Οι Συνθήκες *Inada*

$$\lim_{K \to \infty} (MPK) = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{3} (\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}} = 0$$
$$\lim_{L \to \infty} (MPL) \lim_{L \to \infty} \frac{2}{3} (\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}} = 0$$
$$\lim_{K \to 0} (MPK) = \lim_{K \to 0} \frac{1}{3} (\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}} = \infty$$
$$\lim_{L \to 0} (MPL) \lim_{L \to 0} \frac{2}{3} (\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}} = \infty$$

Οι Σταθερές Αποδόσεις Κλίμακας

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\frac{1}{3}} (\lambda L)^{\frac{2}{3}} =$$
$$= \lambda^{\frac{1}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} = \lambda F(K, L)$$

(β΄) η Συνάρτηση Παραγωγής ανά Εργαζόμενο

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K,L)$$
$$y = \frac{1}{L}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}}$$
$$y = (\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$
$$f(k) = k^{\frac{1}{3}}$$

(γ΄) Η Βασική Διαφορική Εξίσωση για τα ανωτέρω δεδομένα

$$\dot{k_t} = sf(k_t) - (n+\delta)k_t$$

$$\dot{k} = sk^{\frac{1}{3}} - (n+\delta)k$$

(δ΄) Στην ισορροπία ισχύει

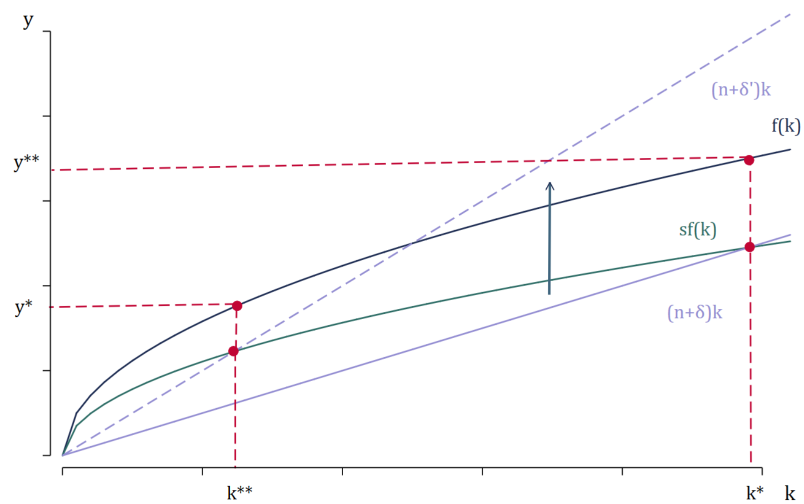
$$sf(k_t) = (n+\delta)k_t$$
$$sk^{\frac{1}{3}} = (n+\delta)k$$
$$k^{\frac{2}{3}} = \frac{s}{n+\delta}$$
$$k^* = (\frac{s}{n+\delta})^{\frac{3}{2}}$$

2. Γνωρίζουμε ότι $F(K_t, L_t) = L * f(k_t)$

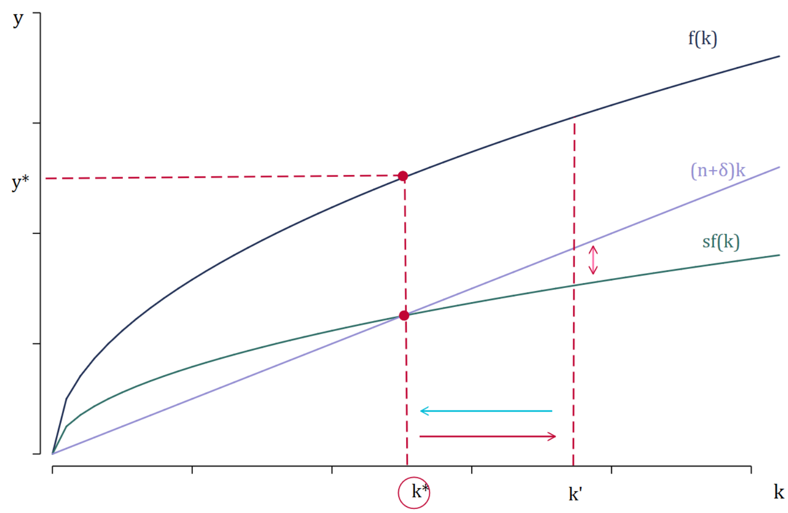
$$MPK_t = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t}$$
$$MPK_t = \frac{\partial L f(k_t)}{\partial K_t} = L\frac{\partial f(k_t)}{\partial k_t}\frac{\partial k_t}{\partial K_t}$$
$$MPK_t = Lf'(k_t)\frac{1}{L} = f'(k_t)$$

$$\frac{\partial MPK_t}{\partial K_t} = \frac{\partial f'(k_t)}{\partial K_t} = \frac{\partial f'}{(\partial k_t)}\frac{\partial k_t}{\partial K_t}$$
$$\frac{\partial MPK_t}{\partial K_t} = f''(k_t)\frac{1}{L}$$

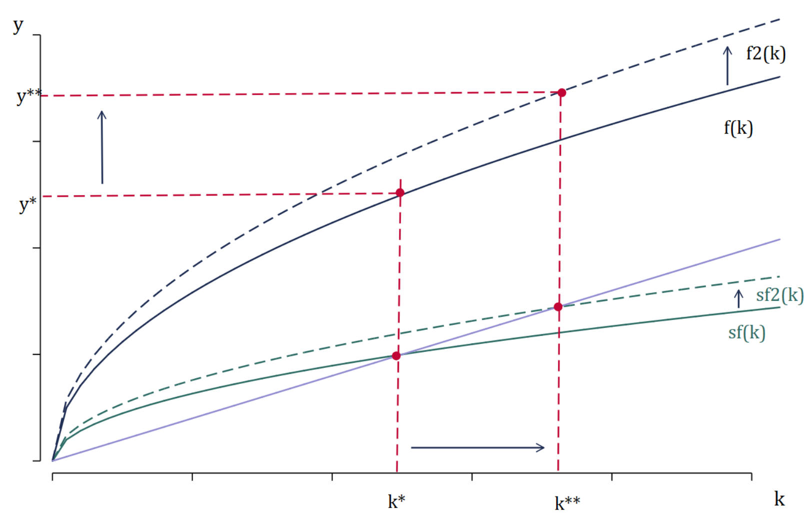
3. (α′) Αύξηση του Συντελεστή Απόσβεσης προκαλεί μείωση στο Κεφάλαιο ανά Εργάτη και στο Εισόδημα Εργάτη της Νέας Σταθερής Καταστασης.



(β′) Μετανάστευση μέρους του Εργατικού Δυναμικού στο Εξωτερικό μειώνει το Εργατικό Δυναμικό L.
Το Κεφάλαιο ανά Εργαζόμενο αυξάνεται. Στο νέο επίπεδο k' ισχύει $(n+\delta)k > sf(k)$ επομένως ο ρυθμός μεταβολής του k είναι Αρνητικός.
Η Οικονομία **Επιστρέφει** στην Αρχική Σταθερή Κατάσταση.



(γ΄) Αύξηση της Παραγωγικότητας Εργασίας μετατοπίζει τη Συνάρτηση Παραγωγής προς τα Πάνω και το ίδιο συμβαίνει με τη Συνάρτηση Αποταμίευσης. Οδηγούμαστε σε Νέα Σταθερή Κατάσταση με αυξημένο Κεφάλαιο και Εισόδημα ανά Εργαζόμενο.



4. (α΄)

$$F(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda K)^{\frac{1}{2}}(\lambda L)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 2\lambda^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = \lambda F(K, L)$$

(β΄)

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K, L)$$
$$y = \frac{1}{L}2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}$$
$$y = 2(\frac{K}{L})^{\frac{1}{2}}$$
$$f(k) = 2k^{\frac{1}{2}}$$

(γ΄) Στην ισορροπία ισχύει

$$sf(k_t) = (n + \delta)k_t$$
$$s2k^{\frac{1}{2}} = (n + \delta)k$$
$$2k^{\frac{1}{2}} = \frac{s}{n + \delta}$$
$$2k^* = (\frac{s}{n + \delta})^2$$
$$2k^* = (\frac{0.2}{0.05 + 0.05})^2$$
$$k^* = 2$$
$$y^* = 2 * 2^{\frac{1}{2}}$$
$$c^* = (1 - s)y^* = (1 - 0.2) * 2 * 2^{\frac{1}{2}}$$
$$c^* = (1 - s)y^* = 1.6 * 2^{\frac{1}{2}}$$

(δ΄) Στην ισορροπία θα ισχύει:

$$2k^* = (\frac{s'}{n + \delta})^2$$

$$2k^* = (\frac{0.3}{0.05+0.05})^2$$
$$k^* = 4.5$$
$$y^* = 2 * 4.5^{\frac{1}{2}}$$
$$c^* = (1-s)y^* = (1-0.3) * 2 * 4.5^{\frac{1}{2}}$$
$$c^* = (1-s)y^* = 1.4 * 4.5^{\frac{1}{2}}$$

Όλα τα Μεγέθη έχουν Αυξηθεί στη Νέα Ισορροπία

5. Αν το ΑΕΠ μιας χώρας μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό 2.5% η Συνάρτησή του είναι:
$$Y_t = Y_0 e^{0.025t}$$
Το Ζητούμενο είναι πότε $Y_t = 2Y_0$ επομένως
$$2Y_0 = Y_0 e^{0.025t}$$
$$e^{0.025t} = 2$$
$$0.025t = ln2$$
$$t = \frac{ln2}{0.025}$$
$$t = 27.7$$
Μετα από περίπου 28 Χρόνια

6. Στην Ισορροπια Ισχύει:
$$2k^*{}_A = (\frac{s_A}{n+\delta})^2$$
$$2k^*{}_B = (\frac{s_B}{n+\delta})^2$$
Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:
$$\frac{k^*{}_A}{k^*{}_B} = (\frac{s_A}{s_B})^2$$
$$\frac{k^*{}_A}{k^*{}_B} = (\frac{2s_B}{s_B})^2$$

$$\frac{k^*{}_A}{k^*{}_B} = 4$$

$$\frac{y^*{}_A}{y^*{}_B} = \frac{2k^*{}_A{}^{\frac{1}{2}}}{2k^*{}_B{}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{y^*{}_A}{y^*{}_B} = (\frac{k_A}{k_B})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y^*{}_A}{y^*{}_B} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$