

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

$$\text{Διακύμανση: } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Pi_i$$

$$\text{Τυπική απόκλιση: } \sigma = [\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Pi_i]^{1/2}$$

όπου

\bar{X} = Αναμενόμενη ΚΤΡ της επένδυσης,

X_i = Δυνητική i ΚΤΡ,

Π_i = Πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η i ΚΤΡ της επένδυσης.

$$\text{Συντελεστής μεταβλητότητας: } \Sigma M = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

όπου

ΣM = Συντελεστής Μεταβλητότητας,

σ = Τυπική απόκλιση,

\bar{X} = Αναμενόμενη ΚΤΡ της επένδυσης.

$$\text{ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΜΕΤΟΧΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ – ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Gordon: } P = \frac{d_1}{k\mu - g}$$

όπου

P = Οικονομική αξία μετοχής,

d_1 = Μέρισμα του επόμενου έτους,

$k\mu$ = Απαιτούμενη απόδοση μετοχικού κεφαλαίου,

g = Σταθερή αύξηση των μερισμάτων διαχρονικά.

Στην περίπτωση έκδοσης νέου μετοχικού κεφαλαίου για δυναμική εταιρεία, ο τύπος για το υπόδειγμα του

Gordon είναι $P = \frac{d_1}{k\mu(1-f) - g}$, όπου f = τα έξοδα έκδοσης των μετοχών ως ποσοστό της τιμής της μετοχής.

$$\text{Μέρισμα Επόμενου Έτους: } d_1 = d_0(1 + g)$$

όπου

d_1 = Μέρισμα του επόμενου έτους,

d_0 = Μέρισμα της τρέχουσας περιόδου,

g = Σταθερή αύξηση των μερισμάτων διαχρονικά.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 1 (ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΜΕ ΠΙΘΑΝΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ)

Δίνεται

X_i = Απόδοση Επένδυσης, υπό το σενάριο i

Π_i = Πιθανότητα να έχουμε την απόδοση, υπό το σενάριο i

$$E(X) = \bar{X} = \sum X_i \Pi_i = \Pi_1 X_1 + \Pi_2 X_2 + \dots + \Pi_n X_n$$

$$\sigma^2_x = \sum \Pi_i [X_i - E(X)]^2 = \Pi_1 [X_1 - E(X)]^2 + \Pi_2 [X_2 - E(X)]^2 + \dots + \Pi_n [X_n - E(X)]^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

$$\text{Συντελεστής Μεταβλητότητας: } \Sigma M_x = \frac{\sigma_x}{E(X)} = \frac{\sigma_x}{\bar{X}}$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ 2 (ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΣΕ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΗ ΣΕΙΡΑ)

Επένδυση a με απόδοση R_a για N περιόδους

$$E(R_a) = \bar{R}_a = (1/N) \sum R_a$$

$$\sigma_a^2 = (1/N) \sum (R_a - \bar{R}_a)^2$$

Και αν b επένδυση με απόδοση R_b

$$\text{Συνδιακύμανση: } COV_{a,b} = \sigma_{a,b} = (1/N) \sum (R_a - \bar{R}_a)(R_b - \bar{R}_b)$$

$$\text{Συντελεστής Συσχέτισης επενδύσεων } a \text{ και } b, \rho_{a,b}: \rho_{a,b} = \frac{\sigma_{a,b}}{\sigma_a \sigma_b}$$

Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (ΥΑΚΣ): $E(\alpha_i) = \alpha_{aa} + [E(\alpha_{\chi a}) - \alpha_{aa}] \beta_i$
όπου

$E(\alpha_i)$ = η προσδοκώμενη απόδοση του λαμβανόμενου στοιχειώδους τίτλου,

β_i = ο κίνδυνος του τίτλου,

α_{aa} = η απόδοση του ακίνδυνου αξιόγραφου και

$E(\alpha_{\chi a})$ = η προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Το β_i εκφράζεται μαθηματικά ως εξής: $\beta_i = COV(\alpha_i, \alpha_{\chi a}) / \sigma_{\chi a}^2$

Βαθμός Έκθεσης Κινδύνου=

= (Συνολική Επιπρόσθετη + Αρχική Ελάχιστη Κατάθεση) / Αρχική Ελάχιστη Κατάθεση

Αξία ΣΜΕ σε υποκείμενο μέσο χωρίς εισόδημα με συνεχή ανατοκισμό που λήγει σε T-t έτη:

$$F_t = C_t e^{r(T-t)}$$

όπου

F_t = Προθεσμιακή τιμή του υποκείμενου μέσου την χρονική στιγμή t,
 C_t = Τρέχουσα τιμή του υποκείμενου μέσου την χρονική στιγμή t,
T = ο χρόνος μέχρι τη λήξη του ΣΜΕ,
r = ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης,
e = 2,71828.

Αξία ΣΜΕ σε υποκείμενο μέσο χωρίς εισόδημα με ετήσιο ανατοκισμό που λήγει σε T-t έτη:

$$F_t = C_t (1 + r_{t,T})^{T-t}$$

Αξία ΣΜΕ σε υποκείμενο μέσο χωρίς εισόδημα: $F_{t,T} = C_t (1 + r_{t,T})$

όπου

$F_{t,T}$ = η προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου τις ημέρες t που προηγούνται της ημέρας λήξης T,
 C_t = η τιμή του υποκείμενου τίτλου (ομολογίες ή μετοχές) την ημέρα t στην αγορά μετρητοίς,
 $r_{t,T}$ = το επιτόκιο που ισχύει για την περίοδο από t έως T.

Αξία ΣΜΕ σε υποκείμενο μέσο χωρίς εισόδημα με συχνό ανατοκισμό: $F_{t,T} = C_t (1 + \frac{r_{t,T}}{m})^{m(T-t)}$

όπου

m = η συχνότητα ανατοκισμού στη διάρκεια του έτους,
 $r_{t,T}$ = το ετήσιο επιτόκιο.

Αξία ΣΜΕ σε υποκείμενο μέσο με εισόδημα: $F_{t,T} = C_t (1 + r_{t,T}) - επ_T (1 + r_{t,T}) = (C_t - επ_T) (1 + r_{t,T})$

όπου

$επ_T$ = η ενδιάμεση πληρωμή (εισόδημα) που καταβάλλει ο υποκείμενος τίτλος στον ενδιάμεσο χρόνο (τ) μεταξύ της ημέρας t έως T.

Αποτίμηση συμβολαίων εμπορευμάτων: $F_{t,T} = C_t (1 + r_{t,T}) + εμ_{t,T} - αε_{t,T}$

όπου

$εμ_{t,T}$ = τα έξοδα φυσικής διαχρονικής μεταφοράς των υποκείμενων εμπορευμάτων από ημέρα t στην ημέρα T, και
 $αε_{t,T}$ = η απόδοση ευκολίας.

Βάση: $B_t = F_{t,T} - C_t$

Αναλογία Αντιστάθμισης: $AA = \sigma_{\Delta C, \Delta F} / \sigma_{\Delta F}^2$

όπου

$\sigma_{\Delta F}^2$ = η διακύμανση των μεταβολών της προθεσμιακής τιμής και
 $\sigma_{\Delta C, \Delta F}$ = η συνδιακύμανση των μεταβολών της προθεσμιακής τιμής με τις μεταβολές των τιμών μετρητοίς.

Αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης: $MAA = 1 - \frac{AA \cdot \sigma_B^2}{\sigma_C^2}$

όπου

σ_B^2 = η διακύμανση των μεταβολών της βάσης,
 σ_C^2 = η διακύμανση των μεταβολών της τιμής μετρητοίς και
AA = η αναλογία αντιστάθμισης.

Αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου ΣΜΕ σε δείκτη

Αξία 1 ΣΜΕ = Προθεσμιακή τιμή X Πολλαπλασιαστής δείκτη

Αριθμός προθεσμιακών συμβολαίων ΣΜΕ

Αριθμός προθ. συμβ. ΣΜΕ = [(Τρέχουσα αξία θέσης μετρητοίς) * β] / (Αξία 1 προθ. συμβ. ΣΜΕ),

όπου β = το βήτα του χαρτοφυλακίου.

Αποτίμηση δικαιώματος αγοράς και πώλησης στη λήξη

$$C_T = \begin{cases} S_T - X & \text{αν } S_T > X \\ 0 & \text{αν } S_T \leq X \end{cases} \quad P_T = \begin{cases} X - S_T & \text{αν } S_T < X \\ 0 & \text{αν } S_T \geq X \end{cases}$$

όπου

P_T = η τιμή του δικαιώματος πώλησης κατά τη λήξη T,

C_T = η τιμή του δικαιώματος αγοράς κατά τη λήξη T,

X = η τιμή εξάσκησης,

S_T = η τρέχουσα τιμή της μετοχής κατά την λήξη T και

T = η λήξη των δύο δικαιωμάτων.

Εσωτερική και Χρονική αξία

Εσωτερική αξία δικ. Αγοράς = $\text{Μεγ}[0, S-X]$

Εσωτερική αξία δικ. Πώλησης = $\text{Μεγ}[0, X-S]$

Χρονική αξία = Τιμή δικαιώματος - Εσωτερική Αξία

Ισότητα των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (Put-Call Parity): $P = C - S_T + X e^{-rT}$

Τύπος Black-Scholes για Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς

$$C = S \cdot N(d_1) - X e^{-r_f \tau} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = [\ln(S/X) + (r_f + \sigma^2/2)\tau] / \sigma\sqrt{\tau}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Τύπος Black-Scholes για Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης

$$P = X e^{-r_f \tau} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

Τιμολόγηση δικαιώματος αγοράς και πώλησης σε προθεσμιακά συμβόλαια

$$C^F = e^{-r_f \tau} [F_{t,T} N(d_1) - X N(d_2)]$$

$$P^F = e^{-r_f \tau} [X N(-d_2) - F_{t,T} N(-d_1)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_{t,T}/X) + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

$$N(-d_1) = 1 - N(d_1)$$

Το Δέλτα των δικαιωμάτων

Δέλτα δικαιώματος αγοράς = $N(d_1) > 0$

Δέλτα δικαιώματος πώλησης = $-N(-d_1) < 0$

Βέλτιστος αριθμός δικαιωμάτων αντιστάθμισης: $M = \Theta_M / \delta$

όπου

M = ο αριθμός των δικαιωμάτων,

Θ_M = η αξία της θέσης στην αγορά μετρητοίς και

δέλτα = Δέλτα δικαιώματος αγοράς (δ_a) ή πώλησης (δ_p), ανάλογα με το είδος του δικαιώματος που θα χρησιμοποιηθεί.

Για χαρτοφυλάκιο:

$$M' = \beta \frac{\text{Αξία προς Αντιστάθμιση}}{\delta \text{ * Πολλαπλασιαστής * Τιμή Εξάσκησης}} = \beta \frac{\Theta_M}{\delta \text{ * Πολλαπλασιαστής * } X}$$

Απόδοση της Περιόδου Διακράτησης (HPR): $HPR = TA / AA$

όπου

HPR = η απόδοση της περιόδου διακράτησης,

TA = η τελική αξία επένδυσης,

AA = η αρχική αξία επένδυσης.

Ποσοστιαία απόδοση της περιόδου διακράτησης HPY : $HPY = HPR - 1$

Ετήσια HPR : $HPR = HPR^{1/n}$

Μέση πραγματοποιηθείσα απόδοση επένδυσης: $\bar{X} = \sum_{i=1}^n (X_i / n)$

όπου X_i η απόδοση κάθε περιόδου i του δείγματος.

Κίνδυνος (τυπική απόκλιση του δείγματος): $\sigma = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)} \right]^{1/2}$

Αναμενόμενη Απόδοση: $E(r) = \sum_{i=1}^n P_i r_i$

P_i η πιθανότητα να συμβεί η i δυναμική απόδοση της επένδυσης.

Κίνδυνος (τυπική απόκλιση) αναμενόμενης απόδοσης: $\sigma = \{\sum P_i [r_i - E(r)]^2\}^{1/2}$

Συντελεστής Μεταβλητότητας: $CV = \sigma_i / E(r_i)$

Παρούσα Αξία Ομολογίας: $PV = \frac{C}{(1+k)} + \frac{C}{(1+k)^2} + \dots + \frac{C}{(1+k)^n} + \frac{FV}{(1+k)^n}$

όπου

PV = η οικονομική ή παρούσα αξία της ομολογίας,

C = το ετήσιο τοκομερίδιο,

n = ο αριθμός των ετών που διαρκεί η ομολογία,

FV = η ονομαστική αξία της ομολογίας,

k = το κατάλληλο προεξοφλητικό επιτόκιο.

Παρούσα Αξία Διηνεκούς Ομολογίας: $PV = \frac{C}{k}$

Διάρκεια Ομολογίας: $D = \sum_{t=1}^N t \left[\frac{C_t / (1+k)^t}{\sum_{t=1}^N C_t / (1+k)^t} \right]$

όπου

D = διάρκεια της ομολογίας,

C_t = οι ταμειακές εισροές (τοκομερίδια ή ονομαστική αξία) της περιόδου t ,

k = απόδοση στη λήξη της ομολογίας,

t = χρονική περίοδος που πραγματοποιείται η κάθε πληρωμή.

Ποσοστιαία μεταβολή της τιμής μιας ομολογίας είναι κατά προσέγγιση ίση με:

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx \frac{-D}{\left(1 + \frac{k_0}{m}\right)} \times \Delta k \times 100$$

Όπου

$\Delta P = (P_1 - P_0)$ είναι η μεταβολή στη τιμή της ομολογίας,

P_0 = η αρχική τιμή της ομολογίας

P_1 = η νέα τιμή της ομολογίας,

D = η διάρκεια της ομολογίας

m = ο αριθμός των πληρωμών που καταβάλλονται μέσα σε ένα έτος,

k_0 = η απόδοση στη λήξη που αντιστοιχεί στο αρχικό επιτόκιο,

k_1 = το νέο επιτόκιο

$\Delta k = (k_1 - k_0)$ = η μεταβολή των επιτοκίων

Το υπόδειγμα προεξόφλησης μερισμάτων για αποτίμηση μετοχών

$$IV = \frac{D_1}{(1+k)^1} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \dots + \frac{D_n}{(1+k)^n}$$

όπου

IV = η οικονομική αξία της μετοχής,

D_i = τα ετήσια μερίσματα, $i = 1, 2, \dots, n$

k = η απαιτούμενη από τους επενδυτές απόδοση για τη συγκεκριμένη μετοχή.

Το υπόδειγμα σταθερής αύξησης μερισμάτων ή συνεχούς μεγέθυνσης για αποτίμηση μετοχών

$$IV = \frac{D_0(1+g)^1}{(1+k)} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+k)^3} + \dots + \frac{D_0(1+g)^\infty}{(1+k)^\infty}$$

όπου g ο ρυθμός (ποσοστό) μεταβολής κερδών και μερισμάτων.

Για $k > g$, τότε η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γίνει: $IV = \frac{D_1}{k - g}$

όπου $D_1 = D_0(1+g)$.

Το υπόδειγμα μηδενικής μεγέθυνσης (στατικό) για αποτίμηση μετοχών

$$IV = \frac{D}{(1+k)} + \frac{D}{(1+k)^2} + \dots + \frac{D}{(1+k)^\infty} = \frac{D}{k}$$

όπου D το σταθερό ετήσιο μέρισμα που διανέμει η εταιρία.

Το υπόδειγμα αποτίμησης του πολλαπλασιαστή κερδών: $P_0 = E_1 * (P/E)$

όπου

P_0 = η τιμή μετοχής στην αρχή του έτους,

E_1 = το κέρδος ανά μετοχή στο τέλος του έτους,

P/E = Πολλαπλασιαστής Κερδών.

$$\text{ή } P/E = \frac{D_1 / E_1}{k - g} = \frac{1 - b}{k - g}$$

όπου

D_1 = το μέρισμα ανά μετοχή στο τέλος του πρώτου έτους,

D_1 / E_1 = το ποσοστό των διανεμόμενων κερδών,

k = η απαιτούμενη από τους επενδυτές απόδοση για τη συγκεκριμένη μετοχή,

g = ο ρυθμός (ποσοστό) μεταβολής κερδών και μερισμάτων,

b = το ποσοστό παρακρατούμενων κερδών [$1 - (D_1 / E_1)$]

και αν $g = b \cdot ROE$

όπου $ROE = \eta$ Αποδοτικότητα Ιδίων Κεφαλαίων

$$P/E = \frac{1-b}{k-ROE \cdot b}$$

Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου N μετοχών: $E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_i)$

όπου

$E(R_i) = \eta$ αναμενόμενη απόδοση των i αξιογράφων ($i=1, \dots, N$),
 $w_i =$ το ποσοστό του κάθε αξιόγραφου στο χαρτοφυλάκιο.

Διακύμανση χαρτοφυλακίου με i, j αξιόγραφα, R_i και R_j αποδόσεις και w_i και w_j ποσοστά σύνθεσης:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{ή} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Όπου η συνδιακύμανση για αναμενόμενες αποδόσεις ορίζεται ως

$$\sigma_{kl} = COV(R_k, R_l) = \sum_{k,l=1}^n P_k [R_k - E(R_k)] * [R_l - E(R_l)]$$

ή

Για πραγματοποιηθείσες αποδόσεις (από δείγμα): $\sigma_{kl} = \frac{\sum_{k,l=1}^n (R_k - \bar{R}_k)(R_l - \bar{R}_l)}{n-1}$

Συντελεστής συσχέτισης: $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{COV(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$

Για χαρτοφυλάκιο με δύο αξιόγραφα (1 και 2)

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}$$

$$\sigma_p = [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2]^{1/2} = [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}]^{1/2}$$

Υπόδειγμα του ενός δείκτη: $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \epsilon_i$

όπου

$R_i =$ απόδοση του i αξιογράφου,

$R_m =$ απόδοση του δείκτη αγοράς,

$\alpha_i =$ ένα τμήμα της απόδοσης του i αξιογράφου το οποίο είναι ανεξάρτητο από την απόδοση του R_m ,

$\beta_i =$ συντελεστής που μετράει την ευαισθησία της απόδοσης του i αξιογράφου σε μεταβολές της απόδοσης του R_m ,

$\epsilon_i =$ ένα τυχαίο σφάλμα της εξίσωσης παλινδρόμησης.

Χαρακτηριστική Γραμμή

Η εξίσωση της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων είναι: $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \epsilon_i$

$$\hat{\beta}_i = \frac{COV(R_m, R_i)}{\sigma_m^2} \quad \text{ή} \quad \hat{\beta}_i = \frac{\rho_{im}}{\sigma_m / \sigma_i}, \quad \hat{\alpha}_i = \bar{R}_i - \hat{\beta}_i \bar{R}_m \quad \text{ή} \quad E(R_i) - \beta_i E(R_m)$$

Χρήση Υποδείγματος του ενός Δείκτη: $E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_m)$

Διακύμανση του i αξιογράφου: $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$

όπου σ_m^2 = Διακύμανση της απόδοσης του δείκτη της αγοράς, σ_{ei}^2 = Διακύμανση του σφάλματος της εξίσωσης παλινδρόμησης

Συνδιακύμανση των αξιογράφων i, j : $\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$

Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου: $E(R_p) = \alpha_p + \beta_p E(R_m)$

όπου $\alpha_p = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$, $\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$

Διακύμανση χαρτοφυλακίου: $\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{ei}^2$

όπου

σ_p = ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου,

β_p = ο συντελεστής βήτα του χαρτοφυλακίου,

σ_m = ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Όταν ο αριθμός των αξιογράφων (n) που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλος τότε ο παραπάνω τύπος μετασχηματίζεται ως ακολούθως: $\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2$ ή $\sigma_p = \beta_p \sigma_m$

Γραμμή Κεφαλαιαγοράς: $E(R_p) = R_f + \{ [E(R_m) - R_f] / \sigma_m \} \sigma_p$

Τιμή του Κινδύνου στην Αγορά: $[E(R_m) - R_f] / \sigma_m$

Γραμμή Αγοράς Αξιογράφων ή Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων:

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \beta_i$$

Μέτρα Αξιολόγησης της Απόδοσης Ενός Χαρτοφυλακίου:

1. Μέτρο του Treynor: $T_p = (\bar{R}_p - \bar{R}_f) / \beta_p$

2. Μέτρο του Sharpe: $S_p = (\bar{R}_p - \bar{R}_f) / \sigma_p$