ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η κατανομή πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής εξετάσθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται διεξοδικά οι σημαντικότερες διακριτές κατανομές. Πιο συγκεκριμένα διατυπώνονται τα πιο βασικά και χρήσιμα στοχαστικά πρότυπα (μοντέλα) καθ' ένα από τα οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή μιας ευρείας κλάσης στοχαστικών (τυχαίων) πειραμάτων ή φαινομένων. Ορίζονται διακριτές τυχαίες μεταβλητές και σε κάθε περίπτωση προσδιορίζεται η κατανομή τους, υπολογίζοντας τη συνάρτηση πιθανότητας αυτής. Επίσης υπολογίζονται η μέση τιμή και η διασπορά της κατανο-μής και αποδεικνύονται χρήσιμες ιδιότητές της. Για τη διευκόλυνση των εφαρμογών γίνεται χρήση των πινάκων των κατανομών αυτών. Στο επόμενο κεφάλαιο μελετώνται με τον ίδιο διεξοδικό τρόπο οι σπουδαιότερες συνεχείς κατανομές.

2. ΚΑΤΑΝΟΜΗ BERNOULLI ΚΑΙ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

2.1. Κατανομή Bernoulli

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και ένα ενδεχόμενο A στον Ω. Αν A' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A στον Ω, τότε τα ενδεχόμενα (A, A') αποτελούν μια διαίρεση του δειγματικού χώρου Ω, εφ' όσον $A \cap A' = \varnothing$ και $A + A' = \Omega$. Το ενδεχόμενο A χαρακτηρίζεται συνήθως ως επιτυχία και το A' ως αποτυχία. Παριστάνοντας με ε την επιτυχία και α την αποτυχία ο δειγματικός χώρος δύναται να παρασταθεί ως $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$. Ένα τέτοιο τυχαίο πείραμα καλείται *δοκιμή Bernoulli*. Έστω

$$P(\{\varepsilon\}) = p\,,\ P(\{\alpha\}) = 1 - P(\{\varepsilon\}) = 1 - p = q\,, \tag{2.1}$$

και ας θεωρήσουμε την ακόλουθη τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 2.1. *Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$). Η κατανομή της δίτιμης (μηδέν-ένα) τυχαίας μεταβλητής X καλείται (μηδέν-ένα) κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.*

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής, όπως επίσης η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Bernoulli δίδονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. *Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδεται από την*

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}\,,\ x = 0,1\,. \tag{2.2}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ q, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x<\infty.\end{cases} \tag{2.3}$$

Η μέση τιμή και διασπορά της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίδονται από τις

$$\mu=E(X)=p\,,\ \sigma^2=V(X)=pq\,. \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Ο αριθμός X των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli είναι μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον $\Omega=\{\alpha,\varepsilon\}$ με $X(\alpha)=0$, $X(\varepsilon)=1$, και έτσι συνάγουμε τις πιθανότητες

$$P(X=0)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=0\})=P(\{\alpha\})=q\,,$$

$$P(X=1)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)=1\})=P(\{\varepsilon\})=p\,,$$

οι οποίες συνεπάγονται τη συνάρτηση πιθανότητας (2.2). Η συνάρτηση κατανομής (2.3) προκύπτει άμεσα από τη (2.2) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{1}xp^xq^{1-x}=p$$

και η διασπορά αυτής συνάγεται ως εξής:

$$\sigma^2=V(X)=E[(X-\mu)^2]=\sum_{x=0}^{1}(x-p)^2p^xq^{1-x}=p^2q+q^2p=pq\,.$$

2.2. Διωνυμική κατανομή

Ορισμός 2.1. *Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q=1-p$),*

$$P_i(\{\varepsilon\})=p\,,\ P_i(\{\alpha\})=q=1-p\,,\ i=1,2,\ldots,\nu,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική με παραμέτρους ν και p.

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της διωνυμικής κατανομής συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους ν και p δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=\binom{\nu}{x}p^xq^{\nu-x}\,,\ x=0,1,\ldots,\nu \tag{2.5}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{[x]}\binom{\nu}{\kappa}p^\kappa q^{\nu-\kappa}, & 0\le x<\nu,\\ 1, & \nu\le x<\infty,\end{cases} \tag{2.6}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Απόδειξη. Ο δειγματικός χώρος του συνθέτου τυχαίου πειράματος των ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli είναι, σύμφωνα με το Εδάφιο 9 του Κεφ. 1, το ν-πλό καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$ με τον εαυτό του,

$$\Omega^{\nu} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{\nu}) : \omega_i \in \{\alpha, \varepsilon\},\ i = 1, 2, ..., \nu\}.$$

Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ να πραγματοποιηθούν x επιτυχίες στις ν δοκιμές περιλαμβάνει $\binom{\nu}{x}$ στοιχειώδη ενδεχόμενα, όσα και ο αριθμός των επιλογών των x θέσεων για τις επιτυχίες από τις ν θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο στοιχειώδες ενδεχόμενο, επειδή οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες, έχει πιθανότητα

$$p^x q^{\nu - x}.$$

Επομένως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x},\ x = 0, 1, ..., \nu.$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0,\ x = 0, 1, ..., \nu,\ f(x) = 0,\ x \notin \{0, 1, ..., \nu\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα,

$$\sum_{x=0}^{\nu} f(x) = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x} = (p + q)^{\nu} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής (2.6) προκύπτει άμεσα από τη (2.5) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Οι πίνακες της συνάρτησης πιθανότητας (2.5) και της συνάρτησης κατανομής (2.6) της διωνυμικής κατανομής διευκολύνουν τους υπολογισμούς που περιλαμβάνουν διωνυμικές πιθανότητες και χρησιμοποιούνται ευρύτατα, ιδιαίτερα στη Στατιστική. Ο Πίνακας 1 του παραρτήματος δίδει τη συνάρτηση πιθανότητας (2.5) για $\nu = 1, 2, ..., 20$ και $p = 0{,}05,\ 0{,}10, ..., 0{,}50$. Στην περίπτωση που $p > 0{,}5$ οπότε $q = 1 - p < 0{,}5$, χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x} = \binom{\nu}{\nu - x} q^{\nu - x} p^{\nu - (\nu - x)}. \tag{2.7}$$

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της διωνυμικής κατανομής.

Θεώρημα 2.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (2.5). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά της αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \nu p,\ \sigma^2 = V(X) = \nu pq \tag{2.8}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\nu} x \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x\binom{\nu}{x} = x\frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} = \nu\frac{(\nu-1)!}{(x-1)!(\nu-x)!} = \nu\binom{\nu-1}{x-1}$$

παίρνουμε

$$\mu = E(X) = \nu\sum_{x=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{x-1}p^x q^{\nu-x} = \nu p\sum_{y=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{y}p^y q^{\nu-1-y}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα συμπεραίνουμε ότι

$$\mu = E(X) = \nu p(p+q)^{\nu-1} = \nu p .$$

Επίσης

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \sum_{x=2}^{\nu}(x)_2\binom{\nu}{x}p^x q^{\nu-x} = \sum_{x=0}^{\nu}x(x-1)\binom{\nu}{x}p^x q^{\nu-x}$$

και επειδή

$$x(x-1)\binom{\nu}{x} = x(x-1)\frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} = \nu(\nu-1)\frac{(\nu-2)!}{(x-2)!(\nu-x)!} = \nu(\nu-1)\binom{\nu-2}{x-2}$$

παίρνουμε

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \nu(\nu-1)\sum_{x=2}^{\nu}\binom{\nu-2}{x-2}p^x q^{\nu-x} = \nu(\nu-1)p^2\sum_{y=0}^{\nu-2}\binom{\nu-2}{y}p^y q^{\nu-2-y}$$

$$= \nu(\nu-1)p^2(p+q)^{\nu-2} = \nu(\nu-1)p^2 .$$

Επομένως

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p - \nu^2 p^2 = \nu pq .$$

Παράδειγμα 2.1. Έστω ότι σε ν ασθενείς μετρείται η πίεση του αίματος πριν και μετά τη χορήγηση ενός ορισμένου φαρμάκου και τα αποτελέσματα είναι (y_1, z_1), $(y_2, z_2), \ldots, (y_\nu, z_\nu)$. Αν $y_\kappa > z_\kappa$ θεωρούμε ότι η κ–οστή δοκιμή είχε αποτέλεσμα επιτυχία, ενώ αν $y_\kappa \le z_\kappa$ αποτυχία, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$. Αν το φάρμακο δεν έχει καμμιά επίδραση τότε η πιθανότητα επιτυχίας p είναι ίση με την πιθανότητα αποτυχίας $q = 1 - p$ και επομένως $p = 1/2$.

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών στις ν δοκιμές. Τότε, υποθέτοντας ότι το φάρμακο δεν έχει καμμιά επίδραση στην πίεση του αίματος,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}, \; x = 0, 1, \ldots, \nu .$$

Σημειώνουμε ότι πολύ μικρός αριθμός επιτυχιών αποτελεί ένδειξη ότι το φάρμακο δεν έχει καμμία επίδραση στην πίεση. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) 2 το πολύ επιτυχιών και (β) 7 τουλάχιστον επιτυχιών στην περίπτωση $\nu = 8$ ασθενών.

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 1 του παραρτήματος παίρνουμε

$$P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2}\binom{8}{x}(0{,}5)^8 = 0{,}0039 + 0{,}0312 + 0{,}1094 = 0{,}1445 ,$$

$$P(X \ge 7) = \sum_{x=7}^{8}\binom{8}{x}(0{,}5)^8 = 0{,}0312 + 0{,}0039 = 0{,}0351 .$$

Παράδειγμα 2.2. Ας θεωρήσουμε έναν αρχικό πληθυσμό στον οποίο οι γονότυποι AA, $A\alpha$ και $\alpha\alpha$ εμφανίζονται με πιθανότητες p, $2q$ και r, ανεξάρτητα φύλου. Έστω ότι καθένας από τους γονείς (πατέρας και μητέρα) κληρονομεί, σύμφωνα με το νόμο κληρονομικότητας του Mendel, σε κάθε παιδί του ένα από τα γονίδια A και α.

Ας θεωρήσουμε ένα ζευγάρι (άνδρα και γυναίκα) από τον πληθυσμό αυτό το οποίο αποκτά ν παιδιά και έστω ότι το ενδιαφέρον για κάθε παιδί εστιάζεται στο κατά πόσον έχει το γονότυπο AA. Χαρακτηρίζοντας το ενδεχόμενο Γ_1 όπως ένα παιδί έχει το γονότυπο AA ως επιτυχία και το συμπληρωματικό του ως αποτυχία, η γέννηση ενός παιδιού δύναται να θεωρηθεί ως δοκιμή Bernoulli με πιθανότητες (βλ. Παράδειγμα 9.2 του Κεφ. 1)

$$p_1 = P(\{\varepsilon\}) = P(\Gamma_1) = (p+q)^2 \,,\ q_1 = P(\{\alpha\}) = P(\Gamma_1') = 1-(p+q)^2 \,.$$

Η σειρά των ν γεννήσεων αποτελεί μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli και έτσι ο αριθμός X των παιδιών που έχουν το γονότυπο AA ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \binom{\nu}{x} p_1^x q_1^{\nu-x} \,,\ x = 0,1,\ldots,\nu \,.$$

Στη μερική περίπτωση που οι πιθανότητες των τριών γονοτύπων στον αρχικό πληθυσμό είναι $p = q = r = 1/4$, οπότε $p_1 = 1/4$, $q_1 = 3/4$, ο αριθμός X των παιδιών που έχουν το γονότυπο AA, σε σύνολο $\nu = 4$ παιδιών, έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x} \,,\ x = 0,1,2,3,4 \,.$$

Η πιθανότητα όπως ένα τουλάχιστο από τα 4 παιδιά έχει το γονότυπο AA είναι ίση με

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256} = 0{,}6834 \,.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών με το γονότυπο AA είναι

$$\mu = E(X) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \,.$$

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗ PASCAL

3.1. Γεωμετρική κατανομή

Ορισμός 3.1. *Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q),*

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p \,,\ P_i(\{\alpha\}) = q = 1-p \,,\ i = 1,2,\ldots,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται γεωμετρική με παράμετρο p.

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της γεωμετρικής κατανομής συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. *Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p δίδεται από την*

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \ x = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1 - q^{[x]}, & 1 \le x < \infty, \end{cases} \tag{3.2}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$, η πρώτη επιτυχία να πραγματοποιηθεί στη x-οστή δοκιμή, περιλαμβάνει ένα μόνο δειγματικό σημείο (στοιχειώδες ενδεχόμενο) και συγκεκριμένα το

$$\{(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \varepsilon)\},$$

όπου στις $x-1$ θέσεις (δοκιμές) έχει αποτυχία και στη x-οστή θέση (δοκιμή) έχει επιτυχία. Χρησιμοποιώντας ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες τούτο έχει πιθανότητα

$$q^{x-1}p.$$

Επομένως η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X είναι η

$$f(x) = P(X = x) = pq^{x-1}, \ x = 1, 2, \ldots.$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \ x = 1, 2, \ldots, \ f(x) = 0, \ x \notin \{1, 2, \ldots\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του αθροίσματος των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου (σειράς),

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p(1-q)^{-1} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής (3.2) προκύπτει άμεσα από τη συνάρτηση πιθανότητας (3.1) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της γεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 3.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (3.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}, \ \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2} \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή και η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της γεωμετρικής κατανομής δίδονται από τις

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}$$

και

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \sum_{x=2}^{\infty} (x)_2 \, pq^{x-1} = pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-2}.$$

Παρατηρούμε ότι, παραγωγίζοντας διαδοχικά τη γεωμετρική σειρά

$$\sum_{x=0}^{\infty} q^x = (1-q)^{-1},$$

συνάγουμε τις σχέσεις

$$\sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} = (1-q)^{-2}, \quad \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) q^{x-2} = 2(1-q)^{-3}.$$

Επομένως

$$\mu = E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{p},$$

και

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = pq\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) p q^{x-2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2},$$

οπότε

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{2q}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Η *έλλειψη μνήμης* αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα της γεωμετρικής κατανομής. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (3.1). Τότε*

$$P(X > \kappa + r \mid X > \kappa) = P(X > r), \ \kappa, r = 0, 1, \ldots. \tag{3.4}$$

Απόδειξη. Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{w: X(w) > \kappa + r\}$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{w: X(w) > \kappa\}$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\{w: X(w) > \kappa + r\} \subseteq \{w: X(w) > \kappa\}$ και χρησιμοποιώντας την (3.2), είναι ίση με

$$P(X > \kappa + r \mid X > \kappa) = \frac{P(X > \kappa + r, X > \kappa)}{P(X > \kappa)} = \frac{P(X > \kappa + r)}{P(X > \kappa)}$$

$$= \frac{1 - F(\kappa + r)}{1 - F(\kappa)} = \frac{q^{\kappa + r}}{q^{\kappa}} = q^r$$

και επειδή

$$P(X > r) = 1 - F(r) = q^r$$

συνάγεται η (3.4).

Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα αυτή σημαίνει *έλλειψη μνήμης* της γεωμετρικής κατανομής με την ακόλουθη έννοια. Η πιθανότητα να απαιτηθούν επιπρόσθετα περισσότερες από r δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία δεδομένου ότι δεν έχει πραγματοποιηθεί επιτυχία στις κ πρώτες δοκιμές είναι η ίδια με την (μη δεσμευμένη) πιθανότητα να απαιτηθούν περισσότερες από r δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία. Επομένως η πληροφορία μη επίτευξης του στόχου (επιτυχία) ξεχνιέται και η προσπάθεια συνεχίζεται όπως όταν πρωταρχίζει.

Παρατήρηση 3.1. Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού Y των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση της σχέσης $Y = X - 1$ και της (3.1) ως εξής:

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = y + 1) = pq^y, \ y = 0, 1, \ldots. \tag{3.5}$$

Η κατανομή της τ.μ. Y καλείται επίσης γεωμετρική με παράμετρο p. Η μέση τιμή και η διασπορά αυτής προκύπτουν από τις (3.3):

$$E(Y) = E(X-1) = E(X) - 1 = \frac{q}{p}, \; V(Y) = V(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{3.6}$$

Παράδειγμα 3.1. Το κόστος εκτέλεσης για πρώτη φορά ενός συγκεκριμένου πειράματος είναι 500 ευρώ. Αν το πείραμα αποτύχει, για ορισμένες μεταβολές που πρέπει να γίνουν πριν από την επόμενη εκτέλεσή του απαιτείται ένα πρόσθετο ποσόν 100 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα επιτυχίας $p = 4/5$ και ότι συνεχίζονται μέχρι την πρώτη επιτυχία. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 4 το πολύ δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία και (β) το αναμενόμενο κόστος μέχρι την πρώτη επιτυχία.

(α) Ο αριθμός X των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}, \; x = 1, 2, \ldots$$

και συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{[x]}, & 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

Επομένως

$$P(X \le 4) = F(4) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}9984.$$

(β) Αν Y είναι το κόστος μέχρι την πρώτη επιτυχία τότε

$$Y = 500X + 100(X-1) = 600X - 100$$

και

$$E(Y) = 600E(X) - 100.$$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι ίση με

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{5}{4}$$

και συνεπώς

$$E(Y) = 650.$$

3.2. Κατανομή Pascal

Ορισμός 3.2. *Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας q),*

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p, \; P_i(\{\alpha\}) = q = 1 - p, \; i = 1, 2, \ldots,$$

σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Pascal με παραμέτρους r και p.

Οι συναρτήσεις πιθανότητας και κατανομής της κατανομής Pascal συνάγονται στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.4. *Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Pascal με παραμέτρους r και p δίδεται από την*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \ x = r, r+1, \ldots \tag{3.7}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < r \\ \sum_{\kappa=r}^{[x]} \binom{\kappa-1}{r-1} p^r q^{\kappa-r}, & r \le x < \infty, \end{cases} \tag{3.8}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ περιλαμβάνει τα δειγματικά σημεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα) $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{x-1}, \varepsilon)$, με $r-1$ επιτυχίες στις $x-1$ πρώτες δοκιμές και επιτυχία στη x-οστή δοκιμή, τα οποία είναι πλήθους $\binom{x-1}{r-1}$, όσα και ο αριθμός των επιλογών των $r-1$ θέσεων για τις επιτυχίες από τις $x-1$ δυνατές θέσεις. Επιπλέον κάθε τέτοιο δειγματικό σημείο έχει πιθανότητα

$$p^r q^{x-r}.$$

Επομένως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \ x = r, r+1, \ldots .$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \ x = r, r+1, \ldots, \ f(x) = 0, \ x \notin \{r, r+1, \ldots\}$$

και χρησιμοποιώντας το αρνητικό διωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} t^x = (1-t)^{-r}, \ -1 < t < 1, \tag{3.9}$$

συνάγουμε τη σχέση

$$\sum_{x=r}^{\infty} f(x) = \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} = p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y-1}{y} q^y = p^r (1-q)^{-r} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής (3.8) προκύπτει άμεσα από τη συνάρτηση πιθανότητας (3.7) με τη χρησιμοποίηση της (2.4) του Κεφ. 2.

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της κατανομής Pascal.

Θεώρημα 3.5. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pascal με συνάρτηση πιθανότητας την (3.7). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \frac{r}{p}, \ \sigma^2 = V(X) = \frac{rq}{p^2}. \tag{3.10}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} ,$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x\binom{x-1}{r-1} = x\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = r\frac{x!}{r!(x-r)!} = r\binom{x}{x-r}$$

και την (3.9), συνάγουμε την έκφραση

$$\mu = rp^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{x-r} q^{x-r} = rp^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y}{y} q^y = rp^r (1-q)^{-r-1} = \frac{r}{p} .$$

Η δεύτερης τάξης ανοδική παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu_{[2]} = E[X(X+1)] = \sum_{x=r}^{\infty} x(x+1) \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} ,$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\begin{aligned} x(x+1)\binom{x-1}{r-1} &= x(x+1)\frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} \\ &= r(r+1)\frac{(x+1)!}{(r+1)!(x-r)!} = r(r+1)\binom{x+1}{x-r} \end{aligned}$$

και την (3.9), συνάγουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} \mu_{[2]} = E[X(X+1)] &= r(r+1)p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x+1}{x-r} q^{x-r} = r(r+1)p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y+1}{y} q^y \\ &= r(r+1)p^r (1-q)^{-r-2} = r(r+1)p^{-2} . \end{aligned}$$

Επομένως η διασπορά της τ.μ. X είναι

$$\sigma^2 = V(X) = E[X(X+1)] - E(X) - [E(X)]^2 = \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2} .$$

Παρατήρηση 3.2. Ας θεωρήσουμε τον αριθμό Y των αποτυχιών μέχρι τη r-οστή επιτυχία σε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας αυτής μεταβλητής δύναται να υπολογισθεί είτε απευθείας είτε με τη χρησιμοποίηση της σχέσης $Y = X - r$ και της συνάρτησης πιθανότητας (3.7) της X. Έχουμε

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = r + y) = \binom{r+y-1}{y} p^r q^y , \ y = 0,1,\ldots . \tag{3.11}$$

Η κατανομή της τ.μ. Y καλείται επίσης κατανομή Pascal ή αρνητική διωνυμική με παραμέτρους r και p. Η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δύνανται να προκύψουν από τις (3.10) ως εξής:

$$\mu = E(Y) = E(X) - r = \frac{r}{p} - r = \frac{rq}{p} , \ \sigma^2 = V(Y) = V(X) = \frac{rq}{p^2} . \tag{3.12}$$

Παρατήρηση 3.3. *Σύνδεση των κατανομών Pascal και διωνυμικής.* Ας παραστήσουμε με $X_{r,P}$ τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία σε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και με $X_{\nu,\Delta}$ τον αριθμό των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Τότε

$$P(X_{r,P} \leq \nu) = P(X_{\nu,\Delta} \geq r)\,, \tag{3.13}$$

επειδή το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την r-οστή επιτυχία είναι το πολύ ν είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο όπως ο αριθμός των επιτυχιών στις ν δοκιμές είναι τουλάχιστον r. Επίσης

$$P(X_{r,P} = \nu + 1) = pP(X_{\nu,\Delta} = r - 1)\,, \tag{3.14}$$

επειδή το ενδεχόμενο όπως η r-οστή επιτυχία πραγματοποιηθεί στην $\nu+1$ δοκιμή είναι ίσο με την τομή των ανεξαρτήτων ενδεχομένων όπως πραγματοποιηθούν $r-1$ επιτυχίες στις ν δοκιμές και επιτυχία στη $\nu+1$ δοκιμή. Η σχέση (3.14) δύναται να χρησιμοποιηθεί μαζί με τον Πίνακα 1 των πιθανοτήτων της διωνυμικής κατανομής για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων της κατανομής Pascal.

Παράδειγμα 3.3. Μια γυναίκα εξακολουθεί να τεκνοποιεί μέχρι να αποκτήσει δύο αγόρια. Έστω ότι η πιθανότητα γέννησης αγοριού είναι $p = 0{,}49$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα όπως η γυναίκα αυτή αποκτήσει το πολύ 4 παιδιά μέχρι να πετύχει το σκοπό της και (β) ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών μέχρι τη γέννηση του δεύτερου αγοριού.

(α) Έστω X ο αριθμός των παιδιών μέχρι και τη γέννηση του δεύτερου αγοριού. Τότε η τ.μ. X έχει την κατανομή Pascal με παραμέτρους $r = 2$, $p = 0{,}49$ και έτσι

$$P(X \leq 4) = \sum_{\kappa=2}^{4} (\kappa - 1)(0{,}49)^2 (0{,}51)^{\kappa-2} = (0{,}49)^2 \{1 + 2(0{,}51) + 3(0{,}51)^2\} = 0{,}67\,.$$

(β) Ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών μέχρι τη γέννηση του δεύτερου αγοριού, σύμφωνα με την πρώτη από τις (3.10), είναι

$$\mu = E(X) = \frac{2}{0{,}49} = 4{,}08\,.$$

Παράδειγμα 3.4. *Το πρόβλημα των σπιρτόκουτων του Banach.* Στη διάρκεια μιας τελετής προς τιμή του γνωστού μαθηματικού Banach, ο Steinhaus αναφερόμενος χιουμοριστικά στις καπνιστικές συνήθειες του τιμομένου έδωσε το ακόλουθο παράδειγμα ως εφαρμογή της κατανομής Pascal. Ένας μαθηματικός έχει πάντα μαζί του ένα σπιρτόκουτο στη δεξιά τσέπη και ένα άλλο στην αριστερή. Όταν χρειάζεται σπίρτο παίρνει τυχαία ένα από τα κουτιά και επομένως οι διαδοχικές εκλογές σπιρτόκουτων αποτελούν μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με $p = q = 1/2$. Έστω ότι αρχικά το κάθε κουτί περιέχει ν σπίρτα και ας θεωρήσουμε τη στιγμή κατά την οποία για πρώτη φορά ο μαθηματικός ανακαλύπτει ότι το ένα κουτί είναι κενό. Τη στιγμή αυτή το άλλο κουτί θα περιέχει Z σπίρτα. Η τυχαία αυτή μεταβλητή μπορεί να πάρει τις τιμές $z = 0, 1, \ldots, \nu$. Να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(z) = P(Z = z)$, $z = 0, 1, \ldots, \nu$.

Ας θεωρήσουμε ως επιτυχία την εκλογή του σπιρτόκουτου που βρίσκεται στη δεξιά τσέπη. Παρατηρούμε ότι το σπιρτόκουτο στη δεξιά τσέπη θα βρεθεί κενό όταν το άλλο θα περιέχει z σπίρτα αν και μόνο αν ο αριθμός X των δοκιμών μέχρι τη

$(\nu+1)$ επιτυχία είναι ίσος με $x=(\nu+1)+(\nu-z)=2\nu-z+1$. Το ίδιο ισχύει και με την εναλλαγή του ρόλου των δύο τσεπών. Επομένως, σύμφωνα με την (3.7),

$$f_Z(z)=P(Z=z)=2P(Z=2\nu-z+1)=\binom{2\nu-z}{\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu-z},\ z=0,1,\ldots,\nu.$$

4. ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Ας θεωρήσουμε έναν πεπερασμένο πληθυσμό του οποίου τα στοιχεία, σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό, κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες. Έστω ότι ένα δείγμα συγκεκριμένου μεγέθους εκλέγεται από τον πληθυσμό αυτό, χωρίς επανάθεση. Ο αριθμός των στοιχείων της μιας ή της άλλης κατηγορίας που περιλαμβάνονται στο δείγμα αποτελεί αντικείμενο πιθανοθεωρητικής μελέτης. Σχετικά θέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1. *Έστω ότι από μια κάλπη που περιέχει r άσπρα και s μαύρα σφαιρίδια εξάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, ν σφαιρίδια. Στο τυχαίο (στοχαστικό) αυτό πείραμα έστω X ο αριθμός των άσπρων σφαιριδίων τα οποία εξάγονται. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται υπεργεωμετρική με παραμέτρους r,s και ν.*

Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής συνάγεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. *Η συνάρτηση πιθανότητας της υπεργεωμετρικής κατανομής με παράμετρους r,s και ν δίδεται από την*

$$f(x)=P(X=x)=\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu},\ x=0,1,\ldots,\nu. \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Ο δειγματικός χώρος Ω περιλαμβάνει $N(\Omega)=\binom{r+s}{\nu}$ δειγματικά σημεία, όσα και ο αριθμός των ν-άδων σφαιριδίων που δύνανται να εξαχθούν. Τα δειγματικά αυτά σημεία είναι ισοπίθανα. Το ενδεχόμενο $\{X=x\}$ περιλαμβάνει $\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}$ ν-άδες σφαιριδίων με x άσπρα από τα r και $\nu-x$ μαύρα από τα s. Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,

$$f(x)=P(X=x)=\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu},\ x=0,1,\ldots,\nu.$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x)\geq 0,\ x=0,1,\ldots,\nu,\ f(x)=0,\ x\notin\{0,1,\ldots,\nu\}$$

και σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy,

$$\sum_{x=0}^{\nu}\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}=\binom{r+s}{\nu}, \tag{4.2}$$

ισχύει

$$\sum_{x=0}^{\nu}f(x)=\sum_{x=0}^{\nu}\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu}=1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας. Επίσης τα σημεία με θετική πιθανότητα καθορίζονται από τις ανισότητες

$$0 \le x \le \nu\,,\; 0 \le x \le r\,,\; 0 \le \nu - x \le s$$

και είναι οι ακέραιοι x με

$$\max\{0, \nu - s\} \le x \le \min\{\nu, r\}\,.$$

Στο επόμενο θεώρημα συνάγονται η μέση τιμή και η διασπορά της υπεργεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 4.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (4.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu = E(X) = \nu\frac{r}{r+s}\,,\; \sigma^2 = V(X) = \nu\frac{r}{r+s}\cdot\frac{s}{r+s}\cdot\frac{r+s-\nu}{r+s-1}\,. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\nu} x\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x\binom{r}{x} = x\frac{r!}{x!(r-x)!} = r\frac{(r-1)!}{(x-1)!(r-x)!} = r\binom{r-1}{x-1}$$

και τον τύπο (4.2) του Cauchy,

$$\mu = r\sum_{x=1}^{\nu}\binom{r-1}{x-1}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu} = r\sum_{y=0}^{\nu-1}\binom{r-1}{y}\binom{s}{\nu-1-y}\Big/\binom{r+s}{\nu}$$

$$= r\binom{r+s-1}{\nu-1}\Big/\binom{r+s}{\nu} = \nu\frac{r}{r+s}\,.$$

Η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu_{(2)} = E[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\nu} x(x-1)\binom{r}{x}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x(x-1)\binom{r}{x} = x(x-1)\frac{r!}{x!(r-x)!} = r(r-1)\frac{(r-2)!}{(x-2)!(r-x)!} = r(r-1)\binom{r-2}{x-2}$$

και τον τύπο (4.2) του Cauchy συνάγουμε την

$$\mu_{(2)} = r(r-1)\sum_{x=2}^{\nu}\binom{r-2}{x-2}\binom{s}{\nu-x}\Big/\binom{r+s}{\nu} = r(r-2)\sum_{y=0}^{\nu-2}\binom{r-2}{y}\binom{s}{\nu-2-y}\Big/\binom{r+s}{\nu}$$

$$= r(r-1)\binom{r+s-2}{\nu-2}\Big/\binom{r+s}{\nu} = \nu(\nu-1)\frac{r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)}\,.$$

Επομένως

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{\nu(\nu-1)r(r-1)}{(r+s)(r+s-1)} + \frac{\nu r}{r+s} - \left(\frac{\nu r}{r+s}\right)^2$$

$$= \nu \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r+s-\nu}{r+s-1}.$$

Η υπεργεωμετρική κατανομή δύναται να προσεγγισθεί, για μεγάλο $u = r+s$ από τη διωνυμική κατανομή σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την υπεργεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας (4.1) με* $u = r+s$. *Αν* $u, r, s \to \infty$ *έτσι ώστε* $\lim_{u\to\infty} \frac{r}{u} = p$, *τότε*

$$\lim_{u\to\infty} \binom{\nu}{x} \frac{(r)_x (s)_{\nu-x}}{(u)_\nu} = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x},\ x = 0,1,\ldots,\nu. \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την υπόθεση $\lim_{u\to\infty} \frac{r}{u} = p$ και επειδή $\frac{s}{u} = 1 - \frac{r}{u}$ έχουμε

$$\lim_{u\to\infty} \frac{s}{u} = 1 - \lim_{u\to\infty} \frac{r}{u} = 1 - p.$$

Επίσης $\lim_{u\to\infty} \frac{c}{u} = 0$ για σταθερό (ως προς u) αριθμό c. Επομένως

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(r)_x}{u^x} = \lim_{u\to\infty} \frac{r}{u}\left(\frac{r}{u} - \frac{1}{u}\right)\cdots\left(\frac{r}{u} - \frac{x-1}{u}\right) = p^x,$$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(s)_{\nu-x}}{u^{\nu-x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{s}{u}\left(\frac{s}{u} - \frac{1}{u}\right)\cdots\left(\frac{r}{u} - \frac{\nu-x-1}{u}\right) = (1-p)^{\nu-x},$$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(u)_\nu}{u^\nu} = \lim_{u\to\infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{u}\right)\cdots\left(1 - \frac{\nu-1}{u}\right) = 1.$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές αυτές σχέσεις συνάγουμε την (4.4).

Παράδειγμα 4.2. *Εκτίμηση του αριθμού των ψαριών λίμνης (Feller, 1968).* Ας υποθέσουμε ότι σε μια λίμνη υπάρχει ένας άγνωστος αριθμός u ψαριών. Από τη λίμνη αυτή ψαρεύουμε r ψάρια τα οποία σημαδεύουμε με μια ανεξίτηλη κόκκινη κηλίδα και αφήνουμε και πάλι ελεύθερα. Μετά από ορισμένο χρόνο ψαρεύουμε από τη λίμνη αυτή ν ψάρια και παρατηρούμε ότι κ από αυτά έχουν την κόκκινη κηλίδα. Να υπολογισθεί η τιμή του u η οποία μεγιστοποιεί την πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ το δεύτερο δείγμα ψαριών να περιέχει κ σημαδεμένα ψάρια.

Παρατηρούμε ότι στο στοχαστικό αυτό πείραμα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του υπεργεωμετρικού στοχαστικού προτύπου (μοντέλου) και σύμφωνα με την (4.3) η πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ δίδεται από την

$$p_{u,\kappa} = \binom{r}{\kappa}\binom{u-r}{\nu-\kappa} \Big/ \binom{u}{\nu}.$$

Για τη μεγιστοποίηση ως προς u της πιθανότητας αυτής σημειώνουμε ότι το πηλίκο

$$\frac{p_{u,\kappa}}{p_{u-1,\kappa}} = \frac{(u-r)(u-v)}{(u-r-v+\kappa)u} = \frac{1-(v/u)}{1-(v-\kappa)/(u-r)}$$

είναι μεγαλύτερο του 1 αν $(v/u) < (v-\kappa)/(u-r)$ και μικρότερο του 1 αν $(v/u) > (v-\kappa)/(u-r)$. Επομένως η πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ ως συνάρτηση του u αυξάνει στο διάστημα $u < vr/\kappa$, φθίνει στο διάστημα $u > vr/\kappa$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $u = [vr/\kappa]$, όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x. Η τιμή αυτή του u η οποία μεγιστοποιεί την πιθανότητα $p_{u,\kappa}$ αποτελεί μια *εκτίμηση* του αριθμού των ψαριών της λίμνης.

5. ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Ορισμός 5.1. *Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \; x = 0,1,\ldots, \tag{5.1}$$

όπου $0 < \lambda < \infty$. *Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ.*

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \; x = 0,1,\ldots, \; f(x) = 0, \; x \notin \{0,1,\ldots\}$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης e^z σε δυναμοσειρά,

$$e^z = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{z^x}{x!}, \tag{5.2}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X δίδεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}, & 0 \le x < \infty, \end{cases} \tag{5.3}$$

όπου $[x]$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x.

Ο Πίνακας 2 του παραρτήματος δίδει τη συνάρτηση πιθανότητας (5.1) της κατανομής Poisson για $\lambda = 0{,}1,\ 0{,}2,\ldots,10$.

Η κατανομή Poisson μελετήθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Simeon Denia Poisson (1781-1840) ως προσεγγιστική κατανομή της διωνυμικής κατανομής. Σχετικά ο Poisson απέδειξη το 1837 το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (2.5). Αν για* $v \to \infty$ *το* $p \to 0$ *έτσι ώστε* $vp = \lambda$ *(ή γενικότερα* $\lim_{v\to\infty} vp = \lambda$*), όπου* $\lambda > 0$ *σταθερή, τότε*

$$\lim_{\nu\to\infty}\binom{\nu}{x}p^x(1-p)^{\nu-x}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\dots. \tag{5.4}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση πιθανότητας (2.5) της διωνυμικής κατανομής, σύμφωνα με την υπόθεση $p=\lambda/\nu$, $\nu=1,2,\dots$, δύναται να γραφεί ως εξής

$$\binom{\nu}{x}p^x(1-p)^{\nu-x}=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{(\nu)_x}{\nu^x}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu}\Big/\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{x}.$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές σχέσεις

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{(\nu)_x}{\nu^x}=\lim_{\nu\to\infty}1\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{\nu}\right)=1,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu}=e^{-\lambda},\ \lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{x}=1,$$

συνάγουμε την (5.4).

Παρατήρηση 5.1. Η προσέγγιση (5.4) είναι ικανοποιητική για $\nu\ge 20$ και $p\le 10/\nu$. Επειδή η πιθανότητα p εμφάνισης ενός ενδεχομένου (επιτυχίας) υποτίθεται μικρή (θεωρητικά $p\to 0$ για $\nu\to\infty$) η κατανομή Poisson θεωρείται ως *κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων*. Επίσης αναφέρεται και ως *νόμος των μικρών αριθμών*.

Σχετικά με τη μέση τιμή και τη διασπορά της κατανομής Poisson αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.2. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας την (5.1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίδονται από τις*

$$\mu=E(X)=\lambda,\ \sigma^2=V(X)=\lambda. \tag{5.5}$$

Απόδειξη. Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίδεται από την

$$\mu=E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (5.2) συνάγουμε την πρώτη από τις (5.5).

Η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίδεται από την

$$\mu_{(2)}=E[X(X-1)]=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{\chi=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (5.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_{(2)}=E[X(X-1)]=\lambda^2.$$

Επομένως

$$\sigma^2=V(X)=E[X(X-1)]+E(X)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Παράδειγμα 5.1. Ας υποθέσουμε ότι η παραγωγή ενός βιομηχανικού προϊόντος γίνεται κάτω από στατιστικό έλεγχο ποιότητας έτσι ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις του στοχαστικού προτύπου (μοντέλου) των ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli. Μια μονάδα του προϊόντος αυτού θεωρείται ελαττωματική αν δεν πληροί όλες τις καθορισμένες προδιαγραφές και η πιθανότητα γι’ αυτό έστω ότι είναι $p = 0{,}01$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε ένα κιβώτιο 20 μονάδων του προϊόντος αυτού υπάρχει μια το πολύ ελαττωματική.

Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών μονάδων του προϊόντος στο κιβώτιο των 20 μονάδων. Η τυχαία αυτή μεταβλητή έχει τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = \binom{20}{x}(0{,}01)^x (0{,}99)^{20-x},\ x = 0,1,\ldots,20 .$$

Επειδή το $\nu = 20$ είναι μεγάλο και το $p = 0{,}01$ μικρό έτσι ώστε $\lambda = \nu p = 0{,}2$ είναι μικρότερο του 10 η προσέγγιση αυτής από την Poisson με

$$P(X = x) = e^{-0,2}\frac{(0{,}2)^x}{x!},\ x = 0,1,\ldots$$

είναι ικανοποιητική. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 του παραρτήματος, παίρνουμε

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8187 + 0{,}1637 = 0{,}9824 .$$

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιώντας τη διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας, παίρνουμε

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8180 + 0{,}1652 = 0{,}9832 .$$

Παρατήρηση 5.2. *Στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) Poisson.* Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα στο οποίο ένα ενδεχόμενο A μπορεί να εμφανίζεται (πραγματοποιείται) σε διάφορες χρονικές στιγμές ή σε διάφορα σημεία του χώρου (μονοδιάστατου, διδιάστατου ή τριδιάστατου). Για παράδειγμα σε ένα σταθμό βενζίνης το ενδεχόμενο άφιξης αυτοκινήτου μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή όπως και σε μια πλάκα Petri με βακτηρίδια το ενδεχόμενο παρατήρησης με το μικροσκόπιο σκοτινού σημείου (το οποίο σημαίνει την ύπαρξη αποικίας βακτηριδίων) μπορεί να εμφανισθεί σε οποιοδήποτε σημείο αυτής (δηλαδή σημείο του επιπέδου). Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες του πειράματος παραμένουν αμετάβλητες στο χρόνο ή το χώρο και ότι ο αριθμός εμφανίσεων του A σε δύο ξένα μεταξύ τους χρονικά ή χωρικά διαστήματα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα όπως το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί μια φορά σε ένα μικρό χρονικό διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του, ενώ η πιθανότητα όπως το ενδεχόμενο A πραγματοποιηθεί δύο ή περισσότερες φορές στο μικρό αυτό χρονικό διάστημα είναι αμελητέα.

Στο τυχαίο αυτό πείραμα ας παραστήσουμε με X_t τον αριθμό εμφανίσεων του A σε χρονικό ή χωρικό διάστημα μήκους t. Για δεδομένο t, η X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει τις τιμές $0,1,\ldots$, ενώ όταν το t μεταβάλλεται, η X_t, $t \ge 0$, ορίζει μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών η οποία καλείται *στοχαστική ανέλιξη (ή διαδικασία)*.

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πιθανότητας της X_t χωρίζουμε το διάστημα $(0,t]$ σε ένα μεγάλο αριθμό ν υποδιαστημάτων μήκους $\Delta t = t/\nu$. Σε κάθε τέτοιο διάστημα θα έχουμε σύμφωνα με τις συνθήκες του πειράματος είτε μια πραγματοποίηση του A (επιτυχία) με πιθανότητα $p_\nu \cong \theta\Delta t = \theta t/\nu$, $\theta > 0$, είτε καμμιά πραγματοποίηση του A (αποτυχία) με πιθανότητα $q_\nu = 1 - p_\nu$. Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X_t εμφανίσεων του *A* στα *ν* υποδιαστήματα (ανεξάρτητες δοκιμές) είναι η

$$P(X_t = x) \cong \binom{\nu}{x} p_\nu^x q_\nu^{\nu - x}, \; x = 0,1,\dots, \; p_\nu \cong \frac{\theta t}{\nu}.$$

Επειδή για $\Delta t \to 0$, το $\nu \to \infty$ και $\lim_{\nu \to \infty} \nu p_\nu = \theta t$, η διωνυμική αυτή συνάρτηση πιθανότητας στο όριο γίνεται

$$P(X_t = x) = e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^x}{x!} \quad x = 0,1,\dots, \; (\theta > 0, \; t > 0). \tag{5.6}$$

Αξίζει να σημειώσουμε μερικά από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα φαινομένων που εμφανίζονται στην πράξη και ικανοποιούν τις συνθήκες του πιθανοθεωρητικού μοντέλου της κατανομής Poisson.

(α) Μια ραδιενεργός πηγή εκπέμπει σωμάτια *α*. Ο αριθμός των σωματίων που φθάνουν σε δεδομένο τμήμα του χώρου σε χρόνο *t* αποτελεί το πιο γνωστό παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Στο περίφημο πείραμα των Rutherford, Chadwick και Ellis (1920) παρατηρήθηκε μια ραδιενεργός πηγή για $\nu = 2608$ χρονικά διαστήματα των 7,5 δευτερολέπτων. Τα παρατηρηθέντα αποτελέσματα βρέθηκαν πολύ κοντά στα αντίστοιχα θεωρητικά που δίδει η κατανομή Poisson με $\lambda = 3{,}87$.

(β) Είναι γνωστό το πρόβλημα των λανθασμένων τηλεφωνικών συνδέσεων, όπου αντί του αριθμού που έχει σχηματισθεί στο κατράν καλείται άλλος αριθμός. Έχει πειραματικά παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των λανθασμένων τηλεφωνικών συνδέσεων ακολουθεί την κατανομή Poisson. Επίσης ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο στη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου ακολουθεί την κατανομή Poisson.

(γ) Ο αριθμός των τροχαίων ατυχημάτων σε μια πόλη ή σε κάποιο τμήμα του οδικού δικτύου στη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου (ημέρα, μήνας, χρόνος κ.λπ.) ακολουθεί την κατανομή Poisson. Το μοντέλο όμως αυτό δεν μπορεί να εφαρμοσθεί για την περίπτωση του αριθμού των αυτοκινήτων που συγκρούονται γιατί σε μερικά δυστυχήματα εμπλέκονται περισσότερα από ένα αυτοκίνητα.

(δ) Ο αριθμός των επιβατών μιας αεροπορικής πτήσης που δεν εμφανίζονται την ώρα της αναχώρησης ενώ έχουν κρατήσει θέσεις. Με αυτό υπόψη οι αεροπορικές εταιρείες έχουν σε αναμονή ένα μικρό κατάλογο επιβατών από τον οποίο και συμπληρώνουν τις κενές θέσεις του αεροσκάφους.

(ε) Κατά τον βομβαρδισμό ενός στόχου οι βόμβες πέφτουν συνήθως σε διάφορα σημεία κοντά στο στόχο. Ο αριθμός των βομβών που πέφτουν σε επιφάνεια *t* τετραγωνικών μέτρων γύρω από το στόχο ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αυτό έχει αποδειχθεί και από τα στατιστικά στοιχεία του βομβαρδισμού του Λονδίνου με ιπτάμενες βόμβες στη διάρκεια του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου.

(στ) Μια πλάκα Petri με αποικίες βακτηριδίων, οι οποίες με το μικροσκόπιο είναι ορατές ως σκοτεινές κηλίδες, χωρίζεται σε μικρά τετραγωνίδια. Ο αριθμός των βακτηριδίων σε επιφάνεια *t* τετραγωνιδίων ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Εκτός από τα παραδείγματα αυτά υπάρχουν και άλλα φαινόμενα ή πειράματα, ίσως λιγότερο γνωστά, στα οποία μπορεί να εφαρμοσθεί η κατανομή Poisson. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα εφαρμογής της κατανομής Poisson.

Παράδειγμα 5.2. Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση. Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται (α) στη δεύτερη θέση και (β) στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

Ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = e^{-4}\frac{4^x}{x!},\ x = 0,1,\dots .$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 του παραρτήματος παίρνουμε για την περίπτωση (α)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 = 0{,}9084,$$

που σημαίνει ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι το άτομο θα ταξιδέψει. Για την περίπτωση (β) παίρνουμε

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{x=0}^{4} P(X = x) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 - 0{,}1954 - 0{,}1954 = 0{,}3711,$$

που σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το άτομο να ταξιδέψει.

Παράδειγμα 5.3. Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Αθήνα από μια σπάνια ασθένεια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες: (α) να υπάρξουν το πολύ 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα, (β) να υπάρξουν το πολύ 4 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε χρονικό διάστημα 2 μηνών, (γ) να υπάρξουν 2 τουλάχιστο μήνες με 2 το πολύ θανάτους στο επόμενο τρίμηνο.

Ο αριθμός X_t των θανάτων από την ασθένεια αυτή σε διάστημα t μηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με

$$P(X_t = x) = e^{-3t}\frac{(3t)^x}{x!},\ x = 0,1,2,\dots .$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2 του παραρτήματος, παίρνουμε (α)

$$P(X_1 \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$$

και (β)

$$P(X_2 \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} e^{-6}\frac{6^x}{x!} = 0{,}0025 + 0{,}0149 + 0{,}0446 + 0{,}0892 + 0{,}1339 = 0{,}2851.$$

Ο αριθμός Y των μηνών με 2 το πολύ θανάτους ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με

$$P(Y = y) = \binom{3}{y}(0{,}4232)^y(0{,}5768)^{3-y},\ y = 0,1,2,3$$

και έτσι (γ)

$$P(Y \geq 2) = \binom{3}{2}(0{,}4232)^2(0{,}5768) + \binom{3}{3}(0{,}4232)^3 0{,}5768 .$$

6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι δύο διακεκριμένοι κύβοι ρίχνονται 12 φορές. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X των ρίψεων στις οποίες ο αριθμός του πρώτου κύβου υπερβαίνει τον αριθμό του δευτέρου κύβου.

2. Έστω ότι σε 10 ρίψεις ενός μη αμερόληπτου νομίσματος η πιθανότητα να εμφανισθεί 5 φορές κεφαλή είναι διπλάσια της πιθανότητας να εμφανισθεί 4 φορές κεφαλή. Να υπολογισθεί η πιθανότητα σε 5 ρίψεις του νομίσματος να εμφανισθεί μια τουλάχιστο φορά κεφαλή.

3. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι $p = 0{,}3$. Να υπολογισθεί ο αριθμός ν των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να κτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστο μια φορά να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0,9.

4. Έστω ότι ένα σωμάτιο υπό την επίδραση δυνάμεων κινείται σε ευθεία ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$. Υποθέτουμε ότι τα διάφορα βήματα είναι ανεξάρτητα και ότι το σωμάτιο βρίσκεται αρχικά στη θέση 0. Αν X_ν είναι η θέση του σωματίου μετά ν βήματα, δείξετε ότι (α) η τυχαία μεταβλητή $Y_\nu = (X_\nu + \nu)/2$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (ν, p) και (β) $E(X_\nu) = \nu(2p-1)$, $V(X_\nu) = 4\nu pq$.

5. Ένα χαλύβδινο έλασμα λυγίζεται πολλές φορές μέχρις ότου κοπεί. Η πιθανότητα να κοπεί σε οποιαδήποτε λύγιση είναι σταθερή και ίση με $p = 0{,}1$. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να κοπεί το έλασμα μέχρι την τρίτη λύγιση και (β) ο μέσος αριθμός των λυγίσεων που απαιτούνται για να κοπεί το έλασμα.

6. Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι 0,9. Να υπολογισθούν (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 5 το πολύ βολές για να κτυπηθεί ο στόχος και (β) ο μέσος αριθμός των βολών που απαιτούνται για να κτυπηθεί ο στόχος.

7. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/2$ και έστω X ο αριθμός αριθμός των δοκιμών πριν από την εμφάνιση για πρώτη φορά δύο συνεχόμενων επιτυχιών. Δείξετε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίδεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{2^{x+2}} \sum_{\kappa=0}^{[x/2]} \binom{x-\kappa}{\kappa}, \; x = 0, 1, \ldots .$$

8. Έστω ότι ένα κίβδηλο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά μέχρις ότου εμφανισθεί για ν-οστή φορά το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται. Αν p είναι η πιθανότητα όπως σε μια ρίψη του νομίσματος η όψη γράμματα να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$, $x = \nu, \nu+1, \ldots$ και (β) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

9. Έστω ότι δύο παίκτες α και β αγωνίζονται σε μια σειρά παιγνιδιών και νικητής αναδεικνύεται εκείνος που κερδίζει πρώτος ν παιγνίδια και ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα σε οποιοδήποτε παιγνίδι να κερδίσει ο α είναι p και ο β είναι $q = 1 - p$. Αν Z είναι ο αριθμός των νικών που ο ηττημένος υπολείπεται του νικητή κατά τη λήξη της σειράς των παιγνιδιών να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ $= P(X = x)$, $x = 1, 2, ..., \nu$.

10. Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) να πραγματοποιηθεί άρτιος αριθμός επιτυχιών σε ν δοκιμές και (β) να απαιτηθεί περιττός αριθμός δοκιμών μέχρι την r–οστή επιτυχία.

11. Από τους 125 εργαζόμενους σε μια επιχείρηση 50 είναι γυναίκες. Έστω ότι για κάποια συγκεκριμένη εργασία επιλέγονται τυχαία 5 εργαζόμενοι. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως μεταξύ των 5 οι 2 είναι γυναίκες, χρησιμοποιώντας (α) την ακριβή κατανομή του αριθμού X των γυναικών μεταξύ των 5 και (β) κατάλληλη προσέγγιση της κατανομής αυτής.

12. Από μια κληρωτίδα που περιέχει ν κλήρους αριθμημένους από το 1 μέχρι το ν, εξάγονται διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο χωρίς επανάθεση κ κλήροι. Έστω X ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται. Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$ και (β) η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $V(X)$.

13. Έστω ότι ένα βιβλίο 350 σελίδων περιέχει 42 τυπογραφικά λάθη. Αν τα λάθη αυτά είναι τυχαία κατανεμημένα στο βιβλίο να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) όπως μια σελίδα που εκλέγεται τυχαία περιέχει x λάθη και (β) όπως 10 σελίδες που εκλέγονται τυχαία μόνο 3 δεν έχουν λάθος.

14. Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι 0,1% του πληθυσμού εμπλέκεται σε ένα τουλάχιστο δυστύχημα κάθε χρόνο. Αν η εταιρεία αυτή έχει ασφαλίσει 5000 άτομα να υπολογισθούν οι πιθανότητες να εμπλακούν σε δυστύχημα (α) το πολύ 3 πελάτες της τον επόμενο χρόνο (β) το πολύ 2 σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο χρόνια και (γ) το πολύ 4 στα επόμενα δύο χρόνια.

15. Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων σε νοσοκομείο των Αθηνών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σε ένα μήνα να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα και (β) να συμβούν το πολύ δύο θάνατοι σε δύο μήνες.