ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ Γ.Γλεντής

1. Εισαγωγή
2. Συστήματα Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος
3. Σήματα και Συστήματα
4. Ψηφιοποίηση Αναλογικών Σημάτων
5. Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα
6. Ο Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$
7. Το Πεδίο της Συχνότητας
8. Αναλογικά Φίλτρα
9. Ψηφιακά Φίλτρα
10. Διακριτοί Ορθογώνιοι Μετασχηματισμοί
11. Εφαρμογή στα Ψηφιακά Τηλ/κά Συστήματα
12. Εφαρμογή στις Κατευθυντικές Συστοιχίες Κεραιών

# Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ $\mathcal{Z}$

Χρήσιμο εργαλείο στην ανάλυση, επεξεργασία και σχεδίαση σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου

- Υπολογισμός συγκερασμού
- Επίλυση εξισώσεων διαφορών
- Σχεδίαση γραμμικών φίλτρων

## Ο (μονόπλευρος) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ $\mathcal{Z}$

- $x(n)$ σήμα διακριτού χρόνου

Ορίζουμε το μερικό άθροισμα ($z$ μιγαδική μεταβλητή)

$$X_N(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots x(N)z^{-N}$$

ή

$$X_N(z) = \sum_{n=0}^{N} x(n)z^{-n}$$

- Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x(n)$

$$X(z) \equiv \mathcal{Z}(x(n)) = \lim_{N\to\infty} X_N(z)$$

- Πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$: Όλα τα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο, για τα οποία το άθροισμα άπειρων όρων συγκλίνει.

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}^{-1}$

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = \frac{1}{2\pi \jmath} \oint X(z)z^{n-1}dz, \quad n \geq 0$$

$$x(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

## ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ $\mathcal{Z}$ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

- το μοναδιαίο δείγμα

$$x(n) = \delta(n) \Longleftrightarrow X(z) = 1, \quad \{z \in \mathcal{C}: \ z \neq 0\}$$

- το ολισθημένο μοναδιαίο δείγμα

$$x(n) = \delta(n-D) \Longleftrightarrow X(z) = z^{-D}, \quad \{z \in \mathcal{C}: \ z \neq 0\}$$

- το εκθετικό σήμα

$$x(n) = a^n, n \geq 0 \Longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} \quad \{z \in \mathcal{C}: \ |z| > |a|\}$$

- το μοναδιαίο βήμα

$$x(n) = u_s(n) \Longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \quad \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > |1|\}$$

- το συνδιαστικό εκθετικό σήμα

$$x(n) = na^{n-1}, n \geq 0 \Longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{(z-a)^2} \quad \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > |a|\}$$

- το γενικό συνδιαστικό εκθετικό σήμα

$$x(n) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} a^{n-1}, n \geq 0 \Longleftrightarrow$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > |a|\}$$

## ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

- Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ είναι γραμμικός τελεστής

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(z), \quad R_1$$

$$x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(z), \quad R_2$$

Τότε

$$ax_1(n) + bx_2(n) \Longleftrightarrow X_1(z) + X_2(z), \quad R_{12} = R_1 \cap R_2$$

Παράδειγμα:

$$x(n) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3^n, n \leq 0$$

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0 \Longleftrightarrow X_1(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, R_1 = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > |\frac{1}{2}|\}$$

$$x_2(n) = 3^n, n \geq 0 \Longleftrightarrow X_2(z) = \frac{z}{z-3} \quad R_2 = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > |3|\}$$

$$x(n) \Longleftrightarrow 5\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-3}, R_{12} = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > |3|\}$$

## Ο τύπος του **Euler**

$$e^{\jmath\theta} = \cos(\theta) + \jmath\sin(\theta))$$

$$e^{-\jmath\theta} = \cos(\theta) - \jmath\sin(\theta))$$

ή

$$\begin{bmatrix} e^{\jmath\theta} \\ e^{-\jmath\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \jmath \\ 1 & -\jmath \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφα

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{-2\jmath} \begin{bmatrix} -\jmath & -\jmath \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\jmath\theta} \\ e^{-\jmath\theta} \end{bmatrix}$$

ή

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{\jmath\theta} + e^{-\jmath\theta}\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}\left(e^{\jmath\theta} - e^{-\jmath\theta}\right)$$

- Παράδειγμα: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος

$$x(n) = \cos(\omega n), n \geq 0$$

Εφαρμογή του τύπου Euler

$$x(n) = \frac{1}{2}\left(e^{\jmath\omega n} + e^{-\jmath\omega n}\right)$$

Ορίζουμε

$$x_1(n) = \left(e^{\jmath\omega}\right)^n, n \geq 0, \quad x_2(n) = \left(e^{-\jmath\omega}\right), n \geq 0$$

Τότε

$$Q_1(z) = \frac{z}{z - e^{\jmath\omega}} \quad R_1 = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > 1\}$$

$$Q_2(z) = \frac{z}{z - e^{-\jmath\omega}} \quad R_2 = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > 1\}$$

- Λόγω της γραμμικότητας

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{\jmath\omega}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-\jmath\omega}}$$

$$R = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > 1\}$$

ή

$$X(z) = \frac{z^2 - \cos(\omega)z}{z^2 - 2\cos(\omega)z + 1}, R = \{z \in \mathcal{C} : \ |z| > 1\}$$

## Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ στο **MATLAB**

- Δυνατότητα εκτέλεσης συμβολικών πράξεων (Symbolic toolbox)

```
clear

syms w n

x=cos(w*n)

X=ztrans(x)
```

- Αποτέλεσμα

$$\frac{z\,(-\cos(n)+z)}{1-2\,z\cos(n)+z^2}$$

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ $\mathcal{Z}$

- αριστερή μετατώπιση

$$x(n-L) \Longleftrightarrow z^{-L}X(z) + \sum_{i=1}^{L} x(-i)z^{i-L}$$

- δεξιά μετατώπιση

$$x(n+L) \Longleftrightarrow z^{L}X(z) - \sum_{i=0}^{L-1} x(-i)z^{-i}$$

- συγκερασμός

$$y(n) = h(n) \star x(n) \Longleftrightarrow Y(z) = H(z)X(z) R_h \cap R_x$$

- συζυγία

$$x^*(n) \Longleftrightarrow X^*(z^*)$$

- θεώρημα αρχικής τιμής

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$$y(n) = h(n) \star x(n) \Longleftrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$$

- $h(n)$ κρουστική απόκριση
- $H(z)$ συνάρτηση μεταφοράς

Συνδεσμολογίες συστημάτων

- Σειριακή $H_{12}(z) = H_1(z)H_2(z)$
- Παράλληλη $H_{12}(z) = H_1(z) + H_2(z)$
- Μοναδιαίο $H(z) = 1$
- Αντίστροφο $H^{-1}(z) = \dfrac{1}{H(z)}$
- Με ανάδραση $H_{12}(z) = \dfrac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ $\mathcal{Z}^{-1}$

- Σήματα με γνήσια ρητούς μετασχηματισμούς $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{b(z)}{a(z)}, \quad R_x$$

$$b(z) = \sum_{i=0}^{p} b_i z^i, \quad a(z) = z^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i z^i$$

Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$Y(z) = \frac{\frac{b(z)}{a(z)}}{z}$$

Το πολυώνυμο του παρανομαστή έχει βαθμό $p+1$, άρα έχει $p+1$ ρίζες.

$$za(z) = 0 \rightarrow \lambda_i, p_i, i = 1, 2 \ldots m$$

- $m$ πλήθος διακριτών ριζών
- $\lambda_i$ ρίζα
- $p_i$ αντίστοιχη πολλαπλότητα

$$\sum_{i=1}^{m} = p + 1$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{1}{(z-\lambda_i)^j} r_{ij}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{(p_i - j)!} \frac{d^{p_i - j}}{dz^{p_i - j}} \left( (z-\lambda_i)^{p_i} Y(z) \right) |_{z=\lambda_i}$$

ή

$$X(z) = zY(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{z}{(z-\lambda_i)^j} r_{ij}$$

- Υπενθύμηση:

$$\delta(n-D) \Longleftrightarrow z^{-D}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} a^{n-1}, n \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

- Αναλυτικά

$$X(z) = 1r_{11} + \frac{1}{z}r_{12} + \ldots \frac{1}{z^{p1-1}}r_{1p_1} +$$

$$\frac{z}{z-\lambda_2}r_{21} + \frac{z}{(z-\lambda_2)^2}r_{22} + \ldots + \frac{z}{(z-\lambda_2)^{p_2}}r_{2p_2} +$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{z}{z-\lambda_m}r_{m1} + \frac{z}{(z-\lambda_m)^2}r_{m2} + \ldots + \frac{z}{(z-\lambda_m)^{p_m}}r_{mp_m}$$

- Άρα

$$x(n) = \delta(n)r_{11} + \delta(n-1)r_{12} + \ldots \delta(n-p_1+1)r_{1p_1} +$$

$$\lambda_2^n r_{21} + n\lambda_2^{n-1}r_{22} + \ldots \begin{bmatrix} n \\ p_2 - 1 \end{bmatrix} \lambda^{n-p_2+1} +$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\lambda_{p_m}^n r_{p_m 1} + n\lambda_{p_m}^{n-1}r_{p_m 2} + \ldots \begin{bmatrix} n \\ p_m - 1 \end{bmatrix} \lambda^{n-p_m+1}$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το σήμα με αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$

$$X(z) = \frac{z+2}{z^2-1}$$

- Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$Y(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{z(z^2-1)}$$

$$z(z^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, p_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1, p_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1, p_3 = 1 \end{cases}$$

Άρα

$$Y(z) = \frac{1}{z}r_{11} + \frac{1}{z-1}r_{12} + \frac{1}{z+1}r_{13}$$

$$r_{11} = zY(z)|_{z=0} = -2$$

$$r_{12} = (z-1)Y(z)|_{z=1} = \frac{3}{2}$$

$$r_{13} = (z+1)Y(z)|_{z=-1} = \frac{1}{2}$$

και

$$X(z) = -2 + \frac{z}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}$$

συνεπώς

$$x(n) = -2\delta(n) + \frac{3}{2}u_s(n) + \frac{1}{2}(-1)^n, \quad n \geq 0$$

## Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ στο **MATLAB**

Α. Συμβολικός υπολογισμός

```
clear
syms z
X=(z+2)/(z^2-1)
x=iztrans(X)
```

- Αποτέλεσμα:

$$y = -2 * Delta(n) + 3/2 + 1/2 * (-1)^n$$

B. Αριθμητικός υπολογισμός

$b = [12], a = [10 - 1], az = [a0]$

[r,lambda,k]=residue(b,az)

r =

0.5000
1.5000
-2.0000

lambda =

-1.0000
1.0000
0

k = [ ]

## ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \ldots + a_p y(n-p) +$$
$$b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots b_q x(n-q)$$

ή

$$y(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^{p} b_i x(n-i)$$

αρχικές συνθήκες

$$\{y(-1), y(-2), \ldots y(-q)\}$$
$$\{x(-1), x(-2), \ldots x(-p)\}$$

Επίλυση των ΓΔΕ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.

- Υπενθύμηση: ιδιότητα της αριστερής μετατώπισης

$$x(n-L) \Longleftrightarrow z^{-L} X(z) + \sum_{i=1}^{L} x(-i) z^{i-L}$$

$$
\begin{array}{lcl}
Y(z) & = & a_1 \left( z^{-1} Y(z) + y(-1) \right) + \\
 & + & a_2 \left( z^{-2} Y(z) + z^{-1} y(-1) + y(-2) \right) + \\
\vdots & + & \vdots \quad \vdots \\
 & + & a_q \left( z^{-q} Y(z) + \sum_{i=1}^{q} y(-i) z^{i-q} \right)
\end{array}
$$

$$+$$

$$
\begin{array}{cl}
+ & b_0 X(z) + b_1 \left( z^{-1} X(z) + x(-1) \right) + \\
+ & b_2 \left( z^{-2} X(z) + z^{-1} x(-1) + x(-2) \right) + \\
\vdots \quad + & \vdots \quad \vdots \\
+ & b_p \left( z^{-p} X(z) + \sum_{i=1}^{p} x(-i) z^{i-p} \right)
\end{array}
$$

$$Y(z)A(z) = X(z)B(z) + INI(z)$$

όπου

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{q} a_i z^{-i}$$

$$B(z) = \sum_{i=0}^{p} b_i z^{-i}$$

$$INI(z) = INI_Y(z) + INI_X(z)$$

$$INI_Y(z) = \sum_{i=1}^{q} a_i \sum_{j=1}^{q} z^{j-i} y(-j)$$

$$INI_X(z) = \sum_{i=1}^{p} b_i \sum_{j=1}^{q} z^{j-i} x(-j)$$

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} + \frac{INI(z)}{A(z)}$$

- Επίλυση της ΓΔΕ

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(Y(z)\right)$$

- Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Κρουστική απόκριση

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(H(z)\right)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά της ΓΔΕ όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν (γενική λύση).