

Βασικά Στοιχεία Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος (II)



Συστήματα

Σύστημα είναι (μαθηματικά) ένας μετασχηματισμός ή μια διεργασία η οποία αντιστοιχεί κάποια σήματα εισόδου σε κάποια σήματα εξόδου:

$$y(t) = T(x(t)),$$

όπου $x(t)$ το σήμα εισόδου, $y(t)$ το σήμα εξόδου

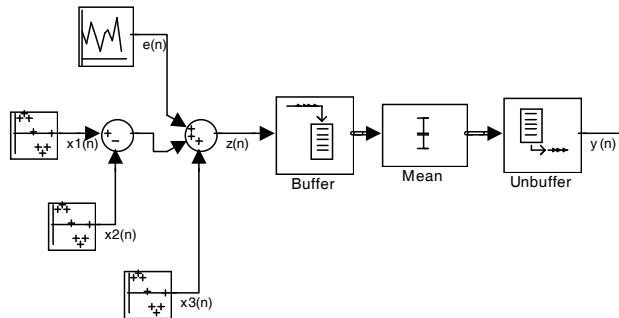
Ομοίως ορίζονται τα συστήματα διακριτού χρόνου ως μετασχηματισμοί που αντιστοιχίζουν ακολουθίες εισόδου με ακολουθίες εξόδου.

$$y\{n\} = T[x\{n\}],$$

όπου $x\{n\}$ η ακολουθία εισόδου, $y\{n\}$ η ακολουθία εξόδου

Παράδειγμα Συστήματος ΔΧ: Υπολογισμός Κινητού Μέσου Όρου

$$y\{n\} = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x\{n-k\}$$



Κατηγορίες Συστημάτων

Συστήματα χωρίς μνήμη

Στα συστήματα χωρίς μνήμη η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου

$$y\{n\} = a_2 x^2\{n\} + a_1 x\{n\} + a_0 \Rightarrow \text{Σύστημα χωρίς μνήμη}$$

$$y\{n\} = a_2 x^2\{n\} + a_1 x\{n-1\} + a_0 \Rightarrow \text{Σύστημα με μνήμη}$$

Κατηγορίες Συστημάτων

Γραμμικά Συστήματα

$y_1\{n\} = T[x_1\{n\}]$ είναι η απόκριση του συστήματος $T[\bullet]$ στην είσοδο $x_1\{n\}$ και ομοίως $y_2\{n\} = T[x_2\{n\}]$ η απόκριση στην είσοδο $x_2\{n\}$ τότε το σύστημα $T[\bullet]$ είναι γραμμικό αν και μόνο αν πληρείται η παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} T[a_1x_1\{n\}+a_2x_2\{n\}] &= a_1T[x_1\{n\}]+a_2T[x_2\{n\}] \\ &= a_1y_1\{n\}+a_2y_2\{n\} \end{aligned}$$

για οποιεσδήποτε σταθερές a_1 και a_2

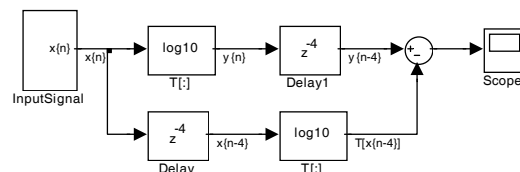
Κατηγορίες Συστημάτων

Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Το σύστημα $T[\bullet]$ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν μια χρονική μετατόπιση ή καθυστέρηση στην ακολουθία εισόδου προκαλεί αντίστοιχη χρονική μετατόπιση ή καθυστέρηση στην ακολουθία εξόδου. Επομένως αν:

$$y\{n\} = T[x\{n\}] \quad \text{και} \quad x_1\{n\} = x\{n-n_0\},$$

τότε το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο αν και μόνο αν $y_1\{n\} = T[x_1\{n\}] = T[x\{n-n_0\}] = y\{n-n_0\}$ για κάθε n_0



Κατηγορίες Συστημάτων

Αιτιατά Συστήματα

Το σύστημα $T[\bullet]$ είναι αιτιατό αν η τρέχουσα τιμή της εξόδου δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

$$y\{n\} = a_2 x^2\{n\} + a_1 x\{n-1\} + a_0 \Rightarrow \text{Αιτιατό}$$

$$y\{n\} = a_2 x^2\{n+1\} + a_1 x\{n\} + a_0 \Rightarrow \text{Μη αιτιατό}$$

Κατηγορίες Συστημάτων

Ευσταθή Συστήματα

Το σύστημα $T[\bullet]$ είναι ευσταθές κατά BIBO (bounded input – bounded output, πεπερασμένη είσοδος – πεπερασμένη έξοδος) αν η απόκριση σε κάθε πεπερασμένη είσοδο είναι επίσης πεπερασμένη.

Αν:

$$|x\{n\}| \leq B_x < \infty, \forall n$$

Τότε:

$$|T[x\{n\}]| = |y\{n\}| \leq B_y < \infty, \forall n$$

Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα (ΓΧΑ) Συστήματα

Τα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα (LTI – Linear Time Invariant) είναι μια κατηγορία συστημάτων για τα οποία υπάρχουν συμπαγείς μαθηματικές αναπαραστάσεις.

Παρόλο που τα περισσότερα φυσικά συστήματα δεν είναι ούτε γραμμικά και κυρίως χρονικά μεταβαλλόμενα πολλά από αυτά μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από ΓΧΑ σε ένα πεπερασμένο χρονικό παράθυρο.

Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα (ΓΧΑ) Συστήματα

Αναπαράσταση ΓΧΑ συστημάτων μέσω της κρουστικής απόκρισης

Κρουστική απόκριση $h\{n\}$ του συστήματος $T[\bullet]$ είναι απόκριση του με είσοδο την μοναδιαία ακολουθία δειγματοληψίας (ή κρουστική ώθηση) $\delta\{n\}$:

$$h\{n\} = T[\delta\{n\}]$$

$$x\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}\delta\{n-k\} \quad y\{n\} = T[x\{n\}] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}\delta\{n-k\}\right]$$

$$y\{n\} = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}\delta\{n-k\}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}T[\delta\{n-k\}]$$

$$y\{n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\{k\}h\{n-k\}$$

Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα (ΓΧΑ) Συστήματα

Ιδιότητες ΓΧΑ συστημάτων

(a) $x\{n\} * h\{n\} = h\{n\} * x\{n\}$

(b) $x\{n\} * (h_1\{n\} + h_2\{n\}) = x\{n\} * h_1\{n\} + x\{n\} * h_2\{n\}$

(c) $(x\{n\} * h_1\{n\}) * h_2\{n\} = (x\{n\} * h_2\{n\}) * h_1\{n\} = x\{n\} * (h_1\{n\} * h_2\{n\})$

(d) Ευσταθές (κατά BIBO) αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h\{k\}| < \infty$

(e) FIR (Finite duration Impulse Response) αν:

$$h\{n\} \neq 0, \quad -\infty < M1 \leq n \leq M2 < \infty$$

δηλαδή η ακολουθία $h\{n\}$ έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων. Στην αντίθετη περίπτωση (δηλαδή αν η $h\{n\}$ έχει άπειρο αριθμό μη μηδενικών δειγμάτων) τότε το σύστημα είναι IIR (Infinite duration Impulse Response).

Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα (ΓΧΑ) Συστήματα

Αναπαράσταση ΓΧΑ συστημάτων μέσω Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Μια υποκατηγορία ΓΧΑ συστημάτων μπορεί να αναπαρασταθεί με εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

Η παραπάνω σχέση δεν εξασφαλίζει τη γραμμικότητα και το χρονικά αναλλοίωτο. Ένα γραμμικό σύστημα πρέπει να δίνει μηδενική απόκριση συνεχώς όταν δέχεται μηδενική είσοδο συνεχώς.