‘ Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας’. Η διδασκαλία της Υπερβολικής Γεωμετρίας μέσω του μοντέλου Poincare, σε μαθητές Β΄ Λυκείου

Παναγιώτα Κοταρίνου (υπ. Διδ., pkotarinou@uth.gr, 2106891324), **Χαρούλα Σταθοπούλου (επ. Καθηγήτρια, hastath@uth.gr,** 6973201279**)**

Περίληψη
Παρουσιάζουμε την εμπλοκή μιας ομάδας μαθητών λυκείου σε ένα διαθεματικό πρόγραμμα με θέμα την Υπερβολική Γεωμετρία, η διδασκαλία της οποίας έγινε μέσω του μοντέλου Poincare. Για την κατανόηση του μοντέλου αξιοποιήσαμε τις νέες τεχνολογίες και τη μαθηματική λογοτεχνία, ενώ για να ενεργοποιήσουμε τους μαθητές σχεδιάσαμε διδασκαλίες με χρήση τεχνικών Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση (ΔΤΕ). Από την ανάλυση του πραγματολογικού υλικού φάνηκε ότι η χρήση του μοντέλου Poincare λειτούργησε ως ένα αποτελεσματικό διαμεσολαβητικό εργαλείο για την κατανόηση βασικών στοιχείων της Υπερβολικής Γεωμετρίας, ενώ οι τεχνικές δράματος βοήθησαν να διαμορφωθούν νέες πρακτικές σε μια τάξη ενεργών μαθητών οι οποίοι συνεργάστηκαν για να αναπτύξουν μαθηματική γνώση.

Εισαγωγή
‘‘Στις μεγαλύτερες τάξεις οι μαθητές καλούνται να αποδεχθούν τα μαθηματικά ως ένα τυπικό παραγωγικό σύστημα και αυτή η όχι καλά σχεδιασμένη «υπέρβαση» έχει συχνά δυσάρεστες επιπτώσεις τόσο στην κατανόησή τους, όσο και στη διαμόρφωση στάσεων και αντιλήψεων για το συγκεκριμένο αντικείμενο’’ (Κολέζα 2009, σελ. 87). Στην παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η Γεωμετρία παρουσιάζεται ως ένα διαμορφωμένο υλικό για μαθηματική δραστηριότητα και με τη μορφή αυτή δεν ταιριάζει σε αναλυτικά προγράμματα, στα οποία καλούνται οι μαθητές να παίζουν ενεργό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με τον Freudenthal (1971: σελ. 417-418) *‘‘Η παραγωγική δομή της παραδοσιακής γεωμετρίας δεν είχε ποτέ μια πειστική διδακτική επιτυχία... απέτυχε επειδή ο παραγωγικός της χαρακτήρας δεν μπορούσε να επινοηθεί εκ νέου από τον μαθητή αλλά μόνο να επιβληθεί σ’ αυτόν.’’*

Η παρουσίαση της Γεωμετρίας ως ενός ολοκληρωμένου και πλήρους συστήματος δημιουργεί πολύ συγκεκριμένες εικόνες για τη φύση των

Μαθηματικών. Η επαφή των μαθητών με τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες φαίνεται να τους αιφνιδιάζει και να τους δίνει τη δυνατότητα να αντιληφθούν τα Μαθηματικά ως μια δημιουργία υπό συνεχή διαπραγμάτευση, τροποποιώντας με τον τρόπο αυτό τις επιστημολογικές αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά καθώς και αυτή καθαυτή η ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών αποτελεί σημείο καμπής (ρήξης) στην ιστορία και εξέλιξη των Μαθηματικών.

Η διδασκαλία της ενότητας των μη-Ευκλειδείων Γεωμετριών συντελεί στο να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι υπάρχουν αρκετές άλλες Γεωμετρίες και χώροι εκτός της Ευκλείδειας, να καταλάβουν ότι τα Μαθηματικά δεν είναι απόλυτες αλήθειες και να εκτιμήσουν την αξία της λογικής και της αξιωματικής μεθόδου (Kazim, 1988, ο.α στο Θωμαΐδης κ.α., 1989). Η διερεύνηση των ιδιοτήτων των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών και η διαπίστωση ότι διαφορετικά αξιώματα οδηγούν σε διαφορετικά —και συχνά αντίθετα— με γνωστά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας συντελούν στην καλλίτερη κατανόηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος (NCTM. 1989 στο Gray και Sarhangi). Στην καλλίτερη κατανόησή της επιπλέον συντελεί και η μελέτη αντίστοιχων γεωμετρικών εννοιών στα διάφορα συστήματα, καθώς και ο εντοπισμός των ομοιοτήτων και διαφορών τους. (Lénárt 2004a, 2004b).

Σε μια σειρά από έρευνες που αφορούν στη διδασκαλία μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, όπως η Σφαιρική (Lénárt, 1993; Sharp και Heimer, 2002; Van den Brick 1993), Υπερβολική, Ριμάνεια, (Krauss και Okolika, 1977), η Γεωμετρία του Minkowski (Felsager, 2004), Γεωμετρία των Fractal (Sriraman, 2003), Γεωμετρία των taxi (taxi-cab geometry) (Sriraman, 2004), σε όλες τις βαθμίδες της Εκπαίδευσης, αναδείχθηκε μια θετική επίδραση στους μαθητές ή φοιτητές τόσο σε γνωστικό όσο και σε συναισθηματικό επίπεδο.

Η Υπερβολική Γεωμετρία επιλέγεται για εισαγωγή στους μαθητές στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, γιατί αποτελεί το ‘‘πλησιέστερο’’ στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παράδειγμα, διαφοροποιώντας ένα μόνο αξίωμά της το γνωστό 5$^{\text{ο}}$ αξίωμα (Dwyer και Pfeifer, 1999). Προσφέροντας έναν ‘κόσμο’ στον οποίο όλα τα σχήματα είναι αλλαγμένα, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στους ορισμούς των γεωμετρικών αντικειμένων βασισμένων στο σχήμα και με τον τρόπο αυτό να κατανοήσουν τους τυπικούς ορισμούς των σχημάτων (Austin, et al. 1993).

2.Η διδασκαλία της Υπερβολικής Γεωμετρίας και το μοντέλο Poincare

Το 1881 ο Γάλλος μαθηματικός Henri Poincare δημιούργησε ένα από τα πιο δημοφιλή μοντέλα της Υπερβολικής Γεωμετρίας, το γνωστό ως 'Δίσκο του Poincare'. Με ένα Ευκλείδειο μοντέλο της υπερβολικής Γεωμετρίας, ο Poincare αντικατέστησε το άπειρο επίπεδο με έναν πεπερασμένο κυκλικό δίσκο με όριο την περιφέρεια του δίσκου. Αντικατέστησε επίσης πρωταρχικές έννοιες όπως ευθείες, γωνίες, με συγκεκριμένες οντότητες και ερμήνευσε τα αξιώματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας με τους όρους αυτούς. Στο μοντέλο αυτό τα ''σημεία'' είναι τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου, ενώ οι ''ευθείες γραμμές'' είναι ευκλείδεια τόξα κύκλων που τέμνουν την περιφέρεια κατά ορθές γωνίες καθώς και οι διάμετροι του δίσκου. Στο εσωτερικό του υπερβολικού μας 'κόσμου' τα υπόλοιπα σχήματα ορίζονται με το συνήθη τρόπο. Οι γωνίες μετρώνται κατά τον ευκλείδειο τρόπο, δηλαδή, από την γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες γραμμές των καμπυλών, στην κορυφή της γωνίας, ενώ ο ορισμός της απόστασης είναι μη ευκλείδειος (Davis, 2007).

Ο δίσκος του Poincare, όπως και κάθε μοντέλο, μας βοηθάει να διαπιστώσουμε τη συνέπεια της Υπερβολικής Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος. Στο δίσκο του Poincare επαληθεύονται και τα πέντε αιτήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας (με τα τέσσερα πρώτα ίδια με αυτά της Ευκλείδειας) και για το λόγο αυτό αποτελεί ένα μοντέλο της. Δείχνει επομένως ότι η Υπερβολική Γεωμετρία είναι συνεπής, στο βαθμό που είναι και η Ευκλείδεια. *Η συνέπεια της Υπερβολικής γεωμετρίας απέδειξε ότι το 5ο αίτημα είναι ανεξάρτητο από τις άλλες υποθέσεις τις Ευκλείδειας γεωμετρίας και δεν μπορεί να εξαχθεί από τα άλλα τέσσερα αιτήματα. Διότι, αν μπορούσε να εξαχθεί, τότε αυτή η πρόταση στην Υπερβολική Γεωμετρία θα αποτελούσε αντίφαση με το αίτημα των παραλλήλων και θα αποτελούσε μια ασυνέπεια για το μη Ευκλείδειο αυτό σύστημα* (Eves, σελ. 111)

Για τη διδασκαλία της υπερβολικής Γεωμετρίας προτείνεται κυρίως η χρήση του ημισφαιρικού μοντέλου του Poincare (Lénárt, 2004a) ή του δίσκου του Poincare (Thibault et al., 1996). Ειδικά η χρήση του δίσκου του Poincare έχει δοκιμαστεί σε συνδυασμό με χρήση: των νέων τεχνολογιών -- μέσω των λογισμικών Geometer's Sketchpad (Dwyer and Pfeifer, 1999) ή Interactive Java software 'NonEuclid' (Joel Castellanos et al, 1993)-- πινάκων ζωγραφικής του γνωστού Ολλανδού ζωγράφου Cornelius Escher (Menguini, 1989 ο.α στο Furinghetti and Somaglia, 1998), καθώς και με την αξιοποίηση του βιβλίου Flatterland του Ian Stewart το οποίο μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε ερωτήματα οντολογικού και επιστημολογικού περιεχομένου για τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες και γενικότερα για τα Μαθηματικά (Sriraman, 2004a).

Η εργασία που παρουσιάζεται εδώ έχει βασιστεί σε δραστηριότητες οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε μια τάξη Β Λυκείου. Οι περισσότερες δραστηριότητες είχαν βιωματικό χαρακτήρα καθώς αξιοποιήσαμε τεχνικές Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση [i]. Οι μαθητές έπρεπε να δημιουργήσουν 'ραδιοφωνικές εκπομπές' με θέμα τη 'Δισκοχώρα' το μοντέλο δηλ. του Poincare. Για να κατανοήσουν το μοντέλο Poincare και κατ' επέκταση βασικά στοιχεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας και να μπορέσουν να τα παρουσιάσουν μέσα από τις ραδιοφωνικές εκπομπές αξιοποιήσαμε όλα τα προηγούμενα προτεινόμενα μέσα, όπως ένα Java applet, το βιβλίο Flatterland του Ian Stewart καθώς και τα έργα Circle Limit I, II, III, του Escher.

3. Η έρευνα: σχεδιασμός και υλοποίηση

Τα πραγματολογικά δεδομένα για αυτήν την εργασία προέκυψαν από την έρευνα με θέμα ''Η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από τη χρήση τεχνικών της ΔΤΕ: διερεύνηση της επίδρασης της *Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση* στη μάθηση των μαθηματικών σε τάξεις του Λυκείου'', η οποία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο διδακτορικής διατριβής με το ίδιο θέμα. Στην παρούσα εισήγηση εστιάζουμε στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η διδασκαλία μέσω του μοντέλου Poincare και τη χρήση τεχνικών ΔΤΕ επέδρασε στη μάθηση εννοιών της Υπερβολικής Γεωμετρίας

<u>Το πλαίσιο της έρευνας:</u> Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τμήμα με 26 μαθητές-τριες Β΄Λυκείου (16 κορίτσια, 10 αγόρια, εκ των οποίων 17 θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης και 9 θεωρητικής) του Πειραματικού Λυκείου Ιλίου, σε διάρκεια τεσσάρων μηνών (σχολ. έτος 2010-201).

<u>Μέθοδος της έρευνας</u>: για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήσαμε τεχνικές εθνογραφικής έρευνας (παρατήρηση, συνεντεύξεις), ενώ για την παρέμβασή μας στηριχτήκαμε στη λογική του διδακτικού πειράματος (Χρονάκη, 2007). Το διδακτικό πείραμα αφορούσε στη διδασκαλία με χρήση τεχνικών ΔΤΕ της αξιωματικής θεμελίωση της Υπερβολικής Γεωμετρίας μέσω του μοντέλου Poincare και πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια 6 διδακτικών ωρών στα μαθήματα Γεωμετρίας, Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας. Το διδακτικό πείραμα πραγματοποιήθηκε με κύριους στόχους: α) να κατανοήσουν οι μαθητές πώς θεμελιώνεται η Υπερβολική Γεωμετρία, β) να αντιληφθούν το ρόλο του αξιώματος και να επαναπροσδιορίσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία, γ) να αντιληφθούν το ρόλο

του μοντέλου, δ) να κερδίσουν μια βαθύτερη κατανόηση της Γεωμετρίας γενικότερα συγκρίνοντας τις ομοιότητες και διαφορές της Υπερβολικής με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ε) να αλλάξουν τις στερεοτυπικές εικόνες για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Στις δραστηριότητες του project περιλαμβάνονταν:

- Ψηφιακή παρουσίαση για την Υπερβολική Γεωμετρία και το μοντέλο Poincare.
- Δραστηριότητα στο εργαστήρι πληροφορικής με τη βοήθεια του Interactive Java software 'NonEuclid' των Joel Castellanos, και των συνεργατών του.
- Μελέτη του κεφαλαίου 'Δισκοχώρα' από το βιβλίου του Ian Stewart, 'Flatterland'.
- Ραδιοφωνικές εκπομπές για τη 'Δισκοχώρα'.

Αναλυτικότερα πραγματοποιήθηκαν τα εξής:

Α) Στο μάθημα της Νεοελληνικής Γλώσσας (3 ώρες): Παρουσιάστηκε από την ερευνήτρια ψηφιακή παρουσίαση με ιστορικά στοιχεία, βασικές έννοιες και θεωρήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας, στοιχεία του μοντέλου Poincare, καθώς και έργα του Escher. Ακολούθησε συζήτηση σχετική με το τι σημαίνει αξιωματικό σύστημα, για τη συνέπειά του, τη ανεξαρτησία των αξιωμάτων του, καθώς και για την έννοια του μοντέλου. Στη συνέχεια, αφού οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες, τους μοιράστηκε κείμενο με αποσπάσματα από το κεφάλαιο 'Δισκοχώρα' του βιβλίου του Ian Stewart, 'Flatterland', με στόχο να ετοιμάσουν μια ραδιοφωνική εκπομπή με ομώνυμο θέμα. Οι ομάδες μελέτησαν το κείμενο και ετοίμασαν τα κείμενα των ραδιοφωνικών εκπομπών, σε 3 διδακτικές ώρες.

Β) Στο μάθημα της Γεωμετρίας (1 ώρα): Για να κατανοήσουν οι μαθητές το μοντέλο του Poincare, αξιοποιήσαμε τις νέες τεχνολογίες, χρησιμοποιώντας το διαδραστικό Java λογισμικό 'Non Euclid'. Το εργαλείο αυτό, δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να πραγματοποιήσει, μέσω του μοντέλου Poincare, κατασκευές σχημάτων, μετρήσεις αποστάσεων και γωνιών στην Υπερβολική Γεωμετρία και με τον τρόπο αυτό να διερευνήσει έννοιες και θεωρήματα της Γεωμετρίας αυτής. Για τους λόγους αυτούς αποτελεί ένα βοήθημα για τον εκπαιδευτικό στη διδασκαλία της αξιωματικής θεμελίωσης της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Οι μαθητές εργάστηκαν στους υπολογιστές σε ομάδες των δύο (7 ομάδες) ή τριών μαθητών (3 ομάδες), με φύλλα εργασίας. Ξεκίνησαν τη διερεύνηση του μοντέλου, σχεδιάζοντας σημεία, ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες και ευθεία κάθετη σε δοθείσα ευθεία. Επίσης μέτρησαν ένα ευθύγραμμο τμήμα καθώς και μία γωνία και στη συνέχεια έγραψαν τις παρατηρήσεις τους από την κατασκευή κύκλου, ευθυγράμμων τμημάτων ίδιου μήκους και από την μέτρηση των πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Τέλος έγινε αξιωματική θεμελίωση της Υπερβολικής Γεωμετρίας μέσω του μοντέλου.

Δ) Η παρουσίαση των ραδιοφωνικών εκπομπών: Παρουσιάστηκαν έξι 'ραδιοφωνικές εκπομπές' με την εξής μορφή: ένας ραδιοφωνικός παραγωγός συζητά με καλεσμένους της εκπομπής ή με κατοίκους της δισκοχώρας, ή θέτει κουίζ στους ακροατές της ή δέχεται τηλεφωνήματα από ακροατές. Οι μαθητές πραγματοποίησαν τις παρουσιάσεις τους 'κρυμμένοι' πίσω από ένα παραβάν για να μην έχουν πρόβλημα να εκτεθούν σε κοινό.

4. Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Α. Η ανάλυση των φύλλων εργασίας: Η ανάλυση των φύλλων εργασίας των μαθητών έδειξε ότι οι μαθητές κατανόησαν τις βασικές έννοιες του μοντέλου, με την πλειοψηφία των ομάδων να απαντά σωστά στα περισσότερα ερωτήματα που αφορούσαν στην ευθεία, τον κύκλο, τη φαινομενική σμίκρυνση των ευθυγράμμων τμημάτων όσο απομακρύνονται από το κέντρο του δίσκου, τη γωνία και το μέτρο της και τέλος το τρίγωνο (4 ομάδες απάντησαν στα 4 ερωτήματα, 4 σε 3 ερωτήματα και μόνον 2 σε 2 ερωτήματα). Ορισμένοι από τους μαθητές μάλιστα έδωσαν επιπλέον και ερμηνείες για ορισμένα φαινόμενα, τις οποίες είχαν διαβάσει στο βιβλίο Flatterland και είχαμε συζητήσει σε προηγούμενη διδακτική ώρα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε αναλυτικά τις παρατηρήσεις των μαθητών κατά την κατασκευή διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων.

Κατά την κατασκευή του κύκλου όλες οι ομάδες παρατήρησαν ότι κάτι διαφορετικό συμβαίνει με τους κύκλους στο μοντέλο Poincare. Παρατήρησαν δηλ. ότι το κέντρο του δε βρίσκεται στο σημείο που θα περίμενε κανείς, δεν ταυτίζεται δηλ. με το κέντρο του Ευκλείδειου κύκλου και έγραψαν γι' αυτό τα εξής: '*το κέντρο του κύκλου δεν είναι το ίδιο με τον κύκλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας', 'το κέντρο του δεν είναι όπως σε έναν συνηθισμένο κύκλο'.* Δύο ομάδες προσπάθησαν επιπλέον να το αιτιολογήσουν: *'τα κέντρα είναι απομακρυσμένα όσο μετακινούμαστε προς την περιφέρεια. Αυτό γίνεται καθώς κατά μήκος της περιφέρειας 'ψύχεται'-σμικρύνεται', 'Κάθε κύκλος δεν έχει το ίδιο κέντρο όπως ο κύκλος στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αυτό γίνεται γιατί όσο απομακρυνόμαστε απ' το κέντρο, φαινομενικά αλλάζουμε εμείς οι ίδιοι, αλλά όχι οι αποστάσεις των σημείων του κύκλου.'* Σε επόμενο ερώτημα, ζητήθηκε να μετρήσουν διάφορες ακτίνες ενός κύκλου. Και οι 8 ομάδες που απάντησαν, δίνουν την ίδια απάντηση γράφοντας ότι οι ακτίνες είναι ίσες αν και φαινομενικά είναι άνισες. *'Αν και οι ακτίνες έχουν το ίδιο μήκος φαίνονται διαφορετικές και όχι ίσες μεταξύ τους', ' είναι ίσες παρόλο που το κέντρο του δε βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου κατά την Ευκλείδεια Γεωμετρία'.* Όταν τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν στον δίσκο ευθύγραμμα τμήματα ίδιου μήκους, όλες οι ομάδες εκτός από μία, παρατήρησαν ότι τα ευθύγραμμα τμήματα, αν και είναι ίδιου μήκους, φαίνονται άνισα. Μερικές από τις απαντήσεις τους, άλλες εκφρασμένες πότε με καθαρά τυπική μαθηματική γλώσσα πότε όχι, είναι: *'Σχεδιάσαμε ευθύγραμμα τμήματα ίδιου μήκους και παρατηρήσαμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα προς την περιφέρεια φαίνεται πιο μικρό, σε αντίθεση με το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κοντά στο κέντρο του κύκλου. Έχουν το ίδιο μήκος αλλά μικραίνει το όργανο μέτρησης', 'Τα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία πλησιάζουν στο κέντρο του κύκλου είναι μεγαλύτερα από όσο απομακρύνονται από αυτό σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία'.* Τέλος σχεδιάζοντας ένα τρίγωνο, πέντε από τις ομάδες έκαναν τις μετρήσεις των γωνιών του τριγώνου και διαπιστώνουν ότι είναι μικρότερο από 180^o, ενώ οι υπόλοιπες ομάδες δεν πρόλαβαν να απαντήσουν σ' αυτήν την ερώτηση

Μερικές ομάδες προσπάθησαν να σχεδιάσουν ορθογώνιο σύμφωνα με τον Ευκλείδειο ορισμό του σχήματος. Η διαπίστωση ότι δεν υπάρχουν ορθογώνια στον Υπερβολικό κόσμο τους εξέπληξε.

Β. Ανάλυση των ραδιοφωνικών εκπομπών ως προς το γνωστικό πεδίο: Από την ανάλυση των κειμένων των ραδιοφωνικών εκπομπών που ετοίμασαν οι μαθητές παρατηρούμε ότι δύο ομάδες στις εκπομπές τους, έκαναν πληρέστατες περιγραφές του μοντέλου Poincare, αναφερόμενες στο πώς ορίζονται ο δίσκος Poincare και οι ευθείες του, στη φαινομενική μείωση του μήκους και στα αξιώματα ή στις γωνίες και το μέτρο τους. Οι υπόλοιπες ομάδες αναφέρθηκαν σε ορισμένες μόνο έννοιες—σε αυτές που έκριναν σημαντικές ή τους έκαναν εντύπωση.

Αυτό που έκανε τη μεγαλύτερη εντύπωση στους μαθητές, γιατί το αναφέρουν οι πέντε από τις έξι ομάδες, είναι η φαινομενική μείωση του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος.

'Στην υπερβολική Γεωμετρία όσο περισσότερο απομακρυνόμαστε από την περιφέρεια , τόσο μικραίνει η μονάδα μέτρησης, χωρίς να αλλοιώνεται φυσικά το πραγματικό μήκος της', '... γιατί τα αντικείμενα συρρικνώνονται ανάλογα με τη θερμοκρασία. Στην περιφέρεια η θερμοκρασία είναι μηδέν βαθμούς Κελσίου και όσο πάει προς τα κείθε συρρικνώνονται', 'Τα αντικείμενα της δισκοχώρας καθώς απομακρύνονται προς το άπειρο, συρρικνώνονται, αν και αυτό δε μπορεί να το αντιληφθεί το άτομο που κινείται στη δισκοχώρα γιατί, καθώς μικραίνει το αντικείμενο, μικραίνει και το μέτρο. Οπότε, σε κάθε μέτρηση έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα'.

• Η έννοια της ευθείας στο δίσκο Poincare αναφέρεται από τέσσερεις ομάδες οι οποίες μάλιστα δίνουν και το σωστό ορισμό.
'Ορίζοντας λοιπόν στο μοντέλο αυτό ως ευθείες τα τόξα που τέμνουν την περιφέρεια κατά ορθές γωνίες , φανταστείτε αγαπητοί μας έναν κύκλο και μέσα σε αυτό καμπύλες', 'Στην Υπερβολική Γεωμετρία ο συντομότερος δρόμος προσδιορίζεται στις καμπύλες γραμμές', 'Δηλ. αυτό που στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ορίζουμε ως καμπύλη, στην Υπερβολική είναι ευθεία και το αντίστροφο'.

• Τρεις ομάδες αναφέρονται στην έννοια του Δίσκου Poincare, δίνοντας το σωστό ορισμό.
'Το μοντέλο της 'Φανταστικής Γεωμετρίας', γνωστό και ως δίσκος του Poincare. ορίζεται στο επίπεδο, ως το εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου χωρίς την περιφέρειά του', 'Εντύπωση μου προκάλεσε το γεγονός ότι στη δισκοχώρα υπάρχουν μόνο δύο διαστάσεις και πως αν και από μακριά η χώρα φαίνεται ότι έχει ορισμένη έκταση, στην πραγματικότητα φτάνοντας εκεί αντιλαμβάνεσαι ότι είναι άπειρη'.

• Δύο από τις ομάδες αναφέρονται στην παραλληλία των ευθειών τονίζοντας την χαρακτηριστική ιδιότητα ότι οι παράλληλες ευθείες δεν είναι ισαπέχουσες.
'Η απόσταση ανάμεσα στις παράλληλες δεν είναι σταθερή γιατί τα αντικείμενα συρρικνώνονται ανάλογα με τη θερμοκρασία', 'Δύο ευθείες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι παράλληλες, όταν οι αποστάσεις μεταξύ τους είναι ίσες. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει. στην Υπερβολική Γεωμετρία, τουλάχιστον φαινομενικά,_αλλά η απόσταση στις παράλληλες γραμμές πλησιάζει όλο και περισσότερο στο μηδέν, χωρίς όμως να συναντιούνται ποτέ'.

• Δύο ομάδες μιλούν για τα αιτήματα της Υπερβολικής Γεωμετρίας
'Οι θεμελιωτές της Υπερβολικής Γεωμετρίας απέρριψαν το 5^{o} αίτημα δεχόμενοι ότι από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες παράλληλες', 'Ισχύουν και αυτά (τα άλλα τέσσερα αιτήματα του Ευκλείδη) και οι 28 πρώτες προτάσεις. Βέβαια, από την 28 πρόταση και μετά δεν ισχύουν όλες οι προτάσεις'.

• Μία από τις ομάδες αναφέρεται στο σχήμα του κύκλου.
'Για παράδειγμα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ο κύκλος έχει το κέντρο του σε ένα σημείο που όλες οι ευθείες ισαπέχουν, στην Υπερβολική Γεωμετρία το κέντρο του κύκλου τείνει στην περιφέρεια, παρόλα αυτά οι ευθείες πάλι ισαπέχουν', 'Σύμφωνα με την Ευκλείδεια Γεωμετρία το σημείο που ορίζουμε ως κέντρο του κύκλου, βρίσκεται πράγματι στο κέντρο του κύκλου και δεν πλησιάζει τον κύκλο'.

- Τέλος μία ομάδα αναφέρθηκε στο μέτρο της γωνίας:

'Το μέτρο της γωνίας αντιστοιχεί στο Ευκλείδειο μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες γραμμές στην κορυφή των δύο τεμνόμενων καμπυλών'.

Γ. Συνεντεύξεις των μαθητών

Οι μαθητές, 2 μήνες σχεδόν μετά τις δραστηριότητες, απάντησαν στο πλαίσιο συνεντεύξεων (16 συνεντεύξεις) σε ερωτήματα σχετικά με την Υπερβολική Γεωμετρία. Φάνηκε να έχουν εντυπωσιαστεί σε τέτοιο βαθμό με το δίσκου του Poincare ώστε τον ταύτισαν πλήρως με τον υπερβολικό χώρο. Σε ερωτήσεις γενικά για τον υπερβολικό χώρο οι απαντήσεις των μαθητών περιορίζονταν σε αναφορές πάνω στο συγκεκριμένο μοντέλο. Η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ότι εντυπωσιάστηκε από το σχήμα των ευθειών (11 απαντήσεις)

'Καταρχήν οι γραμμές οι ευθείες θεωρούνταν ότι ήταν καμπύλες. Για όσους βρίσκονταν στον υπερβολικό κόσμο σε εισαγωγικά, φαινόταν σαν να είναι μια κανονική ευθεία, δεν είχε στην ουσία καμία αλλαγή, απλά υπήρχε θέμα στο πώς βλέπεις. Τα βλέπεις εξωτερικά ή από μέσα', 'Είναι τελείως διαφορετικό αυτό που λέμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ευθεία και αυτό που λέμε στην Υπερβολική Γεωμετρία ευθεία'.

Το δεύτερο που τους εντυπωσίασε ήταν η φαινομενική μεταβολή μεγέθους, έστω και αν μερικοί μαθητές διατύπωσαν λανθασμένα το πότε φαίνονταν να μικραίνει το μέγεθος.

' Ήτανε ότι καθώς πηγαίναμε προς την περιφέρεια της δισκοχώρας ήτανε πιο μικρά, τα μίκραινε το μέγεθος του σχήματος αλλά μίκραινε και το μέτρο, οπότε θεωρούνταν ίσο με της υπόλοιπης', 'Διέφερε το μέγεθος, τουλάχιστον στο μάτι μας όσο επεκτεινόταν προς το κέντρο', 'Ότι είναι κοντά στο κέντρο είναι πιο μεγάλα στο μήκος'.

Δύο μαθητές μόνο αναφέρονται στις παράλληλες:

'Οι παράλληλες ήταν δύο ημικύκλια, ουσιαστικά, κατά κάποιον τρόπο... Πάλι βέβαια σε συνδυασμό με τις γνώσεις που είχες από τη Γεωμετρία ότι δεν πρέπει να τέμνονται'

Αρκετοί μαθητές αναφέρονται στο τρίγωνο, γιατί τους εντυπωσίασε το άθροισμα των γωνιών του και το σχήμα των πλευρών του αθροίσματος:

'Γιατί στην Ευκλείδεια είναι 180 στην Υπερβολική είναι πάνω από 180, ενώ στη σφαιρική είναι μικρότερο από 180', 'Γενικώς τα σχήματα ήταν πιο περίεργα. Ας πούμε, απ' ότι θυμάμαι βλέπαμε τρίγωνα που δεν είχαν 180 μοίρες, μου φαίνεται; Θέλω να πω ότι με ξάφνιασε γιατί ήμουνα συνηθισμένος σε αυτό και γενικά όλα τα παιδιά ανεξαρτήτως άμα είναι καλά

ή όχι αυτό το ξέρανε. Γενικά εγώ πιστεύω, όλους μας ξάφνιασε αυτό στην αρχή'.
Μερικές άλλες παρατηρήσεις των μαθητών ήταν:
' Αλλάζοντας το 5^o αίτημα αλλάζει στην ουσία όλη η θεωρία της γεωμετρίας'
'Η διαφορετική οπτική γωνία που θα έπρεπε να κοιτάξεις το οτιδήποτε'
'Ειδικά εκείνο το εύρημα με το τετράγωνο. Δε θα ξεχάσουμε ποτέ ότι δεν υπάρχει τετράγωνο'
Οι μαθητές έχοντας κατανοήσει τις έννοιες μπορούσαν να τις ενσωματώσουν στο κείμενο των ραδιοφωνικών εκπομπών.
'Ναι, γιατί είχα καταλάβει, όταν ήταν να πω το κείμενο είχα καταλάβει τι έλεγε, οπότε μου ήταν και πιο εύκολο ας πούμε αν δεν τα θυμάμαι ακριβώς όπως τα έλεγε μέσα, επειδή άμα δεν τα είχα καταλάβει θα έπρεπε να τα πω παπαγαλία , ενώ εκεί τα είχα καταλάβει και μπορούσα να τα αλλάξω και λίγο'.

Ορισμένες τελικές επισημάνσεις

Παρουσιάσαμε την εμπλοκή μιας ομάδας μαθητών λυκείου σε ένα διαθεματικό πρόγραμμα με θέμα την Υπερβολική Γεωμετρία, η διδασκαλία της οποίας έγινε μέσω του μοντέλου Poincare. Για την κατανόηση του μοντέλου αξιοποιήσαμε τις νέες τεχνολογίες και τη μαθηματική λογοτεχνία, ενώ για να ενεργοποιήσουμε τους μαθητές σχεδιάσαμε διδασκαλίες με χρήση τεχνικών Δραματικής Τέχνης στην Εκπαίδευση (ΔΤΕ). Από την ανάλυση του πραγματολογικού υλικού φάνηκε ότι η χρήση του μοντέλου Poincare λειτούργησε ως ένα αποτελεσματικό διαμεσολαβητικό εργαλείο για την κατανόηση βασικών στοιχείων της Υπερβολικής Γεωμετρίας, ενώ οι τεχνικές δράματος βοήθησαν να διαμορφωθούν νέες πρακτικές σε μια τάξη ενεργών μαθητών οι οποίοι συνεργάστηκαν για να αναπτύξουν μαθηματική γνώση. Βασικός στόχος ήταν να εμπλέξουμε με ενεργό τρόπο τους μαθητές ώστε να κατανοήσουν βασικές έννοιες της Υπερβολικής Γεωμετρίας και παράλληλα να επαναδιαπραγματευτούν έννοιες από την ευκλείδεια γεωμετρία. Οι μαθητές μέσα από τη συνεργασία και βιωματικές διαδικασίες κατάφεραν να αντιληφθούν το μοντέλο Poincare και μέσα από αυτό να κατανοήσουν βασικά στοιχεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας, διευρύνοντας μ' αυτόν τον τρόπο την ιδέα που είχαν διαμορφώσει για τη φύση των μαθηματικών. Όπως χαρακτηριστικά απάντησε ένας από τους μαθητές μας
'*Όταν το βιώσεις σου μένει περισσότερο. Γιατί πρόκειται για έννοιες τις οποίες δε μπορείς να τις καταλάβεις απλώς διαβάζοντας μερικές γραμμές σ' ένα βιβλίο, για παράδειγμα δε θα καταλαβαίναμε με τίποτα, ούτε ποια είναι η Υπερβολική Γεωμετρία ούτε ποια είναι η Ελλειπτική Γεωμετρία αν δεν βλέπαμε την Ελλειπτική και την Υπερβολική Γεωμετρία στα μοντέλα. Αν*

μέναμε μόνο στο ιστορικό σημείωμα, απλά είναι κάποιες γραμμές με ορισμούς που εξηγούν κάποια πράγματα, δύσκολα θα καταλαβαίναμε'.

Βιβλιογραφία

Άλκηστις, Κ. (2000). *Η δραματική τέχνη στην εκπαίδευση,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Austin, Joe, Castellanos, Joel, Darnell, Ervan, Estrada, Maria (1993).*"An Empirical Exploration of the Poincaré Model for Hyperbolic Geometry".* Mathematics and Computer Education, Vol.27, No 1.

Castellanos, J.; Austin, J.; Darnell, E. and Estrada, M., *NonEuclid, Interactive Java Software* http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html (6/9/2011)

Davis, Ronald (2007). *Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών,* Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Dunham, Douglas (2008). Use of Hyperbolic geometry in the creation of Hyperbolic pattens, *13th International Conference on Geometry and Graphics*, August 4th-8th , 2008, Dresden, Germany. http://www.d.umn.edu/~ddunham/dunicgg08.pdf (6/9/2011)

Dwyer, Marlene and Pfeifer, Richard (1999). Exploring Hyperbolic Geometry with the Geometer's Sketchpad, *Mathematics Teacher,* vol.92, no.7, pp.632-7, October 1999.

Eves, Howard (1983). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, μετά το 1650,* Αθήνα, Τροχαλία

Felsager, Bjørn (2004). Introducing Minkowski-geometry using Dynamic Geometry Programs, Topic Study Group 10 at ICME-10, Copenhagen, July 2004.

Freudenthal, Hans (1971). Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics,* 3, 413-435.

Furinguetti, Fulvia; Somaglia, Annamaria (1998). History of Mathematics in School across Disciplines, *Mathematics in School,* 27, no4, 48-51.

Gray, Anileen και Sarhangi, Reza, *A proposal for the introduction of Non-Euclidean Geometry into the secondary School Geometry Curriculum* http://pages.towson.edu/gsarhang/Modules%20for%20Non-Euclid%201.doc (6/9/2011)

Kazim, Maassoyma (1988). Οι μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες και η υιοθέτησή τους από το σχολικό σύστημα, ICME 6.

Κολέζα Ευγενία (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών,* Τόπος, Αθήνα

Krauss, Peter A.; Okolica, Steven L. (1977). Neutral and Non-Euclidean Geometry-A High School Course, *Mathematics Teacher,* 70, 4, 310-314.

Lénárt, Istvan (2004a). Sing Mathematics together: Thoughts on the future of a school subject, *For the Learning of Mathematics,* vol. 24, No.2, pp.22-26.

Lénárt, Istvan (2004b) The plane-sphere project, *Mathematics Teaching,* no. 187, pp.22-6.

Lénárt, Istvan (1993). Alternative models on the drawing ball, *Educational Studies in Mathematics,* 24, pp.277-312.

Menguini, M. (1989). Some remarks on the didactic use of the history of mathematics, in L., Bazzini and H.G., Steiner, (Eds.) *Proceedings of the First. Italian – German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics*, Pavia, 1989.

Sharp, Janet and Heimer, Corrine (2002). What happens to Geometry on a Sphere? *Mathematics Teaching in the Middle School*, v8 n4 p182-88 Dec 2002.

Sriraman, B. (2003). Mathematics and Literature. Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam? *Australian Mathematics Teacher, v59, n4, p26-31.*

Sriraman, B. (2004). Mathematics and Literature (the sequel) Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy, *Australian Mathematics Teacher,* v60, n1, p26-31.

Sriraman, B. (2004a). Re-creating the Renaissance, *"10th International Congress on Mathematical Education",* July 4-17 2004, Copenhagen, Denmark, TG21.

Stewart, Ian (2002). *Flaterland, Η περιπέτεια των πολλών διαστάσεων,* Αθήνα, Εκδοτικός Οίκος Π. Τραυλός.

Thibault, Marie-France and Robert La Barre (1996). Some Hyperbolic Geometry with Cabri-Geometre in Jean-Marie Laborde (Edit.) *Intelligent Learning Enviroments: The Case of Geometry,* NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 117) Springer

Χρονάκη, Α. (2008). Το 'διδακτικό πείραμα': Μελετώντας τη διαδικασίαμάθησης και διδασκαλίας, στο Β. Σβολόπουλος (επιμ.) *Σύνδεση εκπαιδευτικής έρευνας και πράξης,*Αθήνα, Ατραπός, 371–401.

Van Den Brink (1993). Different aspects in designing Mathematics Education: Three examples from the Freudenthal Institute, *Educational Studies in Mathematics,* 24. pp.35-64

[i] Η Δραματική Τέχνη στην Εκπαίδευση (ΔΤΕ) αποτελεί μια αυστηρά δομημένη παιδαγωγική διαδικασία η οποία χρησιμοποιεί ασκήσεις και τεχνικές της δραματικής τέχνης και στην οποία η έμφαση δίνεται στη διαδικασία και όχι στο τελικό προϊόν (Άλκηστις 2000).