ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ Γ.Γλεντής

1. Εισαγωγή
2. Συστήματα Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος
3. Σήματα και Συστήματα
4. Ψηφιοποίηση Αναλογικών Σημάτων
5. Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα
6. Ο Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$
7. Το Πεδίο της Συχνότητας
8. Αναλογικά Φίλτρα
9. Ψηφιακά Φίλτρα
10. Διακριτοί Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί
11. Εφαρμογή στα Ψηφιακά Τηλ/κά Συστήματα
12. Εφαρμογή στις Κατευθυντικές Συστοιχίες Κεραιών

ΔΙΑΚΡΙΤΟΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Σήματα διακριτού χρόνου μετασχηματίζονται βάσει ορθογώνιων σημάτων

- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)
- Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου (DCT)
- Διακριτός μετασχηματισμός ημιτόνου (DST)
- Διακριτός μετασχηματισμός Walse-Hadamard
- ...

Διακριτός μετασχηματισμός **Fourier**

Το σήμα

$$x(n), \quad n = 0, 1, \ldots N-1$$

Τα σήματα βάσης

$$w_N = e^{-\jmath \frac{2\pi}{N}}$$

- Ανάλυση

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N} x(n) w_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots N-1$$

- Σύνθεση

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} X(k) w_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \ldots N-1$$

$$\mathbf{W}_N = \left(w_N^{kn}\right)_{\substack{k=0,1\ldots N-1 \\ n=0,1,\ldots N-1}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \\ 1 & w_N & w_N^2 & \ldots & w_N^{N-1} & \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \ldots & w_N^{2(N-1)} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1)} & w_N^{2(N-1)} & \ldots & w_N^{(N-1)(N-1)} & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^H$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_N = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^H$$

- Παράδειγμα

$N = 4$, $w_N = w_4 = e^{-\jmath \frac{2\pi}{4}} = -\jmath$

$$\mathbf{W}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\jmath & -1 & \jmath \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \jmath & -1 & -\jmath \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) \\ X(1) &= x(0) - \jmath x(1) - x(2) + \jmath x(3) \\ X(2) &= x(0) - x(1) + x(2) - x(3) \\ X(3) &= x(0) + \jmath x(1) - x(2) - \jmath x(3) \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \jmath & -1 & -\jmath \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\jmath & -1 & \jmath \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x(0) &= \tfrac{1}{4}(X(0) + X(1) + X(2) + X(3)) \\
x(1) &= \tfrac{1}{4}(X(0) + \jmath X(1) - X(2) - \jmath X(3)) \\
x(2) &= \tfrac{1}{4}(X(0) - X(1) + X(2) - X(3)) \\
x(3) &= \tfrac{1}{4}(X(0) - \jmath X(1) - X(2) + \jmath X(3))
\end{aligned}$$

Βασικές Ιδιότητες

$$x(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(k)$$

- Περιοδικότητα

$$x(n+N) = x(n), \forall n$$

$$X(k+N) = X(k), \forall k$$

- Γραμμικότητα

$$ax_1(n) + bx_2(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} aX_1(k) + bX_2(k)$$

- Χρονική αναστροφή

$$x(N-n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(N-k)$$

- Κυκλική χρονική ολίσθηση

$$x(n-l|mod_N) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(k)e^{-\jmath\frac{2\pi kl}{N}}$$

- Κυκλική συνέλιξη (συγκερασμός)

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X_1(k)X_2(k)$$

όπου $x_1(n) \otimes x_2(n) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k|mod_N)$

$$x(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(k)$$

Αριθμητική Πολυπλοκότητα

$$N^2 \quad flops$$

Ο Ταχύς Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

FFT !

$$\frac{1}{2} N \log_2(N) \quad flops$$

$$x(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(k)$$

- $N = 4, \quad w_4 = -j$

$$\begin{aligned}
X(0) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^0 + x(2)w_4^0 + x(3)w_4^0 \\
X(1) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^1 + x(2)w_4^2 + x(3)w_4^3 \\
X(2) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^2 + x(2)w_4^4 + x(3)w_4^6 \\
X(3) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^3 + x(2)w_4^6 + x(3)w_4^9
\end{aligned}$$

- Ισχύει: $\quad w_N^n = w_N^{n+N}$

Άρα: $w_4^6 = w_4^2, \quad w_4^4 = w_4^0, \quad w_4^9 = w_4^1$

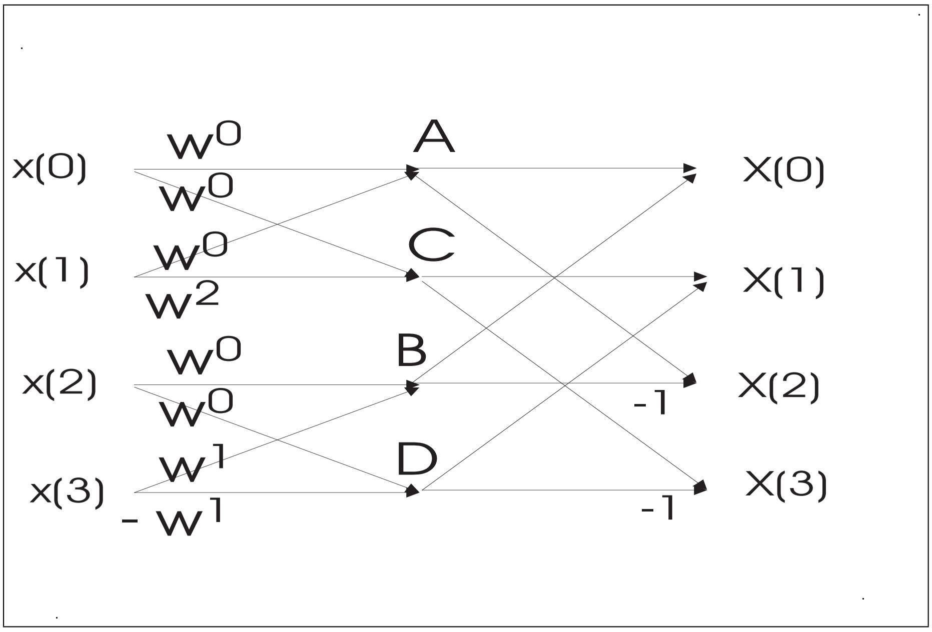
Επίσης: $w_4^1 = -w_4^3$

Άρα:

$$\begin{aligned}
X(0) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^0 + x(2)w_4^0 + x(3)w_4^0 \\
X(1) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^1 + x(2)w_4^2 - x(3)w_4^1 \\
X(2) &= x(0)w_4^0 + x(1)w_4^2 + x(2)w_4^0 + x(3)w_4^2 \\
X(3) &= x(0)w_4^0 - x(1)w_4^1 + x(2)w_4^2 + x(3)w_4^1
\end{aligned}$$

Ο Ταχύς διακριτός μετασχηματισμός **Fourier(FFT)**

$$\begin{aligned} A &= x(0)w_4^0 + x(2)w_4^0 \\ B &= x(1)w_4^0 + x(3)w_4^0 \\ C &= x(0)w_4^0 + x(2)w_4^2 \\ D &= x(1)w_4^1 - x(3)w_4^1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} X(0) &= A + B \\ X(1) &= C + D \\ X(2) &= A - B \\ X(3) &= C - D \end{aligned}$$



Αποδεκάτιση στο χρόνο

$$x(n) \overset{DFT}{\underset{N}{\Longleftrightarrow}} X(k)$$

- άρτιες τιμές του χρόνου

$$x_1(n) = x(2n), n = 0, 1, \ldots \frac{N}{2} - 1$$

- περιττές τιμές του χρόνου

$$x_2(n) = x(2n+1), n = 0, 1, \ldots \frac{N}{2} - 1$$

Ισχύει

$$X(k) = X_1(k) + w_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1 \ldots \frac{N}{2} - 1$$

όπου

$$x_1(n) \overset{DFT\ N/2}{\Longleftrightarrow} X_1(k), \quad x_2(n) \overset{DFT\ N/2}{\Longleftrightarrow} X_2(k)$$

επίσης

$$X_1(k + \frac{N}{2}) = X_1(k), \quad X_2(k + \frac{N}{2}) = X_2(k)$$

και

$$w_N^{k+\frac{N}{2}} = -w_N^k$$

Άρα

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + w_N^k X_2(k) \\ X(k+\tfrac{N}{2}) &= X_1(k) - w_N^k X_2(k) \end{aligned} \qquad 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$$

Πεταλούδα **FFT**

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w_N^k \\ 1 & -w_N^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα του FFT

$$\frac{1}{2} N \log_2(N) \quad flops$$

Εναλλακτικές μέθοδοι

Τρόπος αποδεκάτισης

- Αποδεκάτιση στο χρόνο
- Αποδεκάτιση στη συχνότητα

Δομή FFT

- με βάση το 2, 4, 8, 16 ...
- με μεικτή βάση, πχ. 2/4 ή 4/8
- ανάλυση σε γινόμενο πρώτων αριθμών
- ανάλυση σε γινόμενα Kroneker
- αλγόριθμος Goertzel

Μετασχηματισμός **DFT** κυλιόμενου παραθύρου **SDFT**

- Σήμα $x(n)$, $n = 0, 1, 2..$
- Μήκος παραθύρου N

$$\mathbf{x}(n) = [x(n)\ x(n-1)\ \ldots x(n-N+1)]^T$$

$$\mathbf{U}(n) = [u_0(n)\ u_1(n)\ \ldots u_{N-1}(n)]^T$$

$$x(n) \stackrel{DFT}{\Longleftrightarrow} U(n)$$

$$u_k(n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(n-\ell) w_N^{k\ell}, \quad k = 0, 1 \ldots N-1$$

Άρα

$$\mathbf{U}(n) = \mathbf{W}_N \mathbf{x}(n)$$

- Υπολογισμός του SDFT με αναδρομικά φίλτρα πρώτης τάξης

$$u_k(n) = w_N^k u_k(n-1) + (x(n) - x(n-N)), k = 0, 1 \ldots N-1$$

- Τράπεζα φίλτρων πρώτης τάξης

$$u_k(n) = \frac{1 - z^{-N}}{(1 - w_N^k z^{-1})} x(n), \quad k = 0, 1 \ldots N-1$$

- Σταθεροποίηση $z^{-1} \rightarrow \rho z^{-1}$, $0 << \rho < 1$

$$v_k(n) = \frac{1 - \rho^N z^{-N}}{(1 - \rho w_N^k z^{-1})} x(n), \quad k = 0, 1 \ldots N-1$$

ή

$$v_k(n) = \rho w_N^k v_k(n-1) + \left(x(n) - \rho^N x(n-N)\right), k = 0, 1 \ldots N-1$$

Φασματογράφημα