

Θεωρία Οικονομικής Ανάπτυξης και Μεγέθυνσης

Μαθηματικό Παράρτημα

Κωνσταντίνος Δελλής
kdellis@uop.com

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

26 Μαρτίου 2020

Συναρτήσεις σε Συνεχή Χρόνο

- Έστω μια Συνάρτηση ενός Συνεχούς Μεγέθους στο Χρόνο $x(t)$
- **Μεταβολή**

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$$

- **Σχετική Μεταβολή**

$$\frac{\Delta x_t}{x_t} = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_t}$$

- Η Σχετική Μεταβολή εκφράζεται ως Κλάσμα είτε ως Ποσοστό %

Οριακές Μεταβολές

- Παράγωγος

$$\dot{x}_t = \frac{dx_t}{dt}$$

- Ρυθμός Μεταβολής

$$g_{x_t} = \frac{\dot{x}_t}{x_t} = \frac{1}{x_t} \frac{dx_t}{dt}$$

$$g_{x_t} = \frac{d \ln(x_t)}{dt}$$

Σταθερές Μεταβολές & Σταθεροί Ρυθμοί

- Οι **Ευθείες** Συναρτήσεις έχουν Σταθερή Παράγωγο και δηλώνουν ένα Μέγεθος που μεταβάλλεται κατά ένα Σταθερό **Ποσό** μέσα στο Χρόνο

$$x_t = \alpha + \beta t$$

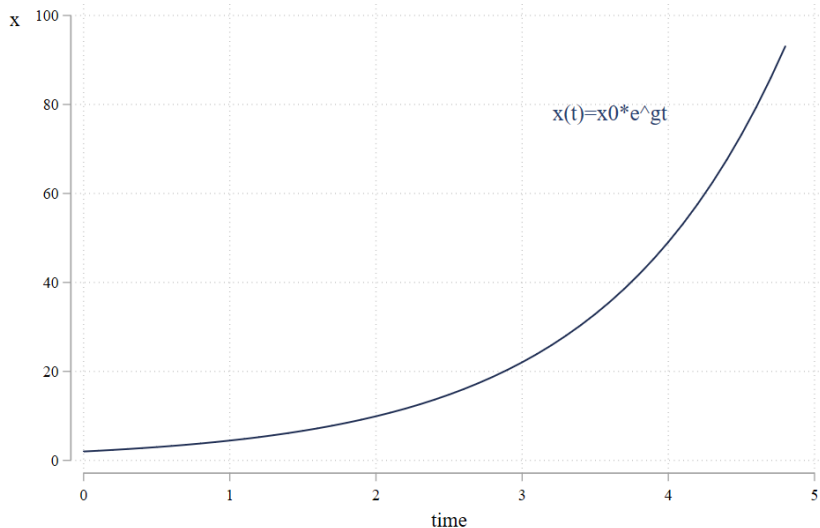
$$\frac{dx_t}{dt} = \beta$$

- Οι **Εκθετικές** Συναρτήσεις έχουν Σταθερό Ρυθμό και δηλώνουν ένα Μέγεθος που μεταβάλλεται κατά ένα Σταθερό **Ποσοστό** μέσα στο Χρόνο (με Αρχική Τιμή x_0)

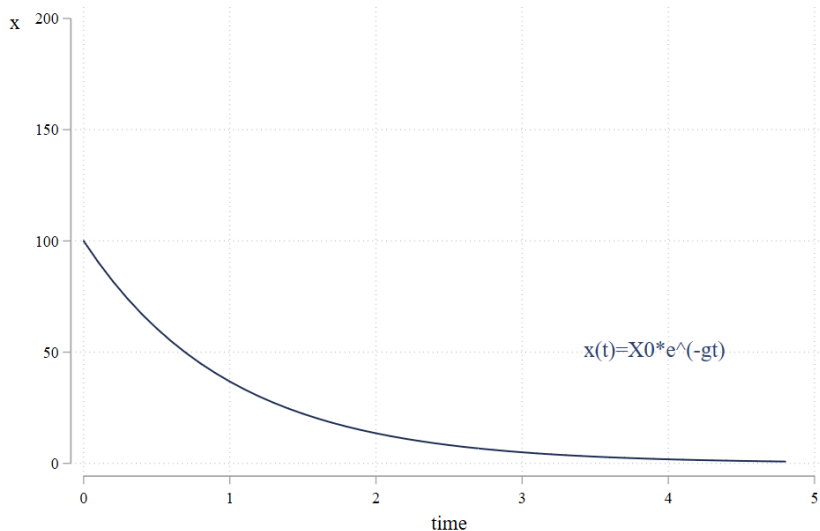
$$x_t = x_0 e^{g t}$$

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t} = g$$

Αύξουσα Συνάρτηση Σταθερού Ρυθμού



Φθίνουσα Συνάρτηση Σταθερού Ρυθμού



Ιδιότητες

- Αν ένα Μέγεθος μεταβάλλεται με Σταθερό Ρυθμό τότε ο Φυσικός του Λογάριθμός μεταβάλλεται κατά ένα Σταθερό Ποσό

$$x_t = x_0 e^{g t}$$

$$\ln(x_t) = \ln(x_0) + g t$$

- Αν $Z_t = X_t * Y_t$ τότε ισχύει

$$g_z = g_x + g_y$$

- Αν $Z_t = \frac{X_t}{Y_t}$ τότε ισχύει

$$g_z = g_x - g_y$$

- Αν $Z_t = X_t^\alpha * Y_t^\beta$ τότε ισχύει

$$g_z = \alpha g_x + \beta g_y$$