# ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5

## Α. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Ο μετασχηματισμός Laplace μετασχηματίζει τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τα γραμμικά μη χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα συνεχούς χρόνου, σε αλγεβρικές εξισώσεις και έχει καθιερωθεί σαν βασικό εργαλείο μελέτης και σχεδίασης συστημάτων συνεχούς χρόνου.

***<u>Ορισμός</u>*** : Καλούμε ευθύ μετασχηματισμό LAPLACE δοθείσης συνάρτησης f(t) με $t \in (0, \ )$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$ αν υπάρχει.

Η άσκηση αυτή αφορά στο μετασχηματισμό Laplace (ML) αιτιατών σημάτων, δηλαδή στο μονόπλευρο ML.

- Το Matlab μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε απευθείας το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης με την εντολή **Laplace** ( ).
- Το Matlab επίσης μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε απευθείας και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης με την εντολή **ilaplace** ( ).

**Σύνταξη εντολής Laplace:**

**Μετασχηματισμός Laplace = laplace ( συνάρτηση)**

**Σύνταξη εντολής ilaplace:**

**Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace = ilaplace ( συνάρτηση)**

Ας πάρουμε το <u>**παράδειγμα**</u> του σήματος

$$h(t) = \left(5e^{-2t} + 3e^{-0.1t} + 6te^{-5t}\right)u(t)$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας και το ζεύγος ML (δες ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ)

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^n}$$

όπου ο ML έχει **περιοχή σύγκλισης** (ΠΣ) $\mathrm{Re}(s) > -a$, βρίσκουμε το ML του παραπάνω σήματος ως εξής:

$$H(s) = \frac{5}{s+2} + \frac{3}{s+0.1} + \frac{6}{(s+5)^2}, \ \mathrm{Re}(s) > -0.1$$

Ή μετά από πράξεις

$$H(s) = \frac{8s^3 + 92.5s^2 + 277.6s + 163.7}{s^4 + 12.1s^3 + 46.2s^2 + 54.5s + 5} = \frac{8(s+7.0553)(s+3.7296)(s+0.7777)}{(s+2)(s+0.1)(s+5)^2}$$

Ο κώδικας σε Matlab για τον υπολογισμό του Μετασχηματισμού Laplace ακολουθεί:

```
>> syms  s t

>> laplace(5*exp(-2*t)+3*exp(-.1*t)+6*t*exp(-5*t))

ans =

…………………………………………………………………………….
```

<u>**Παρατήρηση:**</u> Χρησιμοποιούμε την εντολή **syms** για να δηλώσουμε τις μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν. Αν δεν δηλώσουμε τις μεταβλητές προκύπτει ένδειξη λάθους!

**Για την αντιστροφή ρητής συνάρτησης $H(s)$ έχουμε τη μέθοδο της ανάλυσης σε άθροισμα απλών κλασμάτων,** των οποίων ξέρουμε τον αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace.

Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει στο MATLAB με τη βοήθεια της συνάρτησης **`residue`**. Για μια συνάρτηση $H(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$, η εντολή του MATLAB

```
[R,P,K]=residue(B,A);
```

τη γράφει σε άθροισμα

$$H(s)=\frac{R(1)}{s-P(1)}+\frac{R(2)}{s-P(2)}+\cdots+\frac{R(n)}{s-P(n)}+K(s).$$

Κάτι ανάλογο συμβαίνει όταν οι πόλοι, δηλαδή οι ρίζες του $A(s)$ δεν είναι διαφορετικές μεταξύ τους, όπως συμβαίνει στο παράδειγμά μας, όπου υπάρχει ο διπλός πόλος $-5$.

Ας δούμε τι μας δίνει η **`residue`**:

```
>> [R,P,K]=residue([8 92.5 277.6 163.7],[1 12.1
46.2 54.5 5]);

>> R

R =

  ..................

  ..................

  ..................

  ..................

>> K

K =

    .....................

>> P

P =

    .....................
```

.....................

.....................

.....................

Το K **είναι κενό** αφού ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος αυτού του παρονομαστή.

Για να το επαληθεύσουμε, μπορούμε να ξαναχρησιμοποιήσουμε τη **`residue`**, αυτή τη φορά ανάποδα:

```
>> [B,A]=residue(R,P,K);

>> B

B =
```

..........................................................................................

```
>> A

A =
```

.....................................................................................................................................

.....................

Μπορούμε επίσης να δούμε **τα μηδενικά και τους πόλους** της συνάρτησης μεταφοράς στο επίπεδο s, ως εξής:

```
>> zeros=roots(B); % H roots βρίσκει ρίζες πολυωνύμου

>> poles=roots(A);

>>plot(real(zeros),imag(zeros),'o',real(poles),

imag(poles),'x')

>> grid

>> xlabel('Real')

>> ylabel('Imag')
```

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται καθαρά ότι όλοι οι πόλοι βρίσκονται αριστερά του φανταστικού άξονα.

Σαν συμπέρασμα ως προς την ευστάθεια προκύπτει ότι το σύστημα είναι

………..........................

## Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

f(t)=(e^2t)(t-2)$^2$ και στη συνέχεια ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Γράφουμε τον παρακάτω κώδικα

```
>> syms f s t

>> f=exp(2*t)*(t-3)^2;

>> laplace(f)

ans = 2/(s-2)^3-6/(s-2)^2+9/2/(1/2*s-1)

>> ilaplace(ans)

ans =
```

…………………………………………………………………

## ΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{cases} 4 \\ 5t \\ \sin(2t) \\ e^{3t} \end{cases}$$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

L{4}=

L{5t}=

L{sin(2t)}=

L{exp(3t)}=

2. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{cases} \dfrac{s-1}{s^2+4} \\ \dfrac{1}{s^2-4} \\ 1 \end{cases}$$

Παλαμίδης Αλέξανδρός
Μαράς Ανδρέας

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

IL{ }=

IL{ }=

IL{ }=

3. Να αναπτυχθεί η παράσταση $\frac{4s^2+4s+4}{s^2(s^2+3s+2)}$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\frac{4s^2+4s+4}{s^2(s^2+3s+2)} = \frac{}{} + \frac{}{} + \frac{}{}$$

**ΕΠΊΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE ΣΤΟ MATLAB**

Τα όσα αναφέρονται παρακάτω δουλεύουν μόνο για

- *Γραμμικές Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές*
- συναρτήσεις που είναι αθροίσματα και γινόμενα απο
  - πολυώνυμα
  - εκθετικές συναρτήσεις
  - ημίτονα και συνημίτονα
  - Βηματικές συναρτήσεις
  - Κρουστικές συναρτήσεις
- Αρχικές συνθήκες στο $t = 0$

# Απλό παράδειγμα

# Ας θεωρήσουμε τη Δ.Ε

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t},\ y(0) = 4,\ y'(0) = 5$$

Κατ'αρχή δηλώνουμε τις συμβολικές μεταβλητές:

```
>>syms s t Y
```

Με το f δηλώνουμε το δεξί μέρος της εξίσωσης και βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Laplace της τον οποίο συμβολίζουμε με F:

**>>f = 'exp(-t)'**

**f=** ..........................

**>>F = laplace(f,t,s)**

**F=**..............................

Βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των $y'(t) : Y1 = s\ Y - y(0)$ και $y''(t) : Y2 = =s\ Y1 - y'(0)$

**>>Y1 = s*Y - 4;**

**>>Y2 = s*Y1 - 5;**

Χρησιμοποιούμε την εντολή **Solve** του Matlab για να λύσουμε ως προς Y(s)

**>>Sol = solve(Y2 + 3*Y1 + 2*Y - F, Y)**

**Το Y(s) θα είναι**

**Sol=**...................................................................................................................**.**

Για να βρούμε τη λύση της Δ.Ε δηλαδή το y(t) αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του Y(s) δηλαδή

**>>sol = ilaplace(Sol,s,t)**

**Το y(t) θα είναι :**

**Sol=**...................................................................................................................**.**

## Β. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ

Ο μετασχηματισμός Ζ μετασχηματίζει τις εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν τα γραμμικά μη χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα διακριτού χρόνου, σε αλγεβρικές εξισώσεις και έχει καθιερωθεί σαν βασικό εργαλείο μελέτης και σχεδίασης συστημάτων διακριτού χρόνου.

***Ορισμός*** : Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζ μιας αιτιατής ακολουθίας f(k) ορίζεται ως:

$$Z\left[f(k)\right] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\ z^{-k} = ZT\left[f(k)\right]$$

- Το Matlab μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε απευθείας το μετασχηματισμό Ζ μιας συνάρτησης με την εντολή **ztrans**( ).
- Επίσης δίνει τη δυνατότητα να βρούμε απευθείας και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ μιας συνάρτησης με την εντολή **iztrans**( ).

**Σύνταξη εντολής ztrans:**

```
μετασχηματισμός Z = ztrans (συνάρτηση)
```

**Σύνταξη εντολής iztrans:**

```
αντίστροφος μετασχηματισμός Z = iztrans (συνάρτηση)
```

## Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Ζ της συνάρτησης **f(n)=n²** και στη συνέχεια ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ.

**Ο κώδικας που απαιτείται είναι:**

```
>> syms n z

>> f=n^2;

>> ztrans(f)

ans =

        ……………………………………………………………………….

>> iztrans(ans)

ans =

  ……………………………………………………………………………
```

## Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της συνάρτησης **f(n)=sin(a*n)** και στη συνέχεια ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z.

**Ο κώδικας που απαιτείται είναι:**

```
>> syms n a w

>> f=sin(a*n);

>> t=ztrans(f,w)

t =w*sin(a)/(w^2-2*w*cos(a)+1)


t =
```

..........................................................................................

## ΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Z των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{cases} 4 \\ 5k \\ \sin(2k) \\ 3^k \end{cases}$$

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Z{4}=

Z{5k}=

Z{sin(2k)}=

Z{3^k}=

2. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Z των παρακάτω συναρτήσεων

$$\begin{cases} \dfrac{z^2-1}{z^2+4} \\ \dfrac{z}{z^2-4} \\ 1 \end{cases}$$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

IZ{ }=

IZ{ }=

IZ{ }=