ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2

ΔΟΥΛΕΥΟΝΤΑΣ ΜΕ ΣΗΜΑΤΑ

Α. ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

Στα σήματα συνεχούς χρόνου (continuous time) η ανεξάρτητη μεταβλητή t είναι συνεχής, δηλαδή τα σήματα αυτά ορίζονται για οποιαδήποτε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η εξαρτημένη μεταβλητή, δηλαδή το πλάτος (amplitude) του σήματος, είναι και αυτή συνεχής. Παράδειγμα τέτοιων σημάτων είναι η ομιλία ως συνάρτηση του χρόνου. Ένα αναλογικό σήμα περιγράφεται ως μια συνάρτηση x(t), όπου t πραγματικός αριθμός.

Το MATLAB δεν υποστηρίζει συναρτήσεις (και κατ' επέκταση σήματα) συνεχούς χρόνου, π.χ. **y(t) = cos(t)**. Παρόλα αυτά μπορεί κανείς εύκολα να προσεγγίσει τέτοιες συναρτήσεις χρησιμοποιώντας αντίστοιχες συναρτήσεις διακριτού χρόνου με πολύ μικρό βήμα (step size). Για παράδειγμα, οι παρακάτω εντολές

```
>> t = 0:0.01:10;
>> y = cos(t);
```

παράγουν μια προσέγγιση της συνάρτησης συνεχούς χρόνου **y(t)=cos(t)**.
Η χρήση του τελεστή (operator) : με τρία ορίσματα παράγει το παρακάτω διάνυσμα για την ανεξάρτητη μμεταβλητή του χρόνου:

```
t = {0.00, 0.01, 0.02, …. , 9.98, 9.99, 10.00}
```

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε σε συναρτήσεις αυτού του τύπου ως «συνεχείς», αν και στη πραγματικότητα αυτές είναι διακριτού χρόνου με την προϋπόθεση ότι το βήμα της ανεξάρτητης μμεταβλητής επιλέγεται επαρκώς μικρό.

Για να σχεδιάσετε μια συνάρτηση, χρησιμοποιείστε την εντολή (command) **plot**.
Για παράδειγμα η παρακάτω ακολουθία εντολών έχει σαν αποτέλεσμα τη σχεδίαση της συνάρτησης cos(t),

```
>> t = 0:0.01:10;
>> y = cos(t);
>> plot(t,y)
```

Για να σχεδιάσετε στο ίδιο παράθυρο πολλαπλά διαγράμματα διαφόρων συναρτήσεων, χρησιμοποιείστε την εντολή (command) **subplot.**
Δοκιμάστε την παρακάτω ακολουθία εντολών

```
t = 0: .01:5;
y1 = 1 - exp(-t).*sin(10*t);
y2 = exp(-t).*sin(10*t);
y3 = 1 - exp(-t).*sin(5*t);
y4 = exp(-t).*sin(5*t);
subplot(221)
plot(t,y1), xlabel('Time (sec)')
subplot(222)
plot(t,y2), xlabel('Time (sec)')
subplot(223)
plot(t,y3), xlabel('Time (sec)')
subplot(224)
plot(t,y4), xlabel('Time (sec)')
subplot(111)
title('Decaying Sinusoids')
```

Προσπαθήστε να σχεδιάσετε και τις 4 γραφικές σε ένα μόνο παράθυρο με κατάλληλη χρήση της εντολής **plot**

……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας

Βασικά σήματα

Θα δούμε τώρα πως με το Matlab μπορούμε να σχεδιάσουμε μερικά από τα βασικά σήματα:

1. **Μοναδιαία συνάρτηση βαθμίδας *(unit step function)***

$$u(t) = \begin{matrix} 1, \; t \geq 0 \\ 0, \; t < 0 \end{matrix}$$

```
t=[-5:0.1:10];
u=[zeros(1,50),ones(1,101)];
plot(t,u,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2)
title('Unit Step Function')
ylim([-0.1,1.1])
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
grid('on'
```

2. **Κρουστική συνάρτηση Dirac**

$$d(t) = \begin{matrix} 1, \; t = 0 \\ 0, \; t \neq 0 \end{matrix}$$

```
t=[-5:0.1:10];
d=dirac(t);
plot(t,d,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2);
ylim([-0.1 1]);
title('Dirac Function');
xlabel('t');
ylabel('\delta(t)');
grid('on');
```

Εναλλακτικά ορίζω:

```
d= [zeros(1,50), 1 , ones(1,101)];
```

3.Μοναδιαία συνάρτηση ράμπας

$$r(t) = tu(t)$$

```
t=[-5:0.1:10];
u=[zeros(1,50),ones(1,101)];
r=u.*t;
plot(t,r,'Color',[0 0 1], 'LineWidth',2);
ylim([-1 10]);
title('Ramp Function');
xlabel('t');
ylabel('r(t)');
grid('on');
```

4. Τετραγωνικός παλμός

$$pT(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

```
t=[-5:0.1:10];
u1=[zeros(1,40),ones(1,111)];
u2=[zeros(1,60),ones(1,91)];
p=u1-u2;
plot(t,p,'Color',[0 0 1],'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
title('Unit Pulse'),
xlabel('t'), ylabel('p(t)'), grid('on');
```

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να γίνει εύκολα η γραφική παράσταση του σήματος

$$y(t) = p4(t-2)\,\sin(\pi t)$$

<u>Συμπληρώστε τον κώδικα που ακολουθεί</u>

```
t=[-5:0.1:10];
u1=[zeros(1,50),ones(1,101)];
u2=[zeros(1,90),ones(1,61)];

p=……………………………….;

plot………………………………………………………
```

✓Ένας εύκολος τρόπος για να παράγουμε σήματα είναι με την εντολή gensig.

```
[u,t]=gensig('square',2,10,0.1);
subplot(3,1,1), plot(t,u,'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
grid('on'), title('Square wave with period 2, duration 10,
sampling every 0.1'), xlabel('t');
[u,t]=gensig('sin',3,10,0.1);
subplot(3,1,2), plot(t,u,'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
grid('on'), title('Sin wave with period 3, duration 10, sampling
every 0.1'), xlabel('t');
[u,t]=gensig('pulse',2,10,0.1);
subplot(3,1,3), plot(t,u,'LineWidth',2), ylim([-0.1 1.1]),
grid('on'), title('Pulse wave with period 2, duration 10, sampling
every 0.1'), xlabel('t');
```

ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

Θα δούμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να δημιουργήσουμε και να σχεδιάσουμε μιγαδικά σήματα στο περιβάλλον του MATLAB.

Η διαδικασία παραγωγής μιγαδικών σημάτων δεν διαφέρει απ' αυτή που ακολουθείται για την παραγωγή πραγματικών. Για παράδειγμα, για να παράγουμε το μιγαδικό εκθετικό

$s(t) = 2\exp(t+\pi/4)u(t)$, όπου $u(t\geq 0)=1$,

πρέπει να εισάγουμε τις εντολές

```
>> t = 0:0.01:10;
>> s = 2*exp(j*(t+pi/4));
```

Γνωρίζουμε ότι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του παραπάνω μιγαδικού σήματος δίνεται αντίστοιχα από τις παρακάτω συναρτήσεις,

$$\mathrm{Re}\{s(t)\}=2\cos(t+\pi/4)$$

και

$$\mathrm{Im}\{s(t)\}=2\sin(t+\pi/4)$$

Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί από την εκτέλεση του παρακάτω προγράμματος

```
>> t = 0:0.01:10;
>> s = 2*exp(j*(t+pi/4));
>> sr = real(s);
>> si = imag(s);
>> plot(t,sr,'r',t,2*cos(t+pi/4),'d');
```

Η τελευταία εντολή σχεδιάζει το πραγματικό μέρος του παραπάνω μιγαδικού σήματος σαν μια κόκκινη συνεχή γραμμή (καθορισμένη σαν 'r'), και τη συνάρτηση $2\cos(t+\pi/4)$ σαν μια ακολουθία χαρακτήρων ◊ (καθορισμένη σαν 'd').

Όπως αναμένεται οι δύο καμπύλες είναι ίδιες και αλληλεπικαλύπτονται αλλά μπορείτε απο την επιλογή **tools → zoom in** να δείτε τις δύο καμπύλες ξεχωριστά.

Β. ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΗΜΑΤΑ

Το MATLAB είναι δομημένο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αντιμετωπίζει τις μεταβλητές ως διανύσματα και πίνακες.
Για την αναπαράσταση ενός σήματος διακριτού χρόνου θα πρέπει να ορισθεί ένα διάνυσμα ακεραίων το οποίο θα αντιπροσωπεύει τους δείκτες n του σήματος και ένα διάνυσμα που θα περιέχει τις τιμές του σήματος για κάθε τιμή του δείκτη x[n].
Για **<u>παράδειγμα</u>**, δοθέντος του σήματος διακριτού χρόνου

$$x[n] = \begin{cases} 2n, -3 \le n \le 3 \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$

πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω εντολές για να παραχθούν τα διανύσματα που θα αναπαριστούν τους δείκτες και το σήμα

```
>> n = [-3:3];
>> x = 2*n;
```

Να σχεδιασθεί το παραπάνω σήμα χρησιμοποιώντας την εντολή **stem**:

```
>> stem(n,x)
```

Αν θελήσουμε να δούμε το σήμα σε μια μεγαλύτερη περιοχή, μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία

```
>> x = [zeros(1,3) 2*n zeros(1,3)];
>> n2 = [-6:6];
>> stem(n2,x)
```

Η εντολή zeros(N,M) παράγει έναν πίνακα διαστάσεων NXM και τον μηδενίζει.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ

Είναι πολύ εύκολο στο MATLAB να φτιάξουμε περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου.
Για παράδειγμα, το περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου που ορίζεται για μια περίοδο από τη παρακάτω σχέση (περίοδος No=4)

$$x[n] = \begin{cases} 1, n = 0,1 \\ -1, n = 2,3 \end{cases}$$

μπορεί να παραχθεί και να σχεδιασθεί στο MATLAB εισάγοντας την παρακάτω ακολουθία εντολών

```
>> N = 10;
>> x = [1 1 -1 -1];
>> xr = repmat(x,1,N);
>> n = 0:length(xr)-1;
>> stem(n,xr);
```

Σημειώστε ότι η εντολή **repmat** παράγει αντίγραφα ενός διανύσματος ή πίνακα, ενώ η εντολή **Length** επιστρέφει τον αριθμό των στοιχείων ενός διανύσματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ακολουθεί **παραδείγμα** δημιουργίας σημάτός **συνεχούς** χρόνου για τα οποία σας ζητείται **να συμπληρώσετε τα σχόλια** δίπλα από κάθε βασική εντολή (μετά από το σύμβολο %)

Σκοπός του προγράμματος είναι να σχεδιαστεί το αναλογικό σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < -4 \\ t+2 & \text{if} \quad -4 \le t < 3 \\ t-2 & \text{if} \quad 3 \le t \end{cases}$$

```
t1 = -8:-4; x1 = zeros(size(t1));

%  ......................................................................
t2 = -4:3; x2 = t2+2;

%  ......................................................................
t3 = 3:8; x3 = t3-2;

%   .....................................................................
t = [t1 t2 t3];
%
.........................................................................
x = [x1 x2 x3];

%  .....................................................................
subplot(221),plot(t,x)

......................................................................
xlabel('Time (sec)')

%   ......................................................................
ylabel('x(t)')

%  ......................................................................
```

Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας

Συμβολικές εκφράσεις

Το MATLAB διαθέτει μία συλλογή από συναρτήσεις κάτω από το όνομα ***Symbolic Math Toolbox*** που χρησιμεύουν σαν εργαλεία για την εκτέλεση συμβολικών πράξεων όπως η επίλυση αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων, η παραγώγιση και η ολοκλήρωση συναρτήσεων, η εύρεση οριζουσών και χαρακτηριστικών ριζών κ.α..

Σε κάθε συμβολική έκφραση είναι σημαντικό να δηλώνουμε αρχικά τις μεταβλητές που παίρνουν μέρος στις εκφράσεις σαν **συμβολικές μεταβλητές** (*symbolic variables*). Αυτό γίνεται με τις συναρτήσεις **sym** (για μία μόνο μεταβλητή) και **syms** (για πολλές μαζί μεταβλητές). Για παράδειγμα, με τις εντολές που ακολουθούν, δηλώνουμε μία μεταβλητή x σαν συμβολική και στη συνέχεια την χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης cosx.

```
»x=sym('x')
x =
     ........
»diff(cos(x))
ans =
      .................
```

Με τις παρακάτω εντολές, δηλώνουμε 4 συμβολικές μεταβλητές μαζί, κατασκευάζουμε ένα συμβολικό πίνακα με αυτές και κατόπιν υπολογίζουμε την ορίζουσά του.

```
»syms('a','b','c','d')
»M=[a,b;c,d]
M =


»det(M)
  ans =
         .........................
```

(α) Αριθμητές και παρονομαστές ρητών παραστάσεων

Όταν έχουμε μια σύνθετη έκφραση με κλάσματα που θέλουμε να την μετατρέψουμε σε ρητή παράσταση, χρησιμοποιούμε την εντολή **numden**. Αυτή μας επιστρέφει ξεχωριστά τον αριθμητή και τον παρονομαστή της ρητής παράστασης. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μετατρέψουμε την παράσταση

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+5}$$

σε ρητή, δίνουμε τις εντολές:

```
»syms x
»g=1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x+5)
g =

    ..........................................
»[n d]=numden(g)
n =

    .............................
d =


     .............................
```

Προκύπτει λοιπόν ότι η ζητούμενη παράσταση είναι

$$\frac{x^2-11x-24}{(x+1)(x-2)(x+5)}.$$

(β) Συμβολικά αθροίσματα – σειρές

Η εντολή **symsum** χρησιμοποιείται για να υπολογίζει συμβολικά αθροίσματα εκφράσεων. Η πιο βολική μορφή της είναι η

symsum(*έκφραση, μεταβλητή-δείκτης, κάτω όριο, πάνω όριο*).

Για παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\sum_{k=0}^{n} w^k = \frac{1-w^{n+1}}{1-w}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

```
»syms x w k n
»f1=w^k;f2=k;f3=x^k/sym('k!');
»symsum(f1,k,0,n)
ans =

        …………………………………………………
»symsum(f2,k,1,n)
ans =

        ………………………………………………….
»symsum(f1,k,0,inf)
ans =

        ……………………………
»symsum(f3,k,0,inf)
ans =

         …………………
```

Προσέξτε ότι τα αποτελέσματα είναι ισοδύναμα με αυτά που περιμένουμε αλλά έχουν άλλη μορφή.(Π.χ. $\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$). Προσέξτε επίσης τον τρόπο με τον οποίο δηλώνουμε το παραγοντικό (!) αφού το MATLAB δεν μπορεί να το αναγνωρίσει διαφορετικά. Για να δηλώσουμε το άπειρο, χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή του MATLAB **inf**.

(γ) Παραγώγιση

Η παραγώγιση συναρτήσεων γίνεται με την εντολή **diff**. Οι διαφορετικές της μορφές είναι:

- **diff**(*έκφραση*): Παραγωγίζει την έκφραση ως προς μία από τις συμβολικές μεταβλητές της. Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται όταν η έκφραση περιλαμβάνει μία μόνο μεταβλητή.
- **diff**(*έκφραση, n*): Παραγωγίζει την έκφραση n φορές.
- **diff**(*έκφραση, μεταβλητή, n*): Παραγωγίζει την έκφραση n φορές ως προς την μεταβλητή που θα καθορίσουμε.

Για παράδειγμα, θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης 2 μεταβλητών

$$f(x,y) = e^{-2x}\sin y \, .$$

```
»syms x y
»f=exp(-2*x)*sin(y)
f =

    ..................................
»df_dx=diff(f,x)
df_dx =

       .......................................
»df_dy=diff(f,y)
df_dy =

       .......................................
```

Σημειώστε ότι η συνάρτηση `diff` χρησιμοποιείται στο βασικό μέρος του MATLAB για να υπολογίζει τις διαφορές των διαδοχικών στοιχείων ενός διανύσματος ή των στηλών ενός πίνακα. Το MATLAB αποφασίζει ποια εκδοχή της εντολής θα χρησιμοποιήσει αφού είναι σε θέση να ξεχωρίζει τις συμβολικές από τις αριθμητικές εκφράσεις.

(δ) Ολοκλήρωση

Η εντολή με την οποία μπορούμε να υπολογίζουμε ολοκληρώματα, είναι η **int**. Έχει και αυτή διάφορες μορφές αλλά οι πιο πλήρεις είναι οι εξής:

int(*έκφραση, μεταβλητή*): Υπολογίζει το αόριστο ολοκλήρωμα ως προς τη συμβολική μεταβλητή που θα ορίσουμε. Υπάρχει περίπτωση είτε το ολοκλήρωμα να είναι αδύνατο να δοθεί σε κλειστή μορφή, είτε η συνάρτηση να είναι τόσο πολύπλοκη που το MATLAB να μη μπορεί να υπολογίσει την αντιπαράγωγο.

int(*έκφραση, μεταβλητή, κάτω όριο, πάνω όριο*): Υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα σε κάποιο διάστημα ολοκλήρωσης.

Για **παράδειγμα**, θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{3x+7}{(x^2+2x+5)^2}dx = \frac{x-2}{2(x^2+2x+5)} + \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

```
»syms x
»g1=(3*x+7)/(x^2+2*x+5)^2
g1 =

    ……………………………………………………
»int(g1,x)
ans =

     ………………………………………………………………………………………………………………
```

(ε) Επίλυση εξισώσεων

Η συνάρτηση **solve** χρησιμοποιείται για την εύρεση των ριζών μιας συμβολικής έκφρασης. Μπορούμε να καθορίσουμε μεταβλητή ως προς την οποία θα γίνει η επίλυση (συνιστάται).

```
»syms a b c x
»solve(a*x^2+b*x+c,x)
ans =
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
»pretty(ans)
```

Στατιστική-πιθανότητες-(ψευδό)τυχαίοι αριθμοί

Στο matlab έχουμε τη δυνατότητα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν συγκεκριμένες κατανομές.
Η εντολή που παράγει αριθμούς που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0 1] είναι η **x= rand (N,K)**

>> x=rand(1,8)

Για τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή σε ένα διάστημα [a,b] γράφουμε **x= a+(b-a)*rand(N,K) ;**

>> **x= 2+ (5-2)* rand (1,10000);** % διάνυσμα 10000 τυχαίων αριθμών
% ομοιόμορφα κατανεμημένων στο διάστημα [2,5]

Για να σχεδιάσουμε το ιστόγραμμα χρησιμοποιούμε την hist(x,k) όπου k ο αριθμός των υποδιαστημάτων που χωρίζουμε το ιστόγραμμα.
>> **hist (x,100);**

Η εντολή που παράγει αριθμούς που ακολουθούν την κανονική (normal) κατανομή με μέση τιμή μ= 0 και διασπορά σ^2=1 είναι η **x= randn (N,K)**

>> **x=randn(1,9)**
Για τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κανονική (normal) κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 γράφουμε
x= μ+ σ *randn(N,K) ;

>> **x= 2 + (sqrt(10))* randn (1,10000);** % διάνυσμα 10000 τυχαίων
% αριθμών κανονικά κατανεμημένων με μέση τιμή μ= 2 και διασπορά
% σ^2=10.
>> hist (x,100);

Τέλος με την εντολή mean(x) βρίσκουμε το μέσο όρο και με την εντολή var(x) τη διασπορά ενός διανύσματος x.

>> mesos_oros= mean(x)
>> diaspora=var(x)

Παλαμίδης Αλέξανδρος
Μαράς Ανδρέας